УДК 519.46

Ю. В. Дзядык (Киберн. центр НАН Украины, Киев)

НОВЫЙ КЛАСС КОМПАКТНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

We describe a class of almost symmetric spherical spaces which is absent in the known classifications made by M. Krämer and I. Mikityuk.

Описано клас майже симетричних сферичних просторів, відсутній у відомих класифікаціях М. Кремера та І. Микитюка.

1. Введение. В классификации сферических пространств с простой компактной группой движений [1] и составленном на ее основе списке сферических несимметрических пространств [2] две пары, а именно $(\mathrm{SO}(8), \mathrm{Spin}(7))$ и $(\mathrm{SO}(8), \mathrm{Sp}(2)\,\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2)$ имеют ряд необычных свойств.

Остановимся для примера на первом из этих пространств.

С одной стороны, не существует инволютивного автоморфизма группы $\mathrm{SO}(8)$, оставляющего неподвижными все элементы подгруппы $\mathrm{Spin}(7)$ [3, с. 146]. Таким образом, пара $(\mathrm{SO}(8), \mathrm{Spin}(7))$, действительно, не является симметрической.

С другой стороны, эта несимметричность как бы призрачна. Действие $\mathrm{SO}(8)$ на $\mathrm{SO}(8)/\mathrm{Spin}(7)$ неэффективно: $\mathrm{SO}(8)$ и $\mathrm{Spin}(7)$ имеют общий центр. Изоморфизм $\mathrm{SO}(8)/\mathrm{Spin}(7) \simeq \mathrm{PSO}(8)/\mathrm{SO}(7) = P^7(\mathbb{R})$ показывает, что пространство $\mathrm{SO}(8)/\mathrm{Spin}(7)$ является симметрическим относительно действия группы $\mathrm{PSO}(8)$. Его односвязная накрывающая $\mathrm{Spin}(8)/\mathrm{Spin}(7) \simeq \simeq \mathrm{SO}(8)/\mathrm{SO}(7) = S^7$ также симметрична.

Заметим, что пространство $\mathrm{SO}(8)/\mathrm{Spin}(7)$ принадлежит серии $\mathrm{Spin}_+(4k)/\mathrm{Spin}(4k-1) = P^{4k-1}(\mathbb{R})$. При $k > 1$ $\mathrm{Spin}_+(4k) \simeq \mathrm{Spin}(4k)/\mathbb{Z}_2$; при $k = 1$ $\mathrm{Spin}_+(4) \simeq \mathrm{Spin}(3)$, $\mathrm{Spin}_+(4)/\mathrm{Spin}(3) \neq P^3(\mathbb{R})$; пространство $[\mathrm{Spin}(4)/\mathbb{Z}_2]/\mathrm{Spin}(3) = \mathrm{Spin}(3)\,\mathrm{SO}(3)/\mathrm{Spin}(3) = \mathrm{SO}(3) = P^3(\mathbb{R})$ в действительности принадлежит серии $G(G/Z)/G$.

Теперь природа этого явления становится ясной.

2. Основная теорема.

Определение 1. *Будем называть сферическую несимметрическую пару (G, K) почти симметрической, если пара $(G/Z \cap K, K/Z \cap K)$ является симметрической, где $Z = Z(G)$ — центр группы G.*

Следующая теорема указывает общий способ построения почти симметрических пар (G, K).

Напомним, что если G/K — симметрическое пространство, то ему соответствует такой инволютивный автоморфизм σ группы G, что если $K^\sigma = \{g \in \in G : \sigma(g) = g\}$ — подгруппа неподвижных элементов автоморфизма σ, $(K^\sigma)_0$ — компонента единицы группы K^σ, то $(K^\sigma)_0 \subseteq K \subseteq K^\sigma$.

Ниже, не оговаривая особо, будем отождествлять (обозначая одними и теми же символами) соответствующие элементы групп автоморфизмов локально изометричных полупростых групп Ли и их алгебры Ли.

Теорема 1. *Пусть $\tilde{G}$ — связная полупростая компактная группа Ли, $\tilde{G}/\tilde{K}$ — симметрическое пространство, σ — соответствующий автомор-*

физм, U — подгруппа, содержащаяся в центре группы $\tilde{G}$, $\tilde{V} = U\sigma(U)$ — подгруппа, порожденная U и $\sigma(U)$, $G = \tilde{G}/U$, $K = \tilde{K}/U\bigcap\tilde{K}$, $V = \tilde{V}/U$.

Пара (G, K) сферична. Она является симметрической тогда и только тогда, когда подгруппа U инвариантна относительно σ. Если $\sigma(U) \neq U$, то пара (G, K) является почти симметрической: $V \subset K$, элементы из V оставляют неподвижными все точки из G/K, и пространство G/K является симметрическим относительно действия группы $G_1 = G/V$.

Пусть (G, K) — произвольная почти симметрическая пара. Тогда существует такая симметрическая пара $(\tilde{G}, \tilde{K})$ и такая подгруппа U центра группы $\tilde{G}$, что

$$G = \tilde{G}/U, \quad U\bigcap\tilde{K} = \{e\}, \quad K \simeq \tilde{K}.$$

Доказательство разобьем по пунктам.

1. *Пара (G, K) является сферической.*

Применим следующий критерий [4, п. 3; 5, п. IV.1.2; 6, с. 35]. Пусть G/K— однородное пространство связной компактной группы Ли G, K/L — орбита общего положения подгруппы K на пространстве G/K. Пространство G/K сферично тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\dim G/K - \dim K/L = \operatorname{rang} G - \operatorname{rang} L.$$

Сферичность пары (G, K) следует из тождеств

$$\dim G = \dim\tilde{G}, \quad \dim K = \dim\tilde{K}, \quad L = \tilde{L}, \quad \operatorname{rang} G = \operatorname{rang}\tilde{G}.$$

2. *Пара (G, K) является симметрической тогда и только тогда, когда $\sigma(U) = U$.*

Если $\sigma(U) = U$, то опустим автоморфизм σ группы $\tilde{G}$ на группу G: $\sigma(gU) = \sigma(g)\sigma(U) = \sigma(g)U$, $g \in \tilde{G}$. Ясно, что $(K^{\sigma})_0 \subseteq K \subseteq K^{\sigma}$, следовательно, пара (G, K) является симметрической.

Обратно, если $\sigma(U) \neq U$, то $\sigma(gU) = \sigma(g)\sigma(U) \notin G$ — автоморфизм σ не опускается на группу G. Предположим, что существует такой автоморфизм τ группы G, что $(K^{\tau})_0 \subseteq K \subseteq K^{\tau}$. Тогда $\tau = \sigma$ как автоморфизмы алгебр Ли, следовательно, τ и σ равны как автоморфизмы группы G, что противоречиво, так как $\tau(U) = U$, $\sigma(U) \neq U$.

3. *$V \subset K$, где $V = [U\sigma(U)]/U$.*

Пусть $h \in V$, $h = u'\sigma(U)U = u'u^{-1}[u\sigma(u)]U \simeq tU$, где $t = u\sigma(u)$. Так как $\sigma(t) = t$, то $t \in Z\bigcap\tilde{K}^{\sigma} \subseteq Z(\tilde{K}^{\sigma}) \subset (\tilde{K}^{\sigma})_0 \subseteq \tilde{K}$. Следовательно, $\forall h \in V$: $h \simeq tU \in K$, что и требовалось доказать.

4. *Элементы из V оставляют неподвижными все точки из G/K.*

Действительно, $\forall h \in V$ $\forall x \in G/K$: $hx = hgK = ghK = gK = x$.

5. *Пространство G/K является симметрическим относительно действия $G_1 = G/V$.*

Поскольку $V \subset K$, то $K_1 = K/V\bigcap K = K/V$, следовательно, $G_1/K_1 = (G/V)/(K/V) \simeq G/K$. В то же время $G_1 = \tilde{G}/\tilde{V}$, и доказываемое утверждение следует из $\sigma(\tilde{V}) = \tilde{V}$.

6. *Если* $\sigma(U) \neq U$, *то пара* G/K *является почти симметрической.*

Обозначим $W = Z \bigcap K$, $W_1 = W/V$. Требуется доказать, что пара $(G/W, K/W)$ симметрична. Из $W_1 \subset K_1$ следует, что $\sigma(W_1) = W_1$, следовательно, пара $(G_1/W_1, K_1/W_1)$ симметрична. Для завершения доказательства заметим, что

$$G_1/W_1 = (G/V)/(W/V) \simeq G/W,$$

$$K_1/W_1 = (K/V)/(W/V) \simeq K/W.$$

7. $\forall\,(G/K)\ \exists\,(\tilde{G}/\tilde{K})\ \ \exists\, U \subset Z(\tilde{G}):\ \ G = \tilde{G}/U,\ U \bigcap \tilde{K} = \{e\},\ K \simeq \tilde{K}.$

Пусть G_0 — односвязная накрывающая группа G, W — ядро накрытия $G_0 \to G$. Положим $\tilde{G} = G_0/W \bigcap \sigma(W)$, $U = W/W \bigcap \sigma(W)$, $\tilde{K}$ — прообраз K в $\tilde{G}$. Ясно, что

$$\bullet\, G = \tilde{G}/U, \qquad U \bigcap \tilde{K} \subseteq U \bigcap \sigma(U) = \{e\}, \qquad K = \tilde{K}/U \bigcap \tilde{K} \simeq \tilde{K}.$$

Покажем, что пара $(\tilde{G}/\tilde{K})$ симметрична. Положим

$$\tilde{V} = W\sigma(W)/W \bigcap \sigma(W) = U\,\sigma(U),$$

$$V = \{u\,\sigma(u), u \in U\} = \tilde{V} \bigcap \tilde{K} \simeq \tilde{V}/U.$$

Ясно, что $V \subset (\tilde{K}^{\sigma})_0 = \tilde{K}_0 \subseteq \tilde{K} \simeq K$. Пусть

$$V_1 = [Z \bigcap K]/V, \qquad G_1 = \tilde{G}/\tilde{V} \simeq [\tilde{G}/U]/[\tilde{V}/U] = G/V,$$

$$K_1 = \tilde{K}/\tilde{V} \bigcap \tilde{K} = \tilde{K}/V \simeq K/V.$$

Поскольку

$$Z \cap K = [Z(\tilde{G})/U] \bigcap K \simeq Z(\tilde{G}) \bigcap \tilde{K} \subseteq Z(\tilde{K}) \subset \tilde{K}_0 = (\tilde{K}^{\sigma})_0,$$

то $V_1 \subset (K_1^{\sigma})_0 \subseteq K_1^{\sigma}$. Из равенств $(G/Z \bigcap K, K/Z \bigcap K) \simeq (G_1/V_1, K_1/V_1)$, $(G_1, K_1) = (\tilde{G}/\tilde{V}, \tilde{K}/V)$ и включений $V_1 \subset K_1^{\sigma}$, $V \subset \tilde{K}^{\sigma}$ следует $\tilde{K} \subseteq \tilde{K}^{\sigma}$ и симметричность пары $(\tilde{G}/\tilde{K})$, что требовалось доказать.

3. Классификация неприводимых почти симметрических пар.

Предложение. *Пусть* (G, K) — *почти симметрическая пара. Тогда*:

1) *группа* G *действует на* G/K *неэффективно*;

2) *пространства* G/K *и* $(G/Z \bigcap K)/(K/Z \bigcap K)$ *изометричны*;

3) *пространство* G/K *неодносвязно*;

4) *любая пара* $(\tilde{G}, \tilde{K})$ *такая, что пространство* $\tilde{G}/\tilde{K}$ *есть односвязная накрывающая пространства* G/K, *причем группа* $\tilde{G}$ *локально изоморфна* G, *является изометрической*;

5) *соответствующий* $\tilde{G}/\tilde{K}$ *автоморфизм* σ *группы* $\tilde{G}$ *не может быть внутренним*;

6) *центр* $Z(\tilde{G})$ *группы* $\tilde{G}$ *не может быть циклической группой.*

Определение 2. *Будем говорить, что почти симметрическая пара* (G, K) *неприводима, если неприводима односвязная накрывающая* $\tilde{G}/\tilde{K}$.

В дальнейшем удобно полагать $\mathrm{Spin}(1) \simeq \mathbb{Z}_2$, считая, что изоморфизм $\mathrm{SO}(n) \simeq \mathrm{Spin}(n)/\mathbb{Z}_2$ выполняется $\forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Пусть G/K — неприводимая почти симметрическая пара.*

Если G проста, то

$$G = \mathrm{Spin}_+(4k), \quad K = \mathrm{Spin}(4k-2l+1)\,\mathrm{Spin}(2l-1)/\mathbb{Z}_2,$$
$$k > 1, \quad l = 1, \ldots, k.$$

При заданных (k, l) эта пара единственна, с точностью до изоморфизмов $\mathrm{Spin}_+(4k) \simeq \mathrm{Spin}_-(4k)$, $\mathrm{Spin}_+(8) \simeq \mathrm{SO}(8)$ etc.

Если G полупроста, то K проста, $G = K(K/U)$, $U \subseteq Z(K)$, $U \neq \{e\}$. Количество различных симметрических (Симм.) и почти симметрических (Почти симм.) пар соответствующего типа приведено ниже $(l \geq 1,\ k \geq 1)$:

Тип K	A_l	B_l	C_l	D_{2k+1}	D_4	D_{2k+4}	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
Симм.	$s(l)$	2	2	3	3	4	2	2	1	1	1
Почти симм.	$a(l)$	1	1	3	3	5	1	1	–	–	–

Здесь функции $s(l)$ и $a(l)$ определяются следующим образом. Пусть $n = l + 1 = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$ — разложение n по степеням простых чисел, $\boldsymbol{k} = \{k_1, \ldots, k_s\}$ — вектор степеней, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}(l)$. Тогда

$$s(l) = \mathrm{vol}(\boldsymbol{k}), \ a(l) = \mathrm{vol}(\boldsymbol{k})(\mathrm{vol}(\boldsymbol{k}/2) - 1),$$

где $\mathrm{vol}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{s}(x_i + 1)$ — объем параллелепипеда с диагональю $(x_1 + 1, \ldots, x_s + 1)$, все ребра которого параллельны осям координат.

Приведем значения $s(l)$ и $a(l)$ для некоторых l:

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	358	359	360
$s(l)$	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	24	3
$a(l)$	1	1	3	1	5	1	6	3	5	1	12	1	5	5	10	1	12	1	156	3

Замечание. Эти две серии сферических пространств являются новыми. Ранее были известны лишь две пары [1]: $(\mathrm{Spin}_+(8), \mathrm{Spin}(7)) \simeq (\mathrm{SO}(8), \mathrm{Spin}(7))$ и $(\mathrm{Spin}_+(8), \mathrm{Spin}(3)\,\mathrm{Spin}(5)/\mathbb{Z}_2) \simeq (\mathrm{SO}(8), \mathrm{SU}(2)\,\mathrm{Sp}(2)/\mathbb{Z}_2)$.

Существование несимметрических пар вида $K(K/U)/K$, $U \subseteq Z(K)$ не было замечено ранее в классификации сферических пар (G, K) с полупростой группой G [6–8].

4. Структура произвольных почти симметрических пространств. Как правило, однородное пространство не может быть глобально представлено в виде прямого произведения неприводимых. Простейший пример — симметрическое пространство $[\mathrm{SO}(3)\,\mathrm{SO}(3)]/\mathrm{S}(\mathrm{O}(2)\,\mathrm{O}(2)) = (S^2S^2)/\mathbb{Z}_2$. Обычно эти тонкие вопросы устраняют переходом к локальной точке зрения. Однако при изучении структуры почти симметрических пространств этот прием не проходит: их призрачная несимметричность исчезает при локальном рассмотрении.

Теорема 3. *Произвольная почти симметрическая пара* (G, K) *может быть представлена в виде* $(G_s G_a / U, K_s K_a)$, *где* $U = \{(\gamma(v), v), v \in V\}$, $V \subset Z(G_a)$, $U \cap \sigma(U) = \{e\}$, $\gamma : V \to Z(G_s)$ *— такой гомоморфизм, что* $\sigma(\gamma(V)) = \gamma(V)$, $G_s \cap G_a = \{e\}$, *пары* (G_s, K_s), (G_a, K_a) *симметричны, пара* $(G_a / V, K_a)$ *почти симметрична.*

При этом существует такая группа S, $V \subseteq S \subset Z(G_a)$, *что пара* $(G_a / S, K_a / S \cap K_a)$ *есть прямое произведение неприводимых почти симметрических пар* $(G_i / U_i, K_i)$, *описанных в теореме* 2, *и любая проекция* $V \to U_i$ *эпиморфна.*

Пример. $\tilde{G} = [\mathrm{SU}(4)]^5$, $\tilde{G} / \tilde{K} = [\mathrm{SU}(4)/\mathrm{Sp}(2)][\mathrm{SU}(4)\mathrm{SU}(4)/\mathrm{SU}(4)]^2$, $W = \{(b^2, a, b, a, b) : a^2 = b^4 = e\}$, $W \cap \sigma(W) = \{(e, a, b, a, b) : a^2 = b^2 = e\}$, $U = W / W \cap \sigma(W) = \{(d, e, d, e, d) : d^2 = e\}$, $\sigma(U) = \{(d, d, e, d, e) : d^2 = e\}$, $V = \{(e, d, e, d) : d^2 = e\}$, $S = \{(e, c, e, d) : c^2 = d^2 = e\}$.

1. *Krämer M.* Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen // Compos. Math. – 1979. – **38**, № 2. – P. 129–153.
2. *Винберг Э. Б., Кимельфельд Б. Н.* Однородные области на флаговых многообразиях и сферические подгруппы полупростых групп Ли // Функцион. анализ и его приложения. – 1978. – **12**, № 3. – С. 12–19.
3. *Лоос О.* Симметрические пространства. – М.: Наука, 1985. – 208 с.
4. *Дзядык Ю. В.* Представления, реализуемые в векторных полях на компактных симметрических пространствах // Докл. АН СССР. – 1975. – **220**, № 6. – С. 1259–1262.
5. *Дзядык Ю. В.* Спектр индуцированного представления на компактном симметрическом пространстве: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 99 с.
6. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. – Киев: Наук. думка, 1991. – 288 с.
7. *Микитюк И. В.* Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами. – Киев, 1985. – 37 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т теор. физики; № 30Р); см. также // Мат. сб. – 1986. – **129**, № 4. – С. 514–534.
8. *Brion M.* Classification des espaces homogènes sphériques // Compos. Math. – 1987. – **63**, № 2. – P. 189–208.

Получено 20.02.98