УДК 519. 41/47

Н. С. Черников (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Д. Я. Требенко (Нац. пед. ун-т, Киев)

ФАКТОР-ГРУППЫ ЛОКАЛЬНО СТУПЕНЧАТЫХ ГРУПП И ГРУПП НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КУРОША – ЧЕРНИКОВА*

A number of results of an inclusion $G/N \in \mathfrak{X}$ are established for a group $G \in \mathfrak{X}$ under some restrictions on $N \trianglelefteq G$, where $\mathfrak{X}$ — is one of the following classes: a class of locally graded groups, a class of RI-groups, and a class $\hat{P}\mathfrak{Y}$ for a fixed group variety of $\mathfrak{Y} \supseteq \mathfrak{A}$.

Встановлено ряд результатів, що стверджують істинність включення $G/N \in \mathfrak{X}$ для груп $G \in \mathfrak{X}$ при певних обмеженнях на $N \trianglelefteq G$, де $\mathfrak{X}$ — один з наступних класів: локально ступінчатих груп; RI-груп; $\hat{P}\mathfrak{Y}$ для фіксованого многовиду $\mathfrak{Y} \supseteq \mathfrak{A}$ груп.

Напомним, что локально ступенчатой называется группа, у которой каждая отличная от единицы конечнопорожденная подгруппа имеет подгруппу отличного от единицы конечного индекса (см., например [1]). Под нормальными и инвариантными системами и, в частности, рядами группы понимаем то же, что в [2] или [1].

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы 1 – 6.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — один из следующих классов групп: локально ступенчатых, RN-, RI-групп; $G \in \mathfrak{X}$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда $G/N \in \mathfrak{X}$ в каждом из случаев:*

1) N имеет возрастающий инвариантный ряд с абелевыми факторами и нормальными в G членами; 2) N является ZA-группой (или, что тоже, гиперцентральной группой); 3) N почти разрешима (в частности, разрешима).

Напомним, что FC-центр группы — подгруппа, образуемая всеми ее элементами, каждый из которых имеет конечное число сопряженных в ней; FC-гиперцентр группы определяется с помощью понятия FC-центра так же, как гиперцентр группы с помощью понятия центра (см., например, [3]).

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное многообразие групп, включающее в себя многообразие всех абелевых групп; G — группа, обладающая нормальной системой с $\mathfrak{X}$-факторами, и $N \trianglelefteq G$. Тогда G/N имеет нормальную систему с $\mathfrak{X}$-факторами, если N имеет возрастающий инвариантный ряд с почти абелевыми факторами и нормальными в G членами (в частности, если N содержится в FC-гиперцентре группы G).*

Из теоремы 2 непосредственно вытекают следующие два предложения.

Следствие 1. *Пусть G — RN-группа, $N \trianglelefteq G$ и N имеет возрастающий инвариантный ряд с почти абелевыми факторами и нормальными в G членами. Тогда фактор-группа G/N является RN-группой.*

Следствие 2. *Пусть G — RN-группа, $N \trianglelefteq G$ и N принадлежит к FC-гиперцентру группы G. Тогда фактор-группа G/N является RN-группой.*

Теорема 3. *Пусть G — RI-группа, $N \trianglelefteq G$. Тогда G/N является RI-группой, если N имеет такой же, как в теореме 2, ряд.*

Теорема 4. *Пусть m — произвольное натуральное число и $\mathfrak{Z}$ — класс всех групп, у которых коммутант имеет конечную экспоненту $\leq m$; G — локально*

* Работа первого автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96–01–00488).

ступенчатая группа, $N \trianglelefteq G$ и N обладает возрастающим инвариантным рядом с $\mathfrak{Z}$-факторами и нормальными в G членами. Тогда фактор-группа G/N является локально ступенчатой.

***Замечание* 1.** Согласно теореме 4 класс локально ступенчатых групп замкнут относительно взятия фактор-групп по нормальным делителям конечной экспоненты.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное многообразие групп и $\mathfrak{Z}$ — класс всех групп конечной экспоненты; G — группа, имеющая нормальную систему с $\mathfrak{X}$-факторами, $N \trianglelefteq G$ и N имеет возрастающий инвариантный ряд $\mathcal{N}$ с $\mathfrak{Z}$-факторами и нормальными в G членами. Пусть подгруппа N является локально ступечатой или все группы из класса $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Z}$ являются такими. Тогда фактор-группа G/N обладает нормальной системой с $\mathfrak{X}$-факторами.*

***Замечание* 2.** Согласно теореме 5 для произвольного многообразия $\mathfrak{X}$ групп класс всех групп, имеющих нормальную систему с $\mathfrak{X}$-факторами, замкнут относительно взятия фактор-групп по локально ступенчатым нормальным делителям конечной экспоненты.

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное многообразие групп, вклчающее в себя многообразие всех абелевых групп, и $\mathfrak{Z}$ — класс всех групп, у которых коммутант имеет конечную экспоненту; G — группа, обладающая нормальной системой с $\mathfrak{X}$-факторами, $N \trianglelefteq G$ и N имеет возрастающий инвариантный ряд с $\mathfrak{Z}$-фактоами и нормальными в G членами. Пусть подгруппа N является локально ступенчатой или все группы конечной экспоненты из $\mathfrak{X}$ являются такими. Тогда фактор-группа G/N имеет систему с $\mathfrak{X}$-факторами.*

Из теоремы 6 непосредственно вытекает следующее предложение.

***Следствие* 3.** *Пусть $\mathfrak{Z}$ — класс всех групп, у которых коммутант имеет конечную экспоненту; G — RN-группа, $N \trianglelefteq G$ и N имеет возрастающий инвариантный ряд с $\mathfrak{Z}$-факторами и нормальными в G членами. Тогда G является RN-группой.*

***Замечание* 3.** В доказательствах теорем 4 – 6 существенно используется теорема Е. И. Зельманова [4, 5] об ограниченности порядков конечных групп с произвольными фиксированными экспонентой и числом порождающих (положительно решающая ослабленную проблему Бернсайда).

Доказательствам теорем 1 – 6 предпошлем ряд предложений.

Пусть G — произвольная группа и, как обычно, $\mathfrak{S}$ класс всех разрешимых групп. Через $J(G)$, как в [6, 7], будем обозначать пересечение всех подгрупп конечного индекса группы G. Ввиду теоремы Пуанкаре $J(G)$ совпадает с пересечением всех инвариантных подгрупп конечного индекса группы G. Через $J_{\mathfrak{S}}(G)$ будем обозначать пересечение всех $N \trianglelefteq G$, для которых G/N конечна и разрешима.

Предложение 1. *Пусть G — группа, $A \trianglelefteq G$ и A абелева, фактор-группа G/A конечнопорождена и $(G/A)' = G/A$. Пусть b_i, $i = 1, \ldots, n$ — элементы группы G такие, что для $B = \langle b_i \mid i = 1, \ldots, n \rangle$ $G = AB$, и $b_i = a_i b_i^*$ — представление элемента b_i в виде произведения элемента из $A \cap B$ на элемент из B', $i = 1, \ldots, n$. Тогда*

$$B' = B'' = J_{\mathfrak{S}}(G) = \left\langle b_i^*, \left[a_j, b_i^*\right] \middle| i, j = 1, \ldots, n \right\rangle, \quad G = J_{\mathfrak{S}}(B)A,$$

и любая, содержащая $J_{\mathfrak{S}}(G)$ подгруппа группы B, конечнопорождена.

Доказательство. Действительно, пусть

$$H = \left\langle b_i^* \middle| i = 1, \ldots, n \right\rangle, \quad K = \langle a_i \mid i = 1, \ldots, n \rangle, \quad L = \left\langle \left[a_j, b_i^*\right] \middle| i, j = 1, \ldots, n \right\rangle$$

и $R = \langle L, H \rangle$. Тогда $\langle\langle L^K \rangle^H \rangle \trianglelefteq \langle K, H \rangle$ и $\langle K, H \rangle = K \langle\langle L^K \rangle^H \rangle H$ (см., например, [8], лемма 3.2.2), $B = \langle K, H \rangle$, $R \subseteq B'$ и $\langle L^K \rangle = L$. Следовательно, $\langle\langle L^K \rangle^H \rangle H = \langle L^H \rangle H = \langle L, H \rangle = R$ и $B = KR$. Поэтому $B / R \cong K / K \cap R$, значит, B / R абелева, т. е. $B' \subseteq R$. Таким образом, $B' = R$.

Возьмем любую $N \trianglelefteq B$ с разрешимой фактор-группой B / N. Тогда, как легко видеть, $G = AN$. Поэтому $B = (A \cap B)N$ в силу леммы С. Н. Черникова (см., например, [7], лемма 1.8). Тогда вследствие абелевости пересечения $A \cap B$ $B' \subseteq N$. Ввиду произвольности N $B'' = B' = J_{\mathfrak{S}}(B)$. Поскольку фактор-группа B / B' конечнопорожденная абелева, то $J_{\mathfrak{S}}(B / B') = 1$. Следовательно, $B' = J_{\mathfrak{S}}(B)$. Поэтому $G = J_{\mathfrak{S}}(B)A$.

Пусть M — произвольная подгруппа такая, что $J_{\mathfrak{S}}(B) \subseteq M$. Тогда $M / J_{\mathfrak{S}}(B)$ конечнопорождена, будучи подгруппой конечнопорожденной абелевой группы. Поэтому, с учетом конечной порожденности подгруппы $J_{\mathfrak{S}}(B)$, подгруппа M конечнопорождена. Предложение доказано.

***Следствие* 4.** *Если при условия предложения* 1 B *является* RN*-группой, то* $G = A$.

Доказательство. Действительно, подгруппа B' конечнопорождена и $(B')' = B'$, а произвольная конечнопорожденная RN-группа совпадает со своим коммутантом тогда и только тогда, когда она равна единице. Таким образом, $B' = 1$. Следовательно, $G = A$, так как $G = AB$ и $(G / A)' = G / A$.

Предложение 2. *Пусть* G *— группа,* $A \trianglelefteq G$ *и* A *абелева, фактор-группа* G / A *конечнопорождена и не имеет истинных подгрупп конечного индекса. Тогда* $(G / A)' = G / A$, *справедливы все заключения предложения* 1 *и для подгруппы* B *из предложения* 1 $J(B) = J_{\mathfrak{S}}(B)$.

Доказательство. Действительно, $(G / A)' = G / A$, так как иначе конечнопорожденная абелева группа $(G / A) / (G / A)'$ имела бы истинную подгруппу конечного индекса, а, значит, такую подгруппу имела бы и группа G / A. Поэтому справедливы все заключения предложения 1.

Пусть $M \subseteq B$ и $|B : M| < \infty$. Тогда согласно теореме Пуанкаре найдется $N \trianglelefteq B$ такая, что $N \subseteq M$ и $|B : N| < \infty$. Очевидно, $AN = G$ и, значит, $B = (A \cap B)N$, а потому $B' \subseteq N$ $(\subseteq M)$. Следовательно, ввиду произвольности M $J(B) = J_{\mathfrak{S}}(B)$.

***Следствие* 5.** *Если при условиях предложения* 2 B *является локально ступенчатой группой, то* $G = A$.

Доказательство. Действительно, пусть $N \trianglelefteq B'$ и $|B' : N| < \infty$. Поскольку $G = B'A$ и G / A не имеет истинных подгрупп конечного индекса, то $G = NA$. Поэтому $B' = (A \cap B')N$ и, значит, B' / N абелева. Однако $B' = B''$. Таким образом, $N = B'$. Поскольку подгруппа B' конечнопорожденая локально ступенчатая и не имеет истинных подгрупп конечного индекса, то она равна единице. Отсюда вытекает справедливость настоящего следствия.

Для произвольных группы G и класса $\mathfrak{X}$ групп через $G^{\mathfrak{X}}$ будем обозначать пересечение всех $N \trianglelefteq G$, для которых $G / N \in \mathfrak{X}$. Очевидно, если $\mathfrak{X}$ — многообразие групп, то $G / G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$.

Для произвольного класса $\mathfrak{X}$ групп через $\hat{\boldsymbol{P}}\mathfrak{X}$ принято обозначать класс всех групп, имеющих нормальную систему с $\mathfrak{X}$-факторами (см., например, [3]).

Предложение 3. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— произвольное многообразие групп;* G —

группа, имеющая нормальную систему с $\mathfrak{X}$-факторами, $N \trianglelefteq G$ и N имеет возрастающий инвариантный ряд $\mathcal{N}$ с нормальными в G членами такой, что для $\mathcal{M} = \mathcal{N} \setminus \{N\} N = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$ и при каждом $M \in \mathcal{M}$ $G/M \in \hat{\boldsymbol{P}}\mathfrak{X}$. Тогда $G/N \in \hat{\boldsymbol{P}}\mathfrak{X}$.

Доказательство. Действительно, согласно [9, 10], класс $\hat{\boldsymbol{P}}\mathfrak{X}$ совпадает с классом всех групп, у которых каждая отличная от единицы конечнопорожденная подгруппа обладает отличной от единицы $\mathfrak{X}$-фактор-группой. Пусть H — произвольная конечнопорожденная подгруппа группы G, для которой $HN \neq N$, и T — произвольная ее конечная система порождающих. Для произвольной подгруппы $M \in \mathcal{M}$ $(HM/M)^{\mathfrak{X}} \neq HM/M$ и потому $H \neq H^{\mathfrak{X}}(H \cap M)$, а значит, $T \not\subseteq H^{\mathfrak{X}}(H \cap M)$. Следовательно, ввиду конечности T

$$T \not\subseteq \bigcup_{M \in \mathcal{M}} H^{\mathfrak{X}}(H \cap M) = H^{\mathfrak{X}}(H \cap N).$$

Поэтому $H \neq H^{\mathfrak{X}}(H \cap N)$ и, значит, $(HN/N)^{\mathfrak{X}} \neq HN/N$. Предложение доказано.

Напомним, что для произвольных классов $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ групп и $n \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ — класс всех гтупп G, обладающих подгруппой $N \trianglelefteq G$, $N \in \mathfrak{X}$, такой, что $G/N \in \mathfrak{Y}$; $\mathfrak{X}^0 = 1$ и по индукции $\mathfrak{X}^n = (\mathfrak{X}^{n-1})\mathfrak{X}$.

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{X}_i$, $i = 1, \ldots, n$, — произвольные многообразия локально ступенчатых групп и $\mathfrak{X} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{Y} = \bigcup_{n \in N} \mathfrak{X}^n$; G — локально ступенчатая группа, $N \trianglelefteq G$ и N имеет возрастающий инвариантный ряд $\mathcal{N}$ с нормальными в G членами таким, что для $\mathcal{M} = \mathcal{N} \setminus \{N\} N = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$ и каждая фактор-группа G/M, $M \in \mathcal{M}$ является локально ступенчатой. Тогда, если все конечные гомоморфные образы произвольной подгруппы группы N принадлежат к $\mathfrak{Y}$ (в частности, если каждый фактор ряда $\mathcal{N}$ принадлежит к $\mathfrak{X}$), то фактор-группа G/N является локально ступенчатой группой.*

Доказательство. Действительно, пусть настоящее предложение неверно. Тогда в G найдется конечное множество элементов $T \not\subseteq N$ такое, что подгруппа $\langle T \rangle N/N$ фактор-группы G/N не имеет истинных нормальных делителей конечного индекса.

Возьмем любую собственную подгруппу $K \triangleleft \langle T \rangle$ с $|\langle T \rangle : K| < \infty$. Тогда, очевидно, $\langle T \rangle / K$ изоморфна секции подгруппы N и, значит, $\langle T \rangle / K \in \mathfrak{Y}$. Поэтому $\langle T \rangle^{\mathfrak{X}} \neq \langle T \rangle$.

Зафиксируем подгруппу $M \in \mathcal{M}$. Поскольку фактор-группа G/M локально ступенчатая, то найдется подгруппа $K \triangleleft \langle T \rangle$ с $|\langle T \rangle : K| < \infty$, для которой $\langle T \rangle M/M \neq KM/M$. Тогда $\langle T \rangle \neq K(\langle T \rangle \cap M)$. Так как фактор-группа $\langle T \rangle / K(\langle T \rangle \cap M)$ конечна и отлична от единицы, то $(\langle T \rangle / K(\langle T \rangle \cap M))^{\mathfrak{X}} \neq$ $\neq \langle T \rangle / K(\langle T \rangle \cap M)$. Но, очевидно, что

$$(\langle T \rangle / K(\langle T \rangle \cap M))^{\mathfrak{X}} = \langle T \rangle^{\mathfrak{X}} K(\langle T \rangle \cap M) / K(\langle T \rangle \cap M).$$

Следовательно, $\langle T \rangle \neq \langle T \rangle^{\mathfrak{X}} (\langle T \rangle \cap M)$ и, значит, $\langle T \rangle \neq \langle T \rangle^{\mathfrak{X}_i}(\langle T \rangle \cap M)$ для некоторого $i \leq n$. Тогда, учитывая конечность T, нетрудно убедиться в том, что при некотором $k \leq n$

$$T \not\subseteq T^{\mathfrak{X}_k}\left(\langle T\rangle \cap \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M\right) = \langle T\rangle^{\mathfrak{X}_k}(\langle T\rangle \cap N).$$

Следовательно, $\langle T\rangle \neq \langle T\rangle^{\mathfrak{X}_k}(\langle T\rangle \cap N)$.

Поскольку $\mathfrak{X}_k$ является многообразием локально ступенчатых групп, то отличная от единицы конечнопорожденная группа $\langle T\rangle / \langle T\rangle^{\mathfrak{X}_k}(\langle T\rangle \cap N)$ имеет некоторую истинную подгруппу $L / T^{\mathfrak{X}_k}(\langle T\rangle \cap N)$ конечного индекса. Тогда, очевидно, LN/N истинная подгруппа конечного индекса группы $\langle T\rangle N/N$. Противоречие. Предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть* $\mathfrak{X}_i$, $i = 1, \ldots, n$, — *произвольные многообразия локально ступенчатых групп и* $\mathfrak{X} = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{Y} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}^n$; $\mathfrak{Z}$ — *произвольный класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, для которого выполняются следующие условия:*

1) *фактор-группа произвольной локально ступенчатой группы по любой ее инвариантной* $\mathfrak{Z}$*-подгруппе является локально ступенчатой группой;*

2) *все конечные гомоморфные образы произвольной* $\mathfrak{Z}$*-группы принадлежат к* $\mathfrak{Y}$.

Пусть G — *локально ступенчатая группа и* $N \trianglelefteq G$. *Тогда фактор-группа* G/N *является локально ступенчатой, если* N *имеет возрастающий инвариантный ряд* $\mathcal{N}$ *с* $\mathfrak{Z}$*-факторами и инвариантными в* G *членами.*

Доказательство настоящего предложения очевидно сводится к случаю, когда для любой $M \in \mathcal{N}\setminus\{N\} = \mathcal{M}$ фактор-группа G/M является локально ступенчатой. Если $N = \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M$, то фактор-группа G/N локально ступенчатая вследствие предложения 4. Если же $N \neq \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M$, то для $L = \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M$ $N/L \in \mathfrak{Z}$ и G/L — локально ступенчатая группа. Поэтому $G/N(\cong(G/L)/(N/L))$ является локально ступенчатой. Предложение доказано.

Предложение 6. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Z}$ — *произвольные многообразие групп и класс групп, для которых выполняется следующее условие: фактор-группа произвольной группы из класса* $\hat{\boldsymbol{P}}\mathfrak{X}$ *по любой ее инвариантной* $\mathfrak{Z}$*-подгруппе принадлежит к* $\hat{\boldsymbol{P}}\mathfrak{X}$. *Пусть* $G \in \hat{\boldsymbol{P}}\mathfrak{X}$, $N \trianglelefteq G$ *и* N *имеет возрастающий инвариантный ряд с* $\mathfrak{Z}$*-факторами и нормальными в* G *членами. Тогда* $G/N \in \hat{\boldsymbol{P}}\mathfrak{X}$.

Доказательство настоящего предложения повторяет доказательство предложения 5 с заменой в последнем ссылки на предложение 4 ссылкой на предложение 3.

Предложение 7. *Пусть* G — *RI-группа* $N \trianglelefteq G$ *и* N *имеет возрастающий инвариантный ряд с нормальными в* G *членами такой, что для* $\mathcal{M} = \mathcal{N}\setminus\{N\}$, $N = \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M$, *и при каждом* $M \in \mathcal{M}$ *фактор-группа* G/M *является RI-группой. Тогда фактор-группа* G/N *является RI-группой.*

Доказательство. Можно считать, что $G \neq N$. Возьмем произвольное конечное множество T элементов группы G, не лежащее в N, и конечнопорожденную подгруппу K группы G, содержащую T. Пусть $H = \langle T\rangle$. Зафиксируем подгруппу $M \in \mathcal{M}$. При естетсвенном гомоморфизме группы G на фактор-группу G/M образ в ней произвольного непустого множества элементов $X \subseteq G$ будем обозначать через $\overline{X}$. Поскольку $\overline{K}$ — RI-группа и $|\overline{T}| < \infty$, $\overline{H} \neq 1$, то $\overline{T} \not\subseteq \langle [\overline{H}, \overline{H}]^{\overline{K}} \rangle$. Следовательно, $T \not\subseteq \langle [H, H]^K \rangle M$ и, поскольку $|T| < \infty$ и $N = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$, то $T \not\subseteq \langle [H, H]^K \rangle N$. Тогда $\overline{H} \not\subseteq$ $\not\subseteq \langle [\overline{H}, \overline{H}]^{\overline{K}} \rangle$. Поэтому, с учетом произвольности T и K, вследствие [9, 10] G является RI-группой. Предложение доказано.

Предложение 8. *Пусть $\mathfrak{Z}$ — класс групп, для которого выполняется условие: фактор-группа произвольной RI-группы по любой ее инвариантной $\mathfrak{Z}$-подгруппе является RI-группой. Пусть G — RI-группа, $N \trianglelefteq G$ и N имеет возрастающий инвариантный ряд с $\mathfrak{Z}$-факторами и нормальными в G членами. Тогда G/N является RI-группой.*

Доказательство настоящего предложения повторяет доказательство предложения 5 с заменой в последнем ссылки на предложение 4 ссылкой на предложение 7.

Лемма. *Пусть G — группа, $\mathcal{M}$ — некоторая упорядоченная по включению система ее подгрупп, замкнутая относительно объединений и пересечений; $N \trianglelefteq G$ и N удовлетворяет условию минимальности для подгрупп вида $M \cap N$ с $M \in \mathcal{M}$. Тогда система $\{MN / M \in \mathcal{M}\}$ замкнута относительно объединений и пересечений.*

Доказательство. Действительно, пусть $\mathcal{K}$ — произвольная непустая подсистема системы $\mathcal{M}$. Тогда, очевидно, $\bigcup_{M \in \mathcal{K}} MN = \left(\bigcup_{M \in \mathcal{K}} M\right)N$. Далее, так как N удовлетворяет условию минимальности для подгрупп вида $M \cap N$ с $M \in \mathcal{M}$, то найдется $L \in \mathcal{K}$ такая, что $\bigcup_{M \in \mathcal{K}} M \cap N = L \cap N$. Поэтому очевидно $\bigcup_{M \in \mathcal{K}} MN = \left(\bigcup_{M \in \mathcal{K}} M\right)N$.

Напомним, что RK-группой называется группа, убывающая цепь коммутантов которой, продолжаемая, быть может, трансфинитно, доходит до единичной подгруппы (А. Г. Курош, С. Н. Черников — см., например, [2]). Очевидно RK-группа — это, в точности, группа, которая имеет убывающий инвариантный ряд с абелевыми факторами.

Напомним, что RJ-группой (или, что то же, SJ-группой) называется группа, обладающая нормальной системой с абелевыми факторами, все члены которой субнормальны (или, что то же, достижимы) в ней, а RJ^*-группой (или, что то же, SJ^*-группой) — группа, имеющая такой возрастающий нормальный ряд (Кулатилака, см., например, [3, 2]).

Из леммы вытекают, например, такие предложения.

Следствие 6. *Пусть G — RN-группа и $N \trianglelefteq G$. Тогда G/N является RN-группой, если подгруппа N удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, входящих в ее нормальные системы (в частности, — условию минимальности для всех подгрупп).*

Следствие 7. *Пусть G — RJ-группа, $N \trianglelefteq G$ и N удовлетворяет условию минимальности для субнормальных подгрупп. Тогда G/N является RJ-группой.*

Следствие 8. *Пусть $\mathfrak{X}$ — один из следующих классов групп: RI-, RK-, и Z-, ZD-групп; $G \in \mathfrak{X}$, $N \trianglelefteq G$ и N удовлетворяет условию минимальности для инвариантных в G подгрупп. Тогда $G/N \in \mathfrak{X}$.*

Замечание 4. Пусть $\mathfrak{X}$ — один из следующих классов групп: RN^*-, $\overline{RN}$-, RI^*-, $\overline{RI}$-, ZA-, $\overline{Z}$-, $\tilde{N}$-, N-групп, или $\mathfrak{X}$ — класс RI^*-групп. В связи со следствиями 6 – 8 напомним, что если $G \in \mathfrak{X}$, то для произвольного нормального делителя N группы G $G/N \in \mathfrak{X}$.

***Замечание* 5.** В связи со следствиями 6 и 7 отметим, что вследствие [11] подгруппа N в них является черниковской.

Из леммы вытекает следующее предложение.

***Следствие* 9.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное многообразие групп, $G \in \hat{\boldsymbol{P}}\mathfrak{X}$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда $G/N \in \hat{\boldsymbol{P}}\mathfrak{X}$, если N удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, входящих в ее нормальные системы (в частности, — условию минимальности для всех подгрупп).*

***Доказательство теоремы* 2.** Заметим прежде всего, что соответствующий ряд подгруппы N, может быть уплотнен до такого же ее ряда $\mathcal{N}$, произвольный фактор которого абелев или конечен.

Пусть теорема неверна. Можно считать, что G — контрпример к ней с минимальной длиной ряда $\mathcal{N}$. Тогда: для $\mathcal{M} = \mathcal{N}\setminus\{N\}$ при любой $M \in \mathcal{M}$ $G/M \in \hat{\boldsymbol{P}}\mathfrak{X}$; вследствие предложения 3 $\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M \neq N$; ввиду следствия 9 фактор-группа $N/\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M$ бесконечна, а вместе с тем абелева. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M = 1$. Тогда подгруппа N абелева.

Поскольку $G/N \notin \hat{\boldsymbol{P}}\mathfrak{X}$, то, согласно [9, 10], в G/N найдется отличная от единицы конечнопорожденная подгруппа H/N такая, что

$$(H/N)^{\mathfrak{X}} = H/N. \tag{1}$$

Поскольку $\mathfrak{X}$ включает в себя все абелевы группы, то с учетом (1)

$$(H/N)' = H/N. \tag{2}$$

Пусть K — произвольная конечнопорожденная подгруппа группы H такая, что $H = KN$. С учетом (1), очевидно, что $H = K^{\mathfrak{X}}N = (K^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{X}}N$. Тогда $K = K^{\mathfrak{X}}(K \cap N)$. Поэтому в силу абелевости подгруппы $K \cap N$ $K' \subseteq K^{\mathfrak{X}}$. Однако $K/K' \in \in \mathfrak{X}$, значит, $K^{\mathfrak{X}} = K'$. Далее, с учетом (2), вследствие предложения 1 коммутант K' подгруппы K конечнопорожден и $(K')' = K'$. Тогда, поскольку подгруппа K конечнопорождена и $H = (K^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{X}}N$, то $(K^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{X}} = (K^{\mathfrak{X}})'$ и, значит, $(K^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{X}} = (K')' = K'$.

Итак, для конечнопорожденной подгруппы $K^{\mathfrak{X}}$ $(K^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{X}} = K^{\mathfrak{X}}$. Поскольку $G \in \hat{\boldsymbol{P}}\mathfrak{X}$, то отсюда вытекает, что $K^{\mathfrak{X}} = 1$, т. е. $K \in \mathfrak{X}$. Однако в таком случае $H/N \in \mathfrak{X}$. Противоречие. Теорема доказана.

***Доказательство теоремы* 3** ввиду предложения 8 и следствия 8 сводится к случаю, когда N абелева. Пусть $\mathcal{M}$ — инвариантная система с абелевыми факторами группы G и $\mathcal{N}$ — система группы G, образуемая всеми подгруппами вида MN с $M \in \mathcal{M}$ и их пересечениями и объединениеми, K и $H \subset K$ — подгруппы, образующие скачок в $\mathcal{N}$. Тогда, очевидно, либо для некоторых подгрупп M_1 и $M_2 \subset M_1$, образующих скачок в $\mathcal{M}$ $K = M_1N$ и $H = M_2N$, либо для некоторой $M^* \in \mathcal{M}$ $H = M^*N$ и K совпадает с пересечением подгрупп MN по всем $M \in \mathcal{M}$, строго содержащим M^*, а M^* совпадает с пересечением всех таких M.

В первом случае $K/H \cong M_1/M_2(M_1 \cap N)$, значит, K/H абелева.

Во втором случае, очевидно, для любой $M \in \mathcal{M}$, строго содержащей M^*,

$K = (M \cap K)N$ и, значит, $K / M \cap K \cong N / M \cap K \cap N$ т. е. $K / M \cap K$ абелева. Но тогда и $K / H = K / M^* N$ абелева.

Итак, произвольный фактор системы $\mathfrak{N}$ абелев. Поэтому $\{R / N \mid R \in \mathfrak{N}\}$ — инвариантная система с абелевыми факторами группы G / N. Теорема доказана.

Ниже, как обычно, через $\mathfrak{A}$ обозначается класс всех абелевых групп.

***Доказательство теоремы* 1** ввиду теорем 2 и 3 и замкнутости класса локально ступенчатых групп относительно взятия фактор-групп по конечным нормальным делителям (см., например, [7], лемма 1.40) сводится к случаю 1 в ситуации, когда $\mathfrak{X}$ — класс локально ступенчатых групп. Полагая в предложении 5 $n = 1$, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Z} = \mathfrak{A}$ и используя его и следствие 5, легко убеждаемся в справедливости теоремы в этом случае.

Следующее предложение по существу есть следствие из отмеченной выше теоремы Зельманова.

Предложение 9. 1. *Локально ступенчатая группа* G *конечной экспоненты локально конечна.* 2. *RN-группа* G *конечной экспоненты локально конечна и локально разрешима.*

Доказательство. Утверждение 2 является следствием утверждения 1, поскольку класс RN-групп содержится в классе локально ступенчатых групп, а класс локально конечных RN-групп совпадает с классом локально конечных локально разрешимых групп. Пусть группа G локально ступенчатая; H — какая-нибудь ее конечнопорожденная подгруппа, $N \trianglelefteq H$ и $|H : N| < \infty$. Тогда $|H : N|$ в силу теоремы Зельманова не превосходит некоторой натуральной константы, зависящей только от экспоненты G и числа порождающих H. Поэтому ввиду произвольности H $|H : J(H)| < \infty$. Тогда группа $J(H)$ не имеет истинных подгрупп конечного индекса и вследствие теоремы Шрейера конечнопорождена. Следовательно, $J(H) = 1$ и $|H| < \infty$.

***Доказательство теоремы* 4.** Рассмотрим сначала случай, когда N имеет конечную экспоненту $\leq m$. Пусть в этом случае теорема неверна. Тогда найдется конечнопорожденная подгруппа $H \not\subseteq N$ группы G такая, что подгруппа HN / N группы G / N не имеет истинных подгрупп конечного индекса. Пусть $K \trianglelefteq H$ и $|H : N| < \infty$. Тогда очевидно

$$H = (N \cap H)K, \tag{3}$$

в силу чего H / K изоморфна секции подгруппы $N \cap H$. Следовательно, H / K имеет конечную экспоненту $\leq m$. Тогда ввиду произвольности выбора K $H / J(H)$ имеет конечную экспоненту $\leq m$ и, значит, конечна вследствие теоремы Зельманова. Поэтому H конечна. Тогда, полагая в (3) $K = 1$, получаем $H = N \cap H$. Противоречие.

Итак, в рассматриваемом случае теорема справедлива.

Вследствие доказанного и теоремы 1 класс $\mathfrak{Z}$ из настоящей теоремы удовлетворяет условию 1 из формулировки предложения 5. Пусть в предложении 5 $n = 2$ и $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{X}_2$ — класс всех групп конечной экспоненты $\leq m$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{Z}$ удовлетворяет условию 2 из формулировки предложения 5. Поэтому настоящая теорема справедлива ввиду предложения 5.

***Доказательство теоремы* 5.** Заметим, что если $N \in \mathfrak{Z}$ и все группы из класса $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Z}$ локально ступенчатые, то N является локально ступенчатой. Действительно, $N \in \hat{\boldsymbol{P}}(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Z})$, а для класса $\mathfrak{M}$ локально ступенчатых групп, как известно, $\hat{\boldsymbol{P}}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$. Учитывая это и используя предложение 6, убеждаемся в том, что доказательство настоящей теоремы сводится к случаю, когда $N \in \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{M}$. В этом случае в силу предложения 9 подгруппа N локально конечна.

Обозначим через l экспоненту группы N. Пусть теорема неверна. Тогда в G найдется конечнопорожденная группа $H \not\subseteq N$, для которой $(HN/N)^{\mathfrak{X}} = HN/N$ [9, 10]. Положим по индукции $H = H_0$ и для $i \in \mathbb{N}$ $H_i = H_{i-1}^{\mathfrak{X}}$. Нетрудно видеть, что $H = H_i(H \cap N)$, $i \in \mathbb{N}$. Поэтому H / H_i изоморфна секции подгруппы N и, значит, конечна и ее экспонента делит l, $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, ввиду теоремы Зельманова для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $H_n = H_{n+1}$. Тогда, поскольку $H_n \in \hat{P}\mathfrak{X}$ и, согласно теореме Шрейера, H_n конечнопорождена, то $H_n = 1$. Следовательно, $H = H_n(H \cap N) = H \cap N$. Противоречие. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 6. Действительно, настоящая теорема вследствие теорем 2 и 5 справедлива в случае, когда N абелева или имеет конечную экспоненту. Поэтому она, очевидно, справедлива в случае, когда $N \in \mathfrak{Z}$, а значит, ввиду предложения 6 и в общем случае.

Замечание 6. Утверждение теоремы 1, относящееся к случаю, когда G локально ступенчатая группа и подгруппа N разрешима, содержится в [12]. Однако в приведенном там доказательстве допущена ошибка.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. *Курош А. Г.* Теория групп. 3-е изд., доп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
3. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups: In two parts. – Berlin: Springer, 1972. – 464 p.
4. *Зельманов Е. И.* Решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп нечетного показателя // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1990. – **54**, № 1. – С. 42–59.
5. *Зельманов Е. И.* Решение ослабленной проблемы Бернсайда для 2-групп // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 4. – С. 568–592.
6. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. – Amsterdam; London: North – Holland Publ. Co, 1973. – 210 p.
7. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1987. – 206 с.
8. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 3-е изд. доп. – Москва: Наука, 1982. – 288 с.
9. *Бродский С. Д.* О некоторых классах Куроша – Черникова // XVI Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл. Ч. 2, Ленинград, 22 – 25 сент., 1981 г. – Ленинград: ЛОМИ, 1981. – С. 19.
10. *Бродский С. Д.* Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Москва, 1983. – 14 с.
11. *Черников С. Н.* О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп // Мат. сб. – 1951. – **28**, № 1. – С. 119–129.
12. *Требенко Д. Я.* Про деякі умови перенесення локальної ступінчатості групи на її фактор-групу // Класи груп з обмеженнями для підгруп. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – С. 52–55.

Получено 25.07.97