УДК 519.65

А. А. Половина (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ХАУСДОРФОВ ДИАМЕТР ОДНОГО НЕСИММЕТРИЧНОГО КЛАССА ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

In the space of parametrically determined m-dimensional curves with the Hausdorff metric, we find the diameter of a class of curves whose coordinate functions satisfy the Lipschitz condition on some segment and take fixed values at its endpoints. We obtain the dependence of relations determining the value of diameter on the eveness of m.

У просторі параметрично заданих m–вимірних кривих з хаусдорфовою метрикою знайдено діаметр класа кривих, координатні функції якиих задовольняють умову Ліпшіця на деякому відрізку і мають фіксовані значення на його кінцях. Отримано залежність формул, що визначають величину діаметра, від парності m.

При исследовании вопросов теориии приближения и смежных областей возникает задача нахождения или оценки диаметра некоторого множества. Диаметр любого множества, очевидно, зависит как от свойств этого множества, так и от метрики пространства. В пространстве векторозначных функций часто рассматривается хаусдорфово расстояние, которое довольно естественно отображает геометрическую близость графиков функций (см., например, [1–3]).

Пусть дано метрическое пространство X векторозначных функций $\overline{\varphi}(t) = \{\varphi_i(t)\}_{i=1}^m$, $t \in [0, 1]$, $m \geq 2$, графики которых — параметрически заданные кривые в пространстве R^m с евклидовой метрикой $r(P, Q)$. Хаусдорфово расстояние между элементами пространства X определим [1] равенством

$$h(\overline{\varphi}(t), \overline{\psi}(t)) = \max\left\{ \sup_{0\le u\le 1} \inf_{0\le s\le 1} r(\overline{\varphi}(u), \overline{\psi}(s)),\ \inf_{0\le u\le 1} \sup_{0\le s\le 1} r(\overline{\varphi}(u), \overline{\psi}(s)) \right\}.$$

Класс $\mathfrak{M}_{K,l}^m[0, 1] = \mathfrak{M}_{K,l}^m$ определен следующим образом:

$$\mathfrak{M}_{K,l}^m = \{\overline{\varphi}(t) = \{\varphi_i(t)\}_{i=1}^m : \varphi_i(t) \in KH_l^1,\ i = 1, \ldots, m\},$$

где K — заданное положительное число, $|l| \leq K$,

$$KH_l^1 = \{f(t): |f(t') - f(t'')| \leq$$

$$\leq K|t' - t''|,\ t', t'' \in [0, 1],\ f(0) = 0,\ f(1) = l\}.$$

Задача состоит в отыскании диаметра множества $\mathfrak{M}_{K,l}^m$ относительно хаусдорфовой метрики, т. е.

$$\operatorname{diam}_h \mathfrak{M}_{K,l}^m = \sup\{h(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) : \overline{\varphi}(t), \overline{\psi}(t) \in \mathfrak{M}_{K,l}^m\}. \tag{1}$$

Сразу же отметим простой факт, касающийся свойств хаусдорфового диаметра любого класса $\mathfrak{N}$ вектор-функций. Если для функций из $\mathfrak{N}$ введем в рассмотрение величины

$$h'(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \sup_{0\le u\le 1} \inf_{0\le s\le 1} r(\overline{\varphi}(u), \overline{\psi}(s)),$$

$$h''(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \sup_{0\le s\le 1} \inf_{0\le u\le 1} r(\overline{\varphi}(u), \overline{\psi}(s)),$$

то вместо формулы (1) можно пользоваться более простым равенством

$$\operatorname{diam}_h \mathfrak{N} = \sup\{h'(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) : \overline{\varphi}(t), \overline{\psi}(t) \in \mathfrak{N}\},$$

хотя в общем $h'(\overline{\varphi},\overline{\psi})$ и $h''(\overline{\varphi},\overline{\psi})$ не равны.

Случай, когда $l=0$ довольно прост (см. доказательство предложения 3 в [3]), и без ограничения общности можно считать, что $l>0$. В дальнейшем будут удобны следующие обозначения:

$$t_1 = \frac{K-l}{2K}, \quad t_2 = \frac{K+l}{2K}, \quad \Delta_1 = [0, t_1], \quad \Delta_2 = [t_1, t_2],$$

$$\Delta_3 = [t_2, 1]; \quad O = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m, \quad L = (l, l, \ldots l) \in \mathbb{R}^m;$$

$$h_j(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \sup_{u \in \Delta_j} \inf_{0 \le s \le 1} r(\overline{\varphi}(u), \overline{\psi}(s)), \quad \varphi(t)\psi(t) \in X, \ j = 1, 2, 3,$$

$$d_j(\mathfrak{M}^m_{K,l}) = \sup\{h_j(\overline{\varphi}(t), \overline{\psi}(t)) : \overline{\varphi}(t), \overline{\psi}(t) \in \mathfrak{M}^m_{K,l}\}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Оценку диаметра сверху будем искать как наибольшую из оценок сверху величин $d_j(\mathfrak{M}^m_{K,l})$, $j = 1, 2, 3$. Оценку $d_1(\mathfrak{M}^m_{K,l})$ получим из неравенств

$$h_1(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \le \sup_{0 \le u \le t_1} r(\overline{\varphi}(u), \overline{\varphi}(0)) \le \frac{K-l}{2}\sqrt{m}, \tag{2}$$

которые выполняются для любых $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ из $\mathfrak{M}^m_{K,l}$. Такая же оценка аналогично получается для $d_3(\mathfrak{M}^m_{K,l})$, и нам остается оценить $d_2(\mathfrak{M}^m_{K,l})$.

Предложение. *Для класса вектор-функций* $\mathfrak{M}^m_{K,l}$ *выполняется неравенство*

$$d_2(\mathfrak{M}^m_{K,l}) \le (K-l)\sqrt{m} \quad \textit{при четном } m, \tag{3}$$

$$d_2(\mathfrak{M}^m_{K,l}) \le (K-l)\sqrt{\frac{m^2-1}{m}} \quad \textit{при нечетном } m. \tag{3$'$}$$

Доказательство. Класс вектор-функций

$$\mathfrak{N}^m_{K,l} = \{\overline{\varphi}(t) = \{\varphi_i(t)\}^m_{i=1} : Kt - (K-l) \le \varphi_i(t) \le Kt, \ t \in \mathfrak{N}^m_{K,l}, \ i = 1, \ldots, m\}$$

включает в себя класс $\mathfrak{M}^m_{K,l}$, следовательно, $d_2(\mathfrak{M}^m_{K,l}) \le d_2(\mathfrak{N}^m_{K,l})$.

Значения координатных функций любой вектор-функции $\overline{\varphi}(t) = \{\varphi_i(t)\}^m_{i=1}$ из $\mathfrak{N}^m_{K,l}$ в точке $t \in [0, 1]$ можно представить в виде

$$\varphi_i(t) = Kt - \xi(\varphi_i, t)(K-l), \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $\xi(\varphi_i, t)$ — числа, принадлежащие отрезку $[0, 1]$, $i = 1, \ldots, m$. Воспользовавшись этим представлением для $\overline{\varphi}(t)$ и $\overline{\psi}(t)$ из $\mathfrak{N}^m_{K,l}$, получим

$$\sup_{u \in \Delta_2} \inf_{0 \le s \le 1} \sum_{i=1}^m (K(u-s) - (\xi(\varphi_i, t) - \xi(\psi_i, t))(K-l))^2 .$$

Таким образом, для функции $S(\overline{\eta})$ от вектора $\overline{\eta} = \{\eta_i\}^m_{i=1}$

$$S(\overline{\eta}) = \sup_{u \in \Delta_2} \inf_{0 \le s \le 1} \sum_{i=1}^m (K(u-s) - \eta_i(K-l))^2, \tag{4}$$

учитывая, что разность $\xi(\varphi_i, t) - \xi(\psi_i, t)$ всегда принадлежит $[-1, 1]$, выполняется неравенство

$$\sup\{ h_2^2(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) : \overline{\varphi}(t),\ \overline{\psi}(t) \in \mathfrak{N}_{K,l}^m \} \le$$

$$\le \sup\{S(\overline{\eta}) : \overline{\eta} = \{\eta_i\}_{i=1}^m, \quad \eta_i \in [-1, 1]\}, \tag{5}$$

и оценивание сверху $d_2(\mathfrak{N}_{K,l}^m)$ сводится к поиску такого $\overline{\eta}^*$, при котором функция $S(\overline{\eta})$ будет достигать наибольшего значения.

При любых u и s выражение $\sum_{i=1}^m (K(u-s) - \eta_i(K-l))^2$ для каждого η_i будет достигать максимума либо при $\eta^* = 1$, либо при $\eta^* = -1$. Если $\overline{\eta}^*$ содержит n координат, равных 1, а остальные равны -1, то

$$S(\overline{\eta}^*) = \sup_{u \in \Delta_2} \inf_{0 \le s \le 1} m(K(u-s) -$$

$$- \frac{m-2n}{m}(K-l))^2 + \left(m - \frac{(m-2n)^2}{m}\right)(K-l)^2. \tag{6}$$

При четном m в выражении (6) максимум будет достигаться при $n = m/2$ и будет равен $S(\overline{\eta}^*) = m(K-l)^2$, где $\overline{\eta}^*$ — вектор, половина координат которого равны 1, а остальные равны -1; при нечетном m в выражении (6) максимум будет достигаться при $n = \dfrac{m \pm 1}{2}$ и будет равен

$$S(\overline{\eta}^*) = \frac{m^2-1}{m}(K-l)^2,$$

где $\overline{\eta}^*$ — вектор, $\dfrac{m \pm 1}{2}$ координат которого равны 1, а остальные равны -1. Учитывая неравенство (5), приходим к утверждению предложения 1.

Следующее утверждение дает нам уже точное значение диаметра.

Теорема. *Хаусдорфов диаметр класса вектор-функций* $\mathfrak{M}_{K,l}^m$ *при* $m \ge 2$ *определяется равенством*

$$\operatorname{diam}_h \mathfrak{M}_{K,l}^m = \min\left\{(K-l)\sqrt{m}, \sqrt{\frac{(K-l)^2 + l^2}{4} m}\right\} \quad \textit{при четном} \quad m,$$

$$\operatorname{diam}_h \mathfrak{M}_{K,l}^m =$$

$$= \max\left\{\frac{K-l}{2}\sqrt{m}, \min\left\{\sqrt{\frac{m^2-1}{m}}(K-l), \sqrt{m\frac{l^2}{4} + \frac{m^2-1}{m}\frac{(K-l)}{4}}\right\}\right\} \quad \textit{при нечетном} \ m.$$

Доказательство. В утверждении теоремы указаны, уже полученные в (2), (3), и (3′) оценки, и новые величины могут играть какую-то роль только при условии

$$2(K-l) \le \sqrt{(K-l)^2 + l^2} \quad \text{при четном} \quad m, \tag{7}$$

$$\frac{K-l}{2}\sqrt{m} \le \sqrt{m\frac{l^2}{4} + \frac{m^2-1}{m}\frac{(K-l)}{4}} \le \sqrt{\frac{m^2-1}{m}}(K-l) \quad \text{при нечетном} \quad m,$$

Причем, в случае как четного, так и нечетного m новые величины имеет смысл рассматривать лишь в отношении $d_2(\mathfrak{M}^m_{K,l})$.

Функции $\overline{\varphi}(t)$ из $\mathfrak{M}^m_{K,l}$ сопоставим величину

$$\delta_{\overline{\varphi}}(t) = \min\{r^2(\overline{\varphi}(t), O), r^2(\overline{\varphi}(t), L)\}, t \in \Delta_2.$$

Для нее, очевидно, будут выполняться неравенства

$$\delta_{\overline{\varphi}}(t) \le \max_{u\in\Delta_2} r^2(\overline{\varphi}(u), O), \quad \delta_{\overline{\varphi}}(t) \le \max_{u\in\Delta_2} r^2(\overline{\varphi}(u), L), \qquad t \in \Delta_2.$$

Кроме того, для любой другой функции $\overline{\psi}(t)$ из $\mathfrak{M}^m_{K,l}$

$$h_2^2(\overline{\varphi},\overline{\psi}) \le \sup_{u\in\Delta_2} \inf_{s\in\{0,1\}} r^2(\overline{\varphi}(u),\overline{\psi}(s)) =$$

$$= \min\{r^2(\overline{\varphi}(t), O), r^2(\overline{\varphi}(t), L)\} = \delta_{\overline{\varphi}}(t),$$

следовательно, выполняется неравенство

$$d_2^2(\mathfrak{M}^m_{K,l}) \le \sup\{\sup_{u\in\Delta_2} \delta_{\overline{\varphi}}(u):\ \overline{\varphi} \in \mathfrak{M}^m_{K,l}\}.$$

Оказывается, что оно будет выполняться и тогда, когда точную верхнюю грань в его правой части будем брать только по функциям вида

$$\overline{k}(t) = \{k_i(t)\}_{i=1}^m : k_i(t) = Kt - \lambda_i(K-l),$$

$$\lambda_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, m, \qquad t \in \Delta_2, \tag{8}$$

что значительно упрощает нашу задачу. Из оценки величины $\sup\limits_{u\in\Delta_2} \delta_{\overline{k}}(u)$ на классе функций (8) с учетом (7) следует, что выражения, стоящие в правых частях равенств из утверждения теоремы, являются оценками сверху диаметра.

Нетрудно убедиться в точности полученных оценок.

1. *Сендов Бл.* Хаусдорфовы приближения. – София: Изд-во Болгар. АН. – 1979. – 372 с.
2. *Корнейчук Н. П.* Об оптимальном кодировании вектор-функций // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 6. – С. 737–744.
3. *Половина А. А.* Оптимальное кодирование одного класса вектор-функций // Там же. – 1997. – **49**, № 12 – С. 1638–1645.

Одержано 02.06.97