УДК 517.986.6

В. В. Кисиль (Ин-т математики, экономики и механики Одес. ун-та)

ТЕОРЕМА ТИПА ПЕЛИ – ВИНЕРА ДЛЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП ЛИ*

The Paley –Wiener type theorem is proved for connected and simply connected Lie groups.

Доведено теорему типу Пелі – Вінера для зв'язаних, однозв'язаних груп Лі.

1. Введение. В работе [1] доказана теорема типа Пели – Винера для нильпотентных групп Ли длины два и три. С этой целью автор разработал специальную технику изучения нильпотентных групп Ли. По-видимому, эта техника представляет отдельный интерес и может быть полезна в других задачах.

Однако основной результат работы [1] может быть доказан проще и с большей общностью на основе стандартных результатов о нильпотентных группах Ли. Цель даной работы — представить такое доказательство для всех связанных, односвязанных (экспоненциальных) групп Ли. Интересно отметить, что в нашем доказательстве эта общая теорема окажется непосредственным следствием классической теоремы Пели – Винера. Это служит еще одним примером *парадокса изобретателя* [2]. По-видимому, предложенное доказательство может быть также использовано в других ситуациях, например для разрешимых групп Ли типа I.

Во втором пункте приводим основные факты о нильпотентных группах Ли и их представлений, в третьем — на их основе доказываем теорему типа Пели – Винера.

2. Предварительные сведения. Приводим сведения, которые могут быть найдены в работах [3, 4] или [5; 6, гл. 6].

Пусть $\mathfrak{g}$ является нильпотентной алгеброй Ли размерности n и пусть $G = \exp(\mathfrak{g})$ — связанная, односвязанная нильпотентная группа Ли соответствующая ей. Как обычно, с помощью экспоненциального отображения отождествляем $\mathfrak{g}$ и G; они изоморфны евклидовому пространству $\mathbb{R}^n$ как линейные пространство и C^∞-многообразие соответветственно. Обозначим также общей буквой представление π группы G и производное представление $\mathfrak{g}$. Все унитарные неприводимые представления могут быть построены с помощью индуктивной процедуры [3; 6, гл. 6]:

1. Группа G унимодулярна, двусторонняя мера Хаара $d\mu$ на G совпадает с мерой Лебега на $\mathbb{R}^n$. Любая подгруппа Ли H также является нильпотентной и гомеоморфной $\mathbb{R}^m$ для некоторого $m \le n$. Однородное пространство $X = H\backslash G$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{n-m}$. Инвариантные меры на H и X опять совпадают с мерами Лебега соответственно на $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^{n-m}$.

2. Унитарно дуальный объект $\hat{G}$ (множество неэквивалентных неприводимых унитарных представлений) может быть параметризовано орбитами коприсоединенного представления в $\mathfrak{g}'$. Носитель $\tilde{G}$ меры Планшереля $d\nu$ в $\hat{G}$ соответствует орбитам максимальной размерности и параметризован точками пространства $\mathbb{R}^k \subset \mathfrak{g}'$, где $\dim \mathfrak{g} = n$ и $n-k$ — максимальная размерность орбит. Более того ([3], 7.4), мера Планшереля эквивалентна мере Лебега на $\tilde{G} \cong \mathbb{R}^k$:

---

*Работа была частично поддержана грантом INTAS/93–0322. Работа подготовлена автором во время пребывания его в университете г. Гент (Бельгия). Автор также благодарен Д. С. Калюжному за полезное обсуждение.

$$d\mu = R(\lambda)\,d\lambda_1 \ldots d\lambda_k. \tag{1}$$

3. Каждое унитарное неприводимое представление π группы G индуцировано одномерным представлением π_0 некоторой подгруппы $H \subset G$ ([3], теорема 5.1). Последнее представление является характером и имеет вид

$$\pi_0(\exp A) = \exp(i\langle l, A\rangle), \qquad A \in \mathfrak{h}, \tag{2}$$

для некоторого $l \in \mathfrak{g}'$.

4. В соответствии с общей схемой [5, §13.2; 6, гл. 5] индуцированное представление может быть реализовано так. Пусть $L_2(G, H, \pi_0)$ является пространством функций на G со свойством

$$F(hg) = \pi_0(h)F(g), \qquad h \in H, \quad g \in G.$$

Тогда π эквивалентно представлению G в $L(G, H, \pi_0)$ сдвигами:

$$[\pi(g)F](g_1) = F(g_1 g). \tag{3}$$

Альтернативный вид представления может быть реализован на однородном пространстве $X = H\backslash G$. Пусть $s\colon X \to G$ некоторое измеримое отображение такое, что $s(Hg) \in Hg$. Определим изоморфизм $L_2(G, H, \pi) \to L_2(X)$:

$$f(x) = F(s(x)), \qquad F(hs(x)) = \pi_0(h)f(x), \qquad x \in X, \quad h \in H. \tag{4}$$

Тогда

$$[\pi(g)f](x) = A(g, x)f(xg), \tag{5}$$

где $A(g, x) = \pi_0(h)$ и элемент $h \in H$ определяется соотношением $hs(xg) = s(x)g$.

Теперь перейдем к основному результату работы.

3. Теорема Пели–Винера.

Теорема 1. *Пусть $G = \exp(\mathfrak{g})$ является связанной, односвязанной нильпотентной группой Ли. Пусть $\varphi(g)$ — функция из $L_\infty(G)$ с компактным носителем. Если $\hat{\varphi}(\pi) = 0$ на множестве E из $\hat{G}$ с положительной мерой Планшереля, то $\varphi(g) = 0$ почти всюду на G.*

Доказательство. Начнем с замены переменных в формуле, определяющей некоммутативное преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\pi)$ функции φ в форме (3) индуцированного представления:

$$[\hat{\varphi}(\pi)F](g_1) = \int_G \varphi(g)F(g_1 g')\,d\mu(g') = \int_G \varphi(g_1^{-1}g)F(g)\,d\mu(g).$$

Перепишем последнюю строчку для представления (5), использовав выражение (4):

$$\begin{aligned}[\hat{\varphi}(\pi)f](x) &= \int_G \varphi([s(x_1)]^{-1}hs(x))\pi_0(h)f(x)\,d\mu(hs(x)) = \\ &= \int_X\int_H \varphi([s(x_1)]^{-1}hs(x))\pi_0(h)f(x)\,dh\,dx = \\ &= \int_X\int_H \varphi([s(x_1)]^{-1}hs(x))\pi_0(h)\,dh\,f(x)\,dx = \\ &= \int_X\left(\int_H \varphi([s(x_1)]^{-1}hs(x))\exp(i\langle l, \log h\rangle)\,dh\right)f(x)\,dx.\end{aligned} \tag{6}$$

(Мы подставили в (6) выражение (2) для представления π_0). Поэтому $\hat{\varphi}(\pi)$ может быть представлен интегральным оператором $K(l)\colon L_2(X) \to L_2(X)$ вида

$$[K(l)f](x_1) = \int_X K(l, x_1, x)f(x)dx$$

с ядром $K(l, x_1, x)$, определенным через преобразование Фурье по паре переменных $h \to l$:

$$K(l, x_1, x) = \int_H \varphi([s(x_1)]^{-1} hs(x)) \exp(i\langle l, \log h\rangle)dh.$$

Если оператор $K(l) = 0$ для фиксированного l, то ядро $K(l, x_1, x)$ должно быть нулевым почти всюду для $(x_1, x) \in X \times X$.

Однако если это выполняется для всех $l \in E$, где множество $E \subset \mathbb{R}^k$ имеет ненулевую меру, тогда $\varphi(g) = 0$ почти всюду по классической теореме Пели – Винера.

Отметим, что преобразование аналогичное (6) для группы $SL(2, \mathbb{R})$ может быть найдено в [7, III.4].

1. *Park R.* A Paley – Wiener theorem for all two- and tree-step nilpotent Lie groups // J. Funct. Anal. – 1995. – № 133. – P. 227–300.
2. *Полья Г.* Математическое открытие. – М.: Наука, 1978. – 417 с.
3. *Кириллов А. А.* Унитарные представления нильпотентных групп Ли // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, № 4 – С. 57–101.
4. *Кириллов А. А.* О мере Планшереля для нильпотентных групп Ли // Функц. анализ – 1967. – **1**, № 4. – С. 98–100.
5. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1972. – 336 с.
6. *Taylor M. E.* Noncommutative Harmonic Analysis // Math. Surv. and Monographs. Amer. Math. Soc. – Rhode Island: Providence, 1986. – **22**, XVI. – 328p.
7. *Ленг С.* $SL_2(\mathbf{R})$. – М.: Мир, 1977. – 430 с.

Получено 25.07.96