УДК 517.9

И. Л. Нижник (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

УСТОЙЧИВЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ЯЧЕЕК ЧУА

We investigate a nonlinear chain of two Chua oscillators and its stable solutions.

Вивчається нелінійний ланцюжок двох осциляторів Чуа. Досліджені його стійки розв'язки.

Ячейка Чуа — электрическая цепь, содержащая один нелинейный элемент, моделируемый резистором, играет основополагающую роль в теории нелинейных сетей CNN [1].

Пусть имеется две идентичные ячейки Чуа, электрически связанные между собой [2]. На первую из них подается внешний сигнал $i_s(t)$. Из уравнений Кирхгофа получаем систему двух уравнений, описывающую две связанные ячейки Чуа с кубической нелинейностью в следующем безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= k(v_2 - v_1) - v_1(1 - v_1)(2 - v_1) + i_s(t); \\ \frac{dv_2}{dt} &= k(v_1 - v_2) - v_2(1 - v_2)(2 - v_2). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь число k характеризует величину связи между ячейками. Значение $k = 0$ соответствует несвязанным ячейкам, а $k = \infty$ — жестко связанным. При специальной связи между ячейками данная цепочка может служить детектором малых сигналов [2]. С математической точки зрения система (1) представляет собой нетривиальный пример нелинейной системы, для которой явно находятся все стационарные точки и точки бифуркации по параметру k.

Теорема 1. *Система* (1) *при любом* $k \geq 0$ *имеет следующие стационарные решения: две устойчивые* $(v_1, v_2) = (0, 0)$; $(2, 2)$ *и неустойчивую точку* $(1, 1)$. При $0 \leq k < 1/2$ *существует еще два стационарных решения*

$$A\left(1 - \sqrt{1-2k},\, 1 + \sqrt{1-2k}\right); \quad B\left(1 + \sqrt{1-2k},\, 1 - \sqrt{1-2k}\right), \tag{2}$$

являющиеся устойчивыми при $k < 1/3$ *и неустойчивыми седловыми точками в случае* $1/3 \leq k < 1/2$. *При* $0 \leq k < 1/3$ *система* (1) *имеет еще четыре неустойчивые седловые точки:*

$$C_1\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{1-3k} - \frac{1}{2}\sqrt{1+k},\, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1-3k} + \frac{1}{2}\sqrt{1+k}\right);$$

$$C_2\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{1-3k} - \frac{1}{2}\sqrt{1+k},\, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{1-3k} + \frac{1}{2}\sqrt{1+k}\right);$$

$$C_3\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{1-3k} + \frac{1}{2}\sqrt{1+k},\, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1-3k} - \frac{1}{2}\sqrt{1+k}\right);$$

$$C_4\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{1-3k} + \frac{1}{2}\sqrt{1+k},\, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{1-3k} - \frac{1}{2}\sqrt{1+k}\right). \tag{3}$$

Других стационарных решений система (1) *не имеет.*

Доказательство. Сводится к нахождению стационарных решений и проверке характера устойчивости.

1. При $i_s(t) = 0$ стационарные решения для системы (1) находятся из условия равенства нулю правых частей данной системы:

$$
\begin{aligned}
k(v_2 - v_1) - v_1(1 - v_1)(2 - v_1) &= 0;\\
k(v_1 - v_2) - v_2(1 - v_2)(2 - v_2) &= 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Сложив уравнения системы (4) и затем разложив левую часть на множители, получим равенство

$$
(v_1 + v_2 - 2)\left(v_1^2 + v_2^2 - v_1 v_2 - v_1 - v_2\right) = 0. \tag{5}
$$

Согласно (5) решения системы (4) лежат либо на прямой, $v_1 + v_2 - 2 = 0$, либо на эллипсе, $v_1^2 + v_2^2 - v_1 v_2 - v_1 - v_2 = 0$. Решая систему (4), получаем лежащие на прямой три стационарных решения: $(1, 1)$, точку A и точку B согласно формуле (2). Стационарные решения, лежащие на эллипсе: $(v_1, v_2) = (0, 0)$, $(2, 2)$ и точки C_1, C_2, C_3, C_4 согласно формуле (3).

2. Для определения характера устойчивости стационарных решений произведем линеаризацию уравнения (1) в окрестности каждого стационарного решения. Для примера рассмотрим точку A. Пусть $v_1 = v + x_1(t)$, $v_2 = 2 - v + x_2(t)$, где $v = 1 - \sqrt{1 - 2k}$. Получим

$$
\frac{dx}{dt} = Ax,
$$

где матрица A имеет вид

$$
A = \begin{pmatrix} -2 + 5k & k \\ k & -2 + 5k \end{pmatrix}. \tag{6}
$$

Собственные значения матрицы (6) следующие:

$$
\lambda_1 = -2 + 4k, \quad \lambda_2 = -2 + 6k. \tag{7}
$$

Стационарные решения будут устойчивыми, если собственные значения (7) — отрицательные. Это приводит к следующему условию на параметр k:

$$
k < \frac{1}{3}.
$$

Таким образом, значение параметра $k = 1/3$ разделяет случаи, когда в системе (1) имеется четыре устойчивых состояния:

$$
(v_1, v_2) = (0, 0);\ (2, 2);\ \left(1 - \sqrt{1 - 2k},\ 1 + \sqrt{1 - 2k}\right);\ \left(1 + \sqrt{1 - 2k},\ 1 - \sqrt{1 - 2k}\right)
$$

от случая $k > 1/3$, когда в системе имеется лишь два устойчивых (основных) состояния. Точка $(1, 1)$ является неустойчивой, узлом для $k \le 1/2$ и седлом для остальных k. Теорема доказана.

Следствие 1. *При изменении параметра* k *от* 0 до $+\infty$ *система* (1) *имеет две точки бифуркации* $k = 1/3$ *и* $k = 1/2$. *При* $k = 1/3$ *точки* C_1, C_2 *и* A *сливаются и точки* C_3, C_4 и B *сливаются. При увеличении* k *от* $1/3$ *до* $1/2$ *эти слитые точки движутся по прямой* $v_1 + v_2 = 2$ *до точки* $(1, 1)$ *и при* $k = 1/2$ *сливаются с ней. При дальнейшем увеличении* k *имеются лишь три стационарные точки:* $(v_1, v_2) = (0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$.

Поведение динамической системы (1) в окрестности устойчивой точки A можно характеризовать следующими формулами:

$$
x_1 = \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2)\exp(\lambda_1 t) + \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)\exp(\lambda_2 t) +
$$

$$+\ \frac{1}{2}\int_0^t [\exp(\lambda_1(t-\tau)) + \exp(\lambda_2(t-\tau))]\, i_s(\tau)\, d\tau,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2)\exp(\lambda_1 t) + \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)\exp(\lambda_2 t) +$$

$$+\ \frac{1}{2}\int_0^t [\exp(\lambda_2(t-\tau)) - \exp(\lambda_1(t-\tau))]\, i_s(\tau)\, d\tau.$$

Здесь λ_1, λ_2 — собственные значения, определяются по формулам (7), $i_s(t)$ — внешний сигнал, а δ_1, δ_2 — возмущение начальных условий в точке A.

Следствие 2 (физическая интерпретация). *При $k = 1/3 - \varepsilon$ зоны притяжения устойчивых точек A и B узкие, поскольку точки C_i, $i = \overline{1,4}$, лежат на границе зоны притяжения, а при $\varepsilon \to 0$: $C_1, C_2 \to A$, $C_3, C_4 \to B$. Поэтому одиночный импульс во внешнем сигнале с интенсивностью выше некоторого критического значения, зависящего от ε, переводит систему из этих устойчивых состояний в одно из основных устойчивых состояний. Таким образом, специально связанные ячейки Чуа могут служить детектором малых импульсов во внешнем сигнале* [2].

1. *Chua L. O., Hasler M., Moschytz G., Neirynck J.* Autonomous cellular neural networks: a unified paradigm for pattern formation and active wave propagation // IEEE Trans. Circuits Syst. I. – 1995. – **42**. – P. 559 – 577.
2. *Нижник И. Л.* Пространственно-временной анализ решений для нелинейных цепочек. – Киев, 1998. – 32 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; № 98.1).

Получено 11.02.98