УДК 517.944

Н. Г. Хома (Терноп. акад. нар. госп-ва)

ЛІНІЙНА КРАЙОВА ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. I

In three spaces, we find exact classical solutions of a boundary-value periodic problem $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x,t)$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x, t+T) = u(x,t) = 0$, $x, t \in \mathbb{R}$.

У трьох просторах знайдені точні класичні розв'язки крайової періодичної задачі $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x,t)$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x, t+T) = u(x,t) = 0$, $x, t \in \mathbb{R}$.

У даній роботі у просторі $C^{1,0}(\mathbb{R}^2)$ проводиться повне дослідження лінійної крайової періодичної задачі

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u(x, t+T) = u(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tag{3}$$

тісно зв'язаної з числами a і T. Відмітимо, що задачу (1)–(3) при $a = 1$ частково досліджено в роботі [1].

1. Існування класичних розв'язків. Позначимо через C простір функцій двох змінних x і t, неперевних і обмежених на $\mathbb{R}^2$, а через G_x — простір функцій двох змінних x, t, неперервних і обмежених на $\mathbb{R}^2$ разом з похідною по x.

Для $g \in C$ покладемо

$$r(x, ay, \tau) = \frac{1}{4}\bigl(g(x + a(y-\tau), \tau) + g(x - a(y-\tau), \tau)\bigr); \tag{4}$$

$$\bar{r}(x, ay, \tau) = \frac{1}{4}\bigl(g(x + a(y-\tau), \tau) - g(x - a(y-\tau), \tau)\bigr); \tag{5}$$

$$(Pg)(x, t, a, b) = \int_0^t d\tau \int_\tau^t r(x, ay, \tau)\, dy - \int_t^b d\tau \int_\tau^t r(x, ay, \tau)\, dy, \tag{6}$$

де b — дійсне число, відмінне від нуля.

Теорема 1. *Нехай $g \in G_x$. Тоді функція $u = Pg$ задовольняє рівняння* (1).

Доведення. Обчислюючи відповідні чстинні похідні другого порядку функції $u(x,t) = (Pg)(x, t, a, b)$, одержуємо

$$u_{tt}(x,t) = g(x,t) + a\int_0^t \bar{r}'_x(x, at, \tau)\, d\tau - a\int_t^b \bar{r}'_x(x, at, \tau)\, d\tau;$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{a}\int_0^t \bar{r}'_x(x, at, \tau)\, d\tau - \frac{1}{a}\int_t^b \bar{r}'_x(x, at, \tau)\, d\tau.$$

Звідси

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = g(x,t),$$

тобто функція $u(x,t) = (Pg)(x, t, a, b)$ є розв'язком рівняння (1), що треба було довести.

Для подальших досліджень символами $Q_{2\pi}^-$ і Q_T позначимо простори функцій g, які задовольняють на $\mathbb{R}^2$ умови $g(x,t) = -g(-x,t) = g(x+2\pi, t)$;

$g(x, t+T) = g(x, t)$, а символом H_{ab} — простір функцій $g \in C$, які задовольняють умови

$$r(x, ay, b+\tau) = -r(x, ay, \tau), \tag{7}$$

$$\int_{-T}^{0} d\tau \int_{0}^{b} r(x, a(\tau+w), b+\tau)\, dw = 0. \tag{8}$$

Теорема 2. *Для того щоб функція* $u = Pg$ *задовольняла крайові умови* (2), *необхідно і достатньо, щоб* $g \in Q_{2\pi}^{-} \cap C$.

Доведення. Нехай $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Тоді $(Pg)(0, t, a, b) = 0$, що рівносильно $r(0, ay, \tau) \equiv 0$. Звідси на основі позначення (4) одержуємо, що $g(a(y-\tau), \tau) \equiv -g(-a(y-\tau), \tau)$, а це означає, що функція $g(x, t)$ непарна відносно змінної x. Аналогічно, умова $(Pg)(\pi, t, a, b) = 0$ рівносильна умові $r(\pi, ay, \tau) \equiv 0$. В цьому випадку виконується тотожність $g(\pi + a(y - \tau), \tau) \equiv -g(\pi - a(y-\tau), \tau)$, тобто $g(\pi + a(y-\tau), \tau) \equiv g(-\pi + a(y-\tau), \tau)$. Це означає, що аргумент $x = \pi + a(y-\tau)$ повинен дорівнювати аргументу $z = -\pi + a(y-\tau)$. Отже, $x - z = 2\pi$, $x = z + 2\pi$, тобто функція $g(x, t)$ — 2π-періодична за змінною x. Тому $g \in Q_{2\pi}^{-}$.

Якщо припустити, що $g \in Q_{2\pi}^{-}$, то безпосередньою перевіркою переконуємось, що функція $u = Pg$ задовольняє крайові умови (2), тобто $(Pg)(0, t, a, b) = (Pg)(\pi, t, a, b)$.

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Для того щоб функція* $u = Pg$ *задовольняла умову* (3), *необхідно і достатньо, щоб* $g \in Q_T \cap H_{ab} \cap C$.

Доведення. Нехай

$$(Pg)(x, t+T, a, b) = (Pg)(x, t, a, b). \tag{9}$$

Враховуючи (6), перетворимо ліву частину рівності (9) таким чином:

$$(Pg)(x, t+T, a, b) = \int_{0}^{T} d\tau \int_{\tau}^{t+T} r(x, ay, \tau)\, dy +$$

$$+ \int_{T}^{t+T} d\tau \int_{\tau}^{t+T} r(x, ay, \tau)\, dy - \int_{t+T}^{b} d\tau \int_{\tau}^{t+T} r(x, ay, \tau)\, dy.$$

Проводячи спочатку заміну змінної $\tau = T + z$ у зовнішніх інтегралах, а потім — заміну $y = T + v$ у внутрішніх інтегралах, одержуємо

$$(Pg)(x, t+T, a, b) = \int_{-T}^{0} dz \int_{z}^{t} r(x, a(v+T), z+T)\, dv +$$

$$+ \int_{0}^{t} dz \int_{z}^{t} r(x, a(v+T), z+T)\, dv - \int_{t}^{b} dz \int_{z}^{t} r(x, a(v+T), z+T)\, dv -$$

$$- \int_{0}^{b-T} dz \int_{z}^{t} r(x, a(v+T), z+T)\, dv \equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \tag{10}$$

Зрозуміло, що $I_2 + I_3 \equiv (Pg)(x, t, a, b)$ тоді і тільки тоді, коли $g \in Q_T$.

Зробивши заміну змінних $z = b + \tau$ і $v = \tau + w$ в інтегралі I_4 і врахувавши, що $g \in Q_T$, рівність (10) остаточно запишемо у вигляді

$$(Pg)(x, t+T, a, b) = \int_{-T}^{0} d\tau \int_{\tau}^{t} \left(r(x, av, \tau) + r(x, av, b+\tau)\right) dv \; -$$

$$- \int_{-T}^{0} d\tau \int_{0}^{b} r(x, a(\tau + w), b+\tau)\, dw \; + \; (Pg)(x, t, a, b). \qquad (11)$$

З рівності (11) випливає, що $g \in H_{ab}$ і, якщо $g \in Q_T \cap H_{ab}$, то функція $u(x, t) = (Pg)(x, t, a, b)$ задовольняє крайову умову (3), тобто в цьому випадку виконується умова (9).

Теорему 3 доведено.

Об'єднуючи результати теорем 1 – 3, одержуємо умови, при яких оператор P породжує розв'язок крайової задачі (1) – (3).

Справедливе таке твердження.

Теорема 4. *Для* $g \in G_x \cap Q_{2\pi}^{-} \cap Q_T \cap H_{ab}$ *функція* $u = Pg$, *визначена формулою* (6), *є функцією із простору* C^2, *яка задовольняє крайову періодичну задачу* (1) – (3).

2. Тривіальні розв'язки однорідної крайової періодичної задачі. Для доведення єдиності існування неперервних (класичних) розв'язків крайової періодичної задачі (1) – (3), а також подальшого вивчення нелінійних крайових періодичних задач потрібно вказати простори функцій, в яких однорідна крайова періодична задача

$$u_{tt}^0 - a^2 u_{xx}^0 = 0, \qquad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \qquad (12)$$

$$u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad (13)$$

$$u^0(x, t+T) = u^0(x, t), \qquad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \qquad (14)$$

матиме лише тривіальний розв'язок.

У даній роботі проведемо дослідження однорідної крайової періодичної задачі (12) – (14) лише в просторах B_a^i, $i = 1, 2, 3$, встановлених в [2]. Умови, які визначають простори B_a^i, будемо вважати виконаними для всіх $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, а періоди T_i і простори B_a^i, $i = 1, 2, 3$, запишемо так:

1) $b_1 = T_1 q$, $aT_1 q = (2p-1)\pi$, $(2p-1, aq) = 1$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$,

$$B_a^1 = \{ g : g(x, t) = -g(-x, t) = g(\pi - x, t) = g(x, t+T_1) \};$$

2) $2b_2 = T_2(2s-1)$, $aT_2(2s-1) = 2\pi(2p-1)$, $\left(2p-1, a(2s-1)\right) = 1$, $s \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$,

$$B_a^2 = \{ g : g(x, t) = -g(-x, t) = g(x + 2\pi, t) =$$

$$= g(\pi - x, t + T_2/2) = g(x, t + T_2) \};$$

3) $2b_3 = T_3(2s-1)$, $aT_3(2s-1) = 4\pi k$, $\left(4\pi k, a(2s-1)\right) = 1$, $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$B_a^3 = \{ g : g(x, t) = -g(-x, t) = g(x + 2\pi, t) = -g(x, t + T_3/2).$$

Запис $(k, m) = 1$ означає, що числа k і m взаємно прості.

Припустимо, що $a = 1$ і період $T = 2\pi p/q$, де p і q — натуральні числа. Зазначимо, що всі три види періодів при $a = 1$ можуть бути записані в такому вигляді. В цьому випадку простір функцій, які задовольняють крайову періодичну задачу (12) – (14), нетривіальний (є навіть нескінченно вимірним простором). Як відомо [3, 4], для чисел p і q можна підібрати простір A функцій u таких, що якщо $u^0 \in A$ і задовольняє (12) – (14), то $u^0(x, t) \equiv 0$. Отже, доведення сумісності задачі (1) – (3) в просторі A функцій u забезпечує єдиність розв'язку задачі (1) – (3) в цьому просторі. Зрозуміло, що цей висновок можна зробити, коли $a \in \mathbb{Q}$, тобто є раціональним числом.

Доведемо твердження, яке забезпечує єдиність розв'язку задачі (1) – (3) для $T = T_i$ в просторах $C^{2,2} \cap B_a^i$, $i = 1, 2, 3$.

Теорема 5. *Якщо* $u^0 \in C^{2,2} \cap B_a^i$ *при* $a = 1$ *задовольняє умови* (12) – (14) *при* $T = T_i$, $i = 1, 2, 3$, *то* $u^0(x, t) \equiv 0$.

Доведення. З (12), (13) випливає

$$u^0(x, t) = s(t + x) - s(t - x) \tag{15}$$

для довільної функції $s \in C^2(\mathbb{R})$, періодичної з періодом 2π, яка задовольняє умову

$$\int_0^{2\pi} s(\alpha)\, d\alpha = 0. \tag{16}$$

Внаслідок (14) маємо $s(t + T_i) = s(T)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Оскільки $T_i = 2\pi p/q$, $(p, q) = 1$, то одержуємо, що функція s періодична навіть з періодом $2\pi/q$, тобто

$$s(t + 2\pi/q) = s(t). \tag{17}$$

Розглянемо окремо доведення теореми 5 у кожному класі B_a^i, $i = 1, 2, 3$, вказаних функцій.

1. Нехай $u^0 \in B_a^1$, $a = 1$. Тоді із $u^0 \in B_a^1$ при $a = 1$ випливає

$$u^0(\pi - x, t) = u^0(x, t)$$

або, враховуючи (15), маємо

$$s(t + \pi - x) - s(t - \pi + x) = s(t + x) - s(t - x).$$

Звідси одержуємо

$$s(t - x + \pi) + s(t - x) = s(t + x) + s(t + x - \pi). \tag{18}$$

З одного боку, оскільки функція $s(t)$ — 2π-періодична, то рівність (18) може бути записана так:

$$s(t - x - \pi) + s(t - x) = s(t + x) + s(t + x - \pi). \tag{19}$$

На основі (16) рівність (19) можлива лише при виконанні умови

$$s(t - \pi) + s(t) = 0. \tag{20}$$

З іншого боку, оскільки $q = 2l$ для деякого натурального l, то функція s на основі (17) є π-періодичною. Отже, з рівності (20) випливає, що $s \equiv 0$, а це означає, що теорему 5 для простору функцій B_a^1 при $a = 1$ доведено.

2. Нехай тепер $u^0 \in B_a^2$, $a = 1$. Тоді із $u^0 \in B_a^2$ при $a = 1$ випливає

$$u^0(\pi - x, t + T_2/2) = u^0(x, t)$$

або, враховуючи (15), маємо

$$s(t + \pi - x + T_2/2) - s(t - \pi + x + T_2/2) = s(t + x) - s(t - x).$$

Звідси одержуємо

$$s(t+\pi+T_2/2-x)+s(t-x)=s(t-\pi+T_2/2+x)+s(t+x)$$

або

$$s(t+\pi+T_2/2-x)+s(t-x)=s(t+\pi+T_2/2+x)+s(t+x). \tag{21}$$

На основі (16) рівність (21) можлива лише при виконанні умови

$$s(t+\pi+T_2/2)+s(t)=0. \tag{22}$$

Підставляючи у вираз (22) $t+k(\pi+T_2/2)$ замість t, одержуємо

$$s(t+(k+1)(\pi+T_2/2))+s(t+k(\pi+T_2/2))=0. \tag{23}$$

Помноживши рівність (23) на $(-1)^k$ і просумувавши по $k=0, 1, 2, \ldots, p-1$, знаходимо

$$\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\left(s(t+(k+1)(\pi+T_2/2))+s(t+k(\pi+T/2))\right)=0$$

або

$$\begin{gathered}(s(t+\pi+T_2/2)+s(t))-\\ -(s(t+2(\pi+T_2/2))+s(t+\pi+T_2/2))+\\ +(s(t+3(\pi+T_2/2))+s(t+2(\pi+T_2/2))-\ldots\\ \ldots+(-1)^{p-1}(s(t+p(\pi+T_2/2))+s(t+(p-1)(\pi+T_2/2)))=0,\end{gathered}$$

що рівносильно

$$(-1)^{p-1}s(t+p(\pi+T_2/2))+s(t)=0. \tag{24}$$

Оскільки $T_2=2\pi p/q$, p і q — непарні і $\pi p=(qT_2)/2$, то

$$s(t+p(\pi+T_2/2))=s(t+(p+q)T_2/2)=s(t).$$

Звідси на основі (24) отримуємо, що при $u^0\in B_a^2$, $a=1$, $s(t)\equiv 0$, а це означає, що теорему 5 для простору функцій B_a^2 при $a=1$ доведено.

3. Нехай $u^0\in B_a^3$, $a=1$. Тоді із $u^0\in B_a^3$ при $a=1$ випливає

$$u^0(x,t+T_3/2)=-u^0(x,t)$$

або, враховуючи (15), маємо

$$s(t+T_3/2+x)-s(t+T_3/2-x)=-s(t+x)+s(t-x).$$

Звідси одержуємо

$$s(t+T_3/2+x)+s(t+x)=s(t+T_3/2-x)+s(t-x). \tag{25}$$

На основі (16) рівність (25) можлива лише при виконанні умови

$$s(t+T_3/2)+s(t)=0. \tag{26}$$

Оскільки $T_3=2\pi p/q$, p — парне, q — непарне, то $T_3/2=(2\pi k)/q$, $k\in\in\mathbb{Z}$. Тепер на основі (17) і (26) маємо

$$s(t+2\pi k/q)+s(t)=2s(t)=0,$$

тобто $s(t)\equiv 0$, а це означає, що теорему 5 доведено і для простору функцій B_a^3 при $a=1$. Теорему 5 доведено.

Зауваження. Існування тривіальних розв'язків задачі (12) – (14) у загальному випадку $(a\neq 1)$ вимагає додаткових досліджень, але у випадку $a\in\mathbb{Q}$, тобто, коли a — раціональне число, простою заміною змінних $t' = at$ зводиться до випадку $a = 1$. Іншими словами, справедливе твердження.

Теорема 6. *Якщо* $u^0 \in C^{2,2} \cap B_a^i$, $a \in \mathbb{Q}$, *задовольняє* (12) – (14) *для* $T = T_i$, $i = 1, 2, 3$, *то* $u^0(x, t) \equiv 0$.

3. Точні розв'язки лінійної неоднорідної крайової періодичної задачі. Покажемо, що на основі наступних лем можна продовжити дослідження існування розв'язку задачі (1)–(3).

Лема 1. *Якщо* $g \in B_a^1 \cap C$, *то* $g \in Q_{2\pi}^- \cap C$.

Лема 2. *Якщо* $g \in B_a^3 \cap C$, *то* $g \in Q_{T_3} \cap C$.

Лема 3. *Якщо* $g \in B_a^i \cap C$, $i = 1, 2, 3$, *то рівність* (8) *при* $T = T_i$ *і* $b = b_i$, $i = 1, 2, 3$, *має вигляд*

$$\int_{-T_i}^{0} d\tau \int_{0}^{b_i} \left(g(x + aw, \tau) + g(x - aw, \tau) \right) dw = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{27}$$

Доведення. Покладаючи $T = T_i$ і $b = b_i$ в лівій частині рівності (8) і враховуючи (4), одержуємо

$$\int_{-T_i}^{0} d\tau \int_{0}^{b_i} \left(g(x + aw - ab_i, b_i + \tau) + g(x - aw + ab_i, b_i + \tau) \right) dw = 0. \tag{28}$$

1. Нехай $g \in B_a^1$. Тоді рівність (28) при $i = 1$ з урахуванням того, що $ab_1 = (2p - 1)\pi$, $b_1 = T_1 q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, буде мати вигляд

$$\int_{-T_1}^{0} d\tau \int_{0}^{b_1} \left(g(x + aw - 2\pi p + \pi, \tau) + g(x - aw + 2\pi p - \pi, \tau) \right) dw = 0.$$

Враховуючи властивості простору B_a^1 і лему 1, маємо

$$\int_{-T_1}^{0} d\tau \int_{0}^{b_1} \left(g(x + aw, \tau) + g(x - aw, \tau) \right) dw = 0. \tag{29}$$

2. Нехай $g \in B_a^2$. Беручи до уваги, що $ab_2 = (2p - 1)\pi$, $2b_2 = T_2(2s - 1)$, $p \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$, рівність (28) для $i = 2$, запишемо так:

$$\int_{-T_2}^{0} d\tau \int_{0}^{b_2} \big(g(\pi - (2\pi p - (x + w)), T_2 s + \tau - T_2/2) +$$
$$+ g(-(\pi - (2\pi p + (x - w))), T_2 s + \tau - T_2/2) \big) dw = 0.$$

Враховуючи властивості простору B_a^2, одержуємо

$$\int_{-T_2}^{0} d\tau \int_{0}^{b_2} \left(g(x + aw, \tau) + g(x - aw, \tau) \right) dw = 0. \tag{30}$$

3. Нехай $g \in B_a^3$. Тоді рівність (28) для $i = 3$ з урахуванням того, що $ab_3 = 2\pi k$, $2b_3 = T_3(2s - 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$, буде мати вигляд

$$\int_{-T_3}^{0} d\tau \int_{0}^{b_3} \big(g(x + aw - 2\pi k, T_3 s + \tau - T_3/2) +$$
$$+ g(x - aw + 2\pi k, T_3 s + \tau - T_3/2) \big) dw = 0.$$

Враховуючи властивості простору B_a^3 і лему 2, знаходимо

$$\int_{-T_3}^{0} d\tau \int_{0}^{b_3} \left(g(x+aw,\tau) + g(x-aw,\tau)\right) dw = 0. \tag{31}$$

Таким чином, на основі (29) – (31) переконуємось у справедливості рівності (27). Лему 3 доведено.

Теорема 7. *Якщо* $g \in B_a^1$, *то* $g \in H_{ab_1}$.

Доведення. Для доведення теореми 7 досить показати виконання умов (7), (8) для $b = b_1$. Оскільки $g \in B_a^1$, то на основі виникнення простору B_a^1 умова (7) завжди виконується [2]. Тепер доведемо, що для функції $g(x, t)$ із простору B_a^1 умова (8) у записі (27) завжди виконується.

Перетворюючи внутрішній інтеграл лівої частини рівності (27), при $a b_1 = (2p-1)\pi$ і $g \in Q_{2\pi}^-$ одержуємо

$$\int_0^{b_1} \left(g(x+aw,\tau) + g(x-aw,\tau)\right) dw =$$

$$= \int_0^{b_1} g(x+aw,\tau)\, dw - \int_{b_1}^{0} g(x+ay-ab_1,\tau)\, dy =$$

$$= \int_0^{b_1} g(x+aw,\tau)\, dw + \int_0^{b_1} g(x+aw-\pi,\tau)\, dw =$$

$$= \int_0^{b_1} \left(g(x+aw,\tau) - g(\pi-(x+aw),\tau)\right) dw = 0,$$

а це означає виконання умови (27), тобто нами доведено, що $g \in H_{ab_1}$. Теорему 7 доведено.

Позначимо через $L(X, Y)$ простір лінійних і обмежених відображень X в Y. На основі формули (6) введемо конкретні оператори:

$$(P_i^a g)(x,t,a,b_i) = \int_0^t d\tau \int_\tau^t r(x,ay,\tau)\, dy - \int_t^{b_i} d\tau \int_\tau^t r(x,ay,\tau)\, dy \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} g(\xi,\tau)\, d\xi - \frac{1}{4a} \int_t^{b_i} d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} g(\xi,\tau)\, d\xi \tag{33}$$

або

$$(P_i^a g)(x,t,a,b_i) = \int_0^{b_i} Q(\tau)\, d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} g(\xi,\tau)\, d\xi, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{34}$$

де $Q(\tau) = 1/4a$, якщо $0 \le \tau \le t$, $Q(\tau) = -1/4a$, якщо $t < \tau \le b_i$, які мають такі властивості.

Теорема 8. *Нехай* $g \in G_x \cap B_a^1$. *Тоді* $P_1^a \in L(C \cap B_a^1, C^{1,1} \cap B_a^1)$, $P_1^a \in L(G_x \cap B_a^1, C^{2,2} \cap B_a^1)$.

Доведення теореми 8 проводиться на основі зображень (33) і (34) при $i = 1$.

Теорема 9. *Нехай* $g \in G_x \cap B_a^i$ *і* $a \in \mathbb{Q}$, *функція* $u(x, t) =$

$= (P_i^a g)(x, t, a, b_i)$, $i = 1, 2, 3$, *є єдиною функцією з простору* $C^{2,2}$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі* (1) – (3) *при* $i = 1$ *і* (1), (2) *при* $i = 2, 3$, *причому*

$$\|u(x,t)\|_C \le \frac{b_i^2}{4}\|g(x,t)\|_C, \tag{35}$$

$$\begin{gathered} \|u_t(x,t)\|_C \le \frac{b_i}{2}\|g(x,t)\|_C, \\ \|u_x(x,t)\|_C \le \frac{b_i}{2|a|}\|g(x,t)\|_C, \end{gathered} \tag{36}$$

де $\|g(x,t)\|_C = \sup\{|g(x,t)|;\ (x,t)\in \mathbb{R}^2\}$.

Доведення. Те, що $u(x,t) = (P_i^a g)(x, t, a, b_i)$, $i = 1, 2, 3$, є розв'язком задачі (1) – (3) при $i = 1$ і (1), (2) при $i = 2, 3$, доведено нами в п. 1. Залишається показати правильність оцінок (35) і (36). Вони одержуються на основі запису розв'язку $u = Pg$ у вигляді (34) і відповідних оцінок похідних

$$\|u_t(x,t)\| = |(P_i^a g)_t(x,t,a,b_i)| \le$$

$$\le \left| a\int_0^{b_i} |Q(\tau)||g(x + a(t-\tau),\tau) + g(x - a(t-\tau),\tau)|\,d\tau \right|,$$

$$\|u_x(x,t)\| = |(P_i^a g)_x(x,t,a,b_i)| \le$$

$$\le \left| \int_0^{b_i} |Q(\tau)||g(x + a(t-\tau),\tau) + g(x - a(t-\tau),\tau)|\,d\tau \right|.$$

Теорему 9 доведено.

На закінчення відмітимо, що можна виділити клас функцій, для яких функція $u = P_i^a g$, $i = 2, 3$, є розв'язком задачі (1) – (3). Справедливе твердження.

Теорема 10. *Якщо функція* $g \in B_a^i$, $i = 2, 3$, *розкладається в рівномірно збіжний ряд Фур'є вигляду*

$$g(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)\sin kx$$

для всіх $t \in [0, T_i]$, $i = 2, 3$, *то* $g \in H_{ab_i}$, $i = 2, 3$.

Доведення теореми 10 проводиться безпосереднім обчисленням внутрішнього інтегралу рівності (27) і показується, що він дорівнює нулеві, а це означає, що виконуються умова (8) ((27)), яка визначає простір функцій H_{ab_i}, $i = 2, 3$.

Зауваження. Для функцій $g \in B_a^i$, $i = 1, 2, 3$, завжди виконується умова (7), тобто одна із умов, що визначає простір функцій H_{ab}, причому функції простору B_a^1 задовольняють обидві умови (7) і (8). Такого висновку для функцій $g \in B_a^i$, $i = 2, 3$, взагалі кажучи, зробити не можна. Це питання потребує подальшого дослідження.

1. *Хома Л. Г., Хома Н. Г.* Про властивості розв'язків однієї крайової задачі // Допов. НАН України. – 1994. – № 3. – С. 38 – 40.
2. *Хома Н. Г.* Простори розв'язків однієї крайової задачі // Там же. – 1996. – № 1. – С. 30 – 32.
3. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 212 с.
4. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения. Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1733 – 1739.

Одержано 07.10.97