УДК 517. 946.9

Х. Р. Биттиев (Кабардино-Балк. ун-т, НИИ ПМА, Нальчик)

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ В ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

We investigate the effects of space localization and stabilization during finite time for thermal and diffusion processes which take place in active media and are described by nonlinear evolutionary equations.

Досліджено ефекти просторової локалізації та стабілізації за скінченний час для теплових та дифузійних процесів в активних середовищах, що описуються нелінійними еволюційними рівняннями.

Во многих областях естествознания, в частности, медицины и экологии возникает необходимость исследования эволюционных задач со свободными границами для нелинейных уравнений [1]. Обычно эти уравнения рассматриваются в некоторой области $\Omega(t) \subset R^n$, $n = 1, 2, 3$, часть границы $S(t)$ которой задана, а остальная часть $\Gamma(t)$ неизвестна и должна быть определена вместе с решением дифференциального уравнения по дополнительному краевому условию на неизвестной части границы.

1. Постановка задачи. Ограничимся рассмотрением одномерной задачи, когда искомая функция зависит только от одной пространственной координаты и времени, а свободная граница вырождается в точку $x = s(t)$. В этом случае для определения пары функций $u = u(x, t)$, $x_0 < x < s(t)$ и $s = s(t)$, $t > 0$, получаем следующую задачу со свободной границей для одномерного нелинейного эволюционного уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{n-1} \psi(u) \frac{\partial u}{\partial x}\right) - f(u), \qquad x_0 < x < s(t), \qquad t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad x_0 \le x \le s(0),$$

$$\psi(u)\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u = -\varphi(t), \quad x = x_0, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u = 0, \qquad \psi(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad x = s(t), \qquad t > 0,$$

$$f(u) > 0 \text{ при } u > 0,$$

где $n = 1, 2, 3$ — соответственно при плоской, цилиндрической и сферической симметрии решения задачи; x — расстояние от плоскости, оси или точки; $x_0 = 0$ при $n = 1$ и отлично от нуля при $n = 2, 3$.

В простейшем случае, когда $n = 1$, $x_0 = 0$, в работе [1] в стационарном случае получено условие пространственной локализации [2 – 4]

$$s = x(0) = \int_0^{\bar{u}} \frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{2\int_0^u \psi(v) f(v)\,dv}} < \infty,$$

где $\bar{u}$ — решение уравнения

$$\sqrt{2\int_0^u \psi(v) f(v)\,dv} + \alpha \bar{u} - \varphi = 0.$$

Для конкретных функциональных зависимостей $\psi(u) = u^{\sigma}$, $f(u) = u^{\beta}$, $\sigma \geq 0$, $0 \leq \beta < 1$, имеем [1]

$$x(u) = s\left[1 - \left(\frac{u}{\bar{u}}\right)^{\frac{1+\sigma-\beta}{2}}\right], \tag{2}$$

$$s = \frac{\sqrt{2(1+\sigma+\beta)}}{1+\sigma+\beta}\,\bar{u}^{\frac{1+\sigma-\beta}{2}}, \tag{3}$$

где $\bar{u}$ — положительный корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{1+\sigma+\beta}}\,\bar{u}^{\frac{1+\sigma-\beta}{2}} + \alpha\bar{u} - \varphi = 0.$$

Из (2) находим

$$u(x) = \bar{u}\left[1 - \frac{x}{s}\right]^{\frac{2}{1+\sigma-\beta}}, \qquad 0 \leq x \leq s. \tag{4}$$

Если в качестве начального распределения $u_0(x)$ рассмотрим функцию, определяемую согласно формуле (4), то получим следующую задачу со свободной границей:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u^{\beta}, \qquad 0 < x < s(t), \qquad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \qquad 0 \leq x \leq s(0) = s, \\ u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha u, \qquad (u = 0, \alpha \to \infty), \qquad x = 0, \qquad t > 0, \\ u = u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad x = s(t), \qquad t > 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где $u_0(x)$ и s определяются по формулам (3) и (4).

2. Стабилизация за конечное время. В работе [1] получена оценка для времени стабилизации при $\sigma = 0$, $f(u) = u^{\beta}$. Здесь получим оценки для времени стабилизации при $\sigma \neq 0$ и $f(u) \geq m u^{\beta}$, где m — некоторое постоянное число.

Умножим дифференциальное уравнение (5) скалярно на $(u^{1+\sigma})_t$

$$(u_t, (u^{1+\sigma})_t) - ((u^{\sigma}u_x)_x, (u^{1+\sigma})_t) + (f(u), (u^{1+\sigma})_t) = 0, \tag{6}$$

и преобразуем каждый из полученных интегралов (6). Для первого из них имеем

$$\int_0^{s(t)} u_t (u^{1+\sigma})_t\,dx = (1+\sigma)\left\| u_t^2 u^{\sigma/2} \right\|_0^2. \tag{7}$$

Во втором проведем интегрирование по частям с учетом граничных условий (5). Тогда получим

$$\int_0^{s(t)} (u^\sigma u_x)_x (u^{1+\sigma})_t \, dx = -\frac{\alpha(1+\sigma)}{2+\sigma}\left[u^{2+\sigma}(0,t)\right]_t - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|(u^{1+\sigma})_x\right\|_0^2. \tag{8}$$

Подставляя полученные выражения (7), (8) в равенство (6), находим

$$(1+\sigma)\left\|u_t^2 u^{\sigma/2}\right\|_0^2 + \left(f(u), (u^{1+\sigma})_t\right) +$$
$$+ \frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{d}{dt}\left[\left\|(u^{1+\sigma})_x\right\|_0^2 + \frac{2\alpha(1+\sigma)^2}{2+\sigma}u^{2+\sigma}(0,t)\right] = 0. \tag{9}$$

Использовав дифференциальное уравнение (5), преобразуем сумму первых двух слагаемых равенства (9)

$$(1+\sigma)\left\|u_t^2 u^{\sigma/2}\right\|_0^2 + \left(f(u), (u^{1+\sigma})_t\right) =$$
$$= (1+\sigma)\int_0^{s(t)} \left[\frac{1}{1+\sigma}(u^{1+\sigma})_{xx} - f(u)\right]^2 u^\sigma \, dx +$$
$$+ (1+\sigma)\int_0^{s(t)} f(u)u^\sigma\left[\frac{1}{1+\sigma}(u^{1+\sigma})_{xx} - f(u)\right]^2 dx =$$
$$= \frac{1}{1+\sigma}\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_{xx}^2 u^\sigma \, dx - \int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_{xx} f(u) u^\sigma \, dx. \tag{10}$$

Интегрируя по частям последний интеграл из (10) с учетом граничных условий, получаем

$$\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_{xx} u^\sigma f(u) \, dx = -\alpha(1+\sigma)u^{1+\sigma} f(u(0,t)) -$$
$$- \frac{1}{1+\sigma}\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_x^2 f_u' \, dx - \frac{\sigma}{1+\sigma}\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_x^2 [f(u)/u] \, dx. \tag{11}$$

Подставляя (10) и (11) в (9) и отбрасывая в полученном равенстве неотрицательные слагаемые

$$\frac{1}{1+\sigma}\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_x^2 f_u' \, dx$$

и

$$\frac{1}{2(1+\sigma)}\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_{xx} u^\sigma \, dx,$$

находим

$$\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{d}{dt}\left[\left\|(u^{1+\sigma})_x\right\|_0^2 + \overline{\alpha} u^{2+\sigma}(0,t)\right] +$$
$$+ \alpha(1+\sigma)u^{1+\sigma}(0,t) f(u(0,t)) + \frac{\sigma}{1+\sigma}\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_x^2 [f(u)/u] \, dx \le 0. \tag{12}$$

Следует заметить, что последний интеграл, входящий в неравенство (12), несобственный, так как при $x = s(t)$ в силу граничных условий $u = 0$, $u^\sigma u_x = 0$. Чтобы этот интеграл существовал при достаточно гладких функциях $f(u)$, достаточно чтобы $\left(u^\sigma u_x\right)^2$ и решение u при $x \to s(t)$ имели одинаковый порядок малости, т. е. $\left(u^\sigma u_x\right)^2 = O(u)$. Легко проверить, что решение, например стационарной задачи (4), удовлетворяет этому условию. Поскольку по предложению $f(u) \ge m u^\beta$, $0 \le \beta < 1$, то неравенство (12) можно переписать так:

$$\frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{d}{dt}\left[\left\|(u^{1+\sigma})_x\right\|_0^2 + \overline{\alpha} u^{2+\sigma}(0,t)\right] +$$

$$+ \alpha(1+\sigma) m u^{1+\sigma+\beta}(0,t) f(u(0,t)) + \frac{\sigma m}{1+\sigma} \int\limits_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_x^2 u^{\beta-1}\, dx \le 0. \tag{13}$$

Легко видеть, что справедлива оценка

$$\left[u^{1+\sigma}(x,t)\right]^2 \le s \int\limits_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_x^2\, dx. \tag{14}$$

В силу (14) последний интеграл из (13) оценивается снизу таким образом:

$$\int\limits_0^{s(t)} \frac{(u^{1+\sigma})_x^2}{\left[(u^{1+\sigma})^2\right]^{(1-\beta)/2(1+\sigma)}}\, dx \ge s^{(\beta-1)/2(1+\sigma)} \left[\int\limits_0^{s(t)} \left[(u^{1+\sigma})_x^2\right] dx\right]^{\frac{1+2\sigma+\beta}{2(1+\sigma)}}.$$

Подставляя последнее неравенство в (13), получаем

$$\frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{d}{dt}\left[\left\|(u^{1+\sigma})_x\right\|_0^2 + \overline{\alpha} u^{2+\sigma}(0,t)\right] +$$

$$+ \alpha(1+\sigma)\left[u^{2+\sigma}(0,t)\right]^{\frac{1+\sigma+\beta}{2+\sigma}} + \nu_1 \left(\left\|(u^{1+\sigma})_x\right\|_0^2\right)^{\frac{1+2\sigma+\beta}{2(1+\sigma)}} \le 0, \tag{15}$$

где $\nu_1 = (\sigma+\beta)/(1+\sigma) s^{(1-\beta)/2(1+\sigma)}$.

Не нарушая общности будем считать, что $0 < u < 1$ (такую нормировку можно принять, если решение непрерывно в замыкании рассматриваемой области $Q_{t_0} = \{(x,t)\colon 0 < x < s(t), 0 < t \le t_0\}$). Тогда

$$\left[u^{2+\sigma}(0,t)\right]^{\frac{1+\sigma+\beta}{2+\sigma}} \ge \left[u^{2+\sigma}(0,t)\right]^{\frac{1+2\sigma+\beta}{2(1+\sigma)}}, \quad \beta < 1. \tag{16}$$

С помощью неравенства (16) оценку (15) перепишем таким образом:

$$\frac{d}{dt}\left[\left\|(u^{1+\sigma})_x\right\|_0^2 + \overline{\alpha} u^{2+\sigma}(0,t)\right] +$$

$$+ \nu_2\left[\left(\left\|(u^{1+\sigma})_x\right\|_0^2\right)^\kappa + \frac{2\alpha(1+\sigma)^2}{2+\sigma}(u^{2+\sigma}(0,t))^\kappa\right] \le 0. \tag{17}$$

Здесь $\kappa = \dfrac{1+\beta+2\sigma}{2(1+\sigma)}$; $\nu_2 = \min((1+\sigma)(2+\sigma), \nu_1)$.

Введем обозначения $a = \left\|(u^{1+\sigma})_x\right\|_0^2$, $b = u^{2+\sigma}(0,t)$. Тогда неравенство $a^\kappa + \overline{\alpha} b^\kappa \ge (a + \overline{\alpha} b)^\kappa$, $0 \le \kappa \le 1$, будет выполнятся при $\overline{\alpha} = 0$ или при $\overline{\alpha} \ge 1$. Согласно этому неравенство (17) можно записать в виде

$$\frac{dy(t)}{dt} + \nu_2[y(t)]^\kappa \le 0,$$

где $y(t) = \left\| (u^{1+\sigma})_x \right\|_0^2 + \overline{\alpha} u^{2+\sigma}(0, t)$. Отсюда следует

$$t \le \int_0^{y(0)} \left(\frac{y^{-\kappa}}{\nu_2} \right) dy < \infty, \quad \kappa < 1 \quad (\beta < 1).$$

Вычислим $y(0)$, взяв в качестве начального распределения решение стационарной задачи при $f(u) = u^\beta$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right) = u^\beta, \quad 0 < x < s,$$

$$u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u = -\varphi, \quad x = 0,$$

$$u = 0, \quad u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = s,$$

Оно имеет вид [1]

$$u(x, 0) = \overline{u}\left[1 - \frac{x}{s} \right]^{\kappa_1}, \quad s = \sqrt{\kappa_1(1+\beta+\sigma)}\,\overline{u}^{\kappa_1}, \quad \kappa_1 = \frac{2}{1+\sigma-\beta}, \quad 0 \le x \le s.$$

Тогда

$$y(0) = \left\| (u^{1+\sigma})_x \right\|_0^2 + \overline{\alpha} u^{2+\sigma}(0, 0) =$$

$$= \frac{4(1+\sigma)^2}{(3+3\sigma+\beta)\sqrt{2(1+\sigma+\beta)}}\, \overline{u}^{(3+3\sigma+\beta)/2} + \overline{\alpha}\,\overline{u}^{2+\sigma}, \quad \overline{\alpha} = \frac{\alpha(1+\sigma)^2}{2+\sigma}.$$

Исходя из дифференциального неравенства (17) для времени стабилизации, т. е. для значения T, при котором $y(T) = 0$, находим

$$T \le \frac{1}{\nu_2} \int_0^{y(0)} y^{-\kappa} dy = \frac{1}{\nu_2} \frac{2(1+\sigma)}{1-\beta} \left[\frac{4(1+\sigma)^2}{(3+3\sigma+\beta)\sqrt{2(1+\sigma+\beta)}}\, \overline{u}^{(3+3\sigma+\beta)/2} + \overline{\alpha}\,\overline{u}^{2+\sigma} \right]^{\frac{1-\beta}{2(1+\sigma)}},$$

где

$$\nu_2 = \min\left((1+\sigma)(2+\sigma), \frac{\sigma+\beta}{1+\sigma} s^{\frac{1-\beta}{2(1+\sigma)}} \right).$$

Эта оценка уточняет оценку, полученную в [3, 4].

1. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А., Шхануков М. Х.* Пространственно-временная локализация в задачах со свободными границами для нелинейного уравнения второго порядка // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – С. 202–211.
2. *Мартинсон Л. К.* О конечной скорости распространения тепловых возмущений в средах с постоянным коэффициентом теплопроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1976. – **16**, № 5. – С. 1233–1241.
3. *Калашников А. С.* О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением // Там же. – 1974. – **14**, № 4. – С. 891–905.
4. *Фридман А.* Вариационные принципы в задачах со свободными границами. – М.: Наука, 1990. – 536 с.

Получено 03.03.98