УДК 517.43

М. Н. Феллер (УкрНИИМОД, Киев)

ЗАДАЧА РИКЬЕРА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ, РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ИТЕРИРОВАННОГО ЛАПЛАСИАНА ЛЕВИ

Solutions are found for the nonlinear equation $\Delta_L^2 U(x) = f(U(x))$ (here, Δ_L is an infinite-dimensional Laplacian) which is solved with respect to the iterated infinite-dimensional Laplacian. The Riquier problems are stated for an equation of this sort.

Одержано розв'язки нелінійного рівняння $\Delta_L^2 U(x) = f(U(x))$ (Δ_L — нескінченновимірний лапласіан), яке розв'язне відносно ітерованого нескінченновимірного лапласіана, та задачі Рік'єра для такого рівняння.

Уравнения с итерированными лапласианами Леви (бесконечномерный лапласиан введен П. Леви [1]) изучались Е. М. Полищуком — линейные уравнения в итерированных лапласианах m-го порядка [2], Г. Е. Шиловым — система нелинейных уравнений, разрешенных относительно лапласиана Леви (к такой системе приводится нелинейное уравнение, разрешенное относительно интерированного лапласиана m-го порядка) [3], автором — полигармоническое уравнение [4].

В этой статье получено решение нелинейного уравнения, разрешенного относительно интерированного лапласиана Леви, не содержащего независимую переменную и лапласиан Леви $\Delta_L^2 U(x) = f(U(x))$, где $U(x)$ — искомая функция на гильбертовом пространстве, $f(\xi)$ — заданная функция одной переменной, и получено решение задачи Рикьера для такого уравнения.

1. Пусть H — счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции $F(x)$ на H.

Бесконечномерный лапласиан П. Леви ввел формулой

$$\Delta_L F(x_0) = 2 \lim_{p \to 0} \frac{\mathfrak{M}_{(x_0,\rho)} F(x) - F(x_0)}{\rho^2},$$

где $\mathfrak{M}_{(x_0,\rho)} F(x)$ — среднее значение функции $F(x)$ по сфере $\| x - x_0 \|_H^2 = \rho^2$ [1]. Если функция $F(x)$ — дважды сильно дифферируема в точке x_0, существует $\mathfrak{M}_{(0,1)}\big(F''(x_0)x, x\big)_H$ и, кроме того, $F(x)$ имеет среднее $\mathfrak{M}_{(x_0,\rho)} F(x)$, $\rho < \rho_0$, то $\Delta_L F(x_0)$ существует и

$$\Delta_L F(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (F''(x_0) f_k, f_k)_H,$$

где $F''(x)$ — гессиан функции $F(x)$, $\{f_k\}_1^\infty$ — выбранный ортонормированный базис в H [5].

Отметим следующее свойство лапласиана Леви. Пусть функция $F(x) = f(U_1(x), \ldots, U_m(x))$, где $f(u_1, \ldots, u_m)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция m переменных в области значений $\{u_1(x), \ldots, u_m(x)\}$ в $\mathbb{R}^m$, $U_j(x)$ — дважды сильно дифференцируемые функции и $\Delta_L U_j(x)$ — существуют, $j = 1, \ldots, m$. Тогда $\Delta_L F(x)$ существует и [1]

$$\Delta_L F(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j}\bigg|_{u_j = U_j(x)} \Delta_L U_j(x). \tag{1}$$

2. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\Delta_L^2 U(x) = f(U(x)), \tag{2}$$

где $f(\xi)$ — заданная функция на $\mathbb{R}^1$.

Теорема. *Пусть $f(\xi)$ — непрерывная функция одной переменной в области значений $\{U(x)\}$ в $\mathbb{R}^1$. Тогда решение уравнения* (2) *(в неявной форме) имеет вид*

$$\Phi_0(U(x), \Psi_0(x), \Psi_1(x)) = \frac{1}{2}\| x \|_H^2, \tag{3}$$

где

$$\Phi_0(\xi, c_0, c_1) = \int \frac{d\xi}{\Phi_1(\xi, c_1)} + c_0, \quad \Phi_1(\xi, c_1) = \pm\sqrt{2\int f(\xi) d\xi + c_1},$$

$\Psi_0(x)$, $\Psi_1(x)$ — *произвольные гармонические функции на* H. *При этом*

$$\Delta_L U(x) = \Phi_1(U(x), \Psi_1(x)). \tag{4}$$

Если выражения (3), (4) *разрешимы относительно* $\Psi_0(x)$, $\Psi_1(x)$, т. е. $\Psi_0(x) = \varphi_0(\| x \|_H^2, U(x), \Delta_L U(x))$ ($\varphi_0(\alpha, \xi, \eta)$ — *функция на* $\mathbb{R}^3$), $\Psi_1(x) = \varphi_1(U(x), \Delta_L U(x))$ ($\varphi_1(\xi, \eta)$ — *функция на* $\mathbb{R}^2$), *то решение задачи Рикьера для уравнения* (2)

$$\Delta_L^2 U(x) = f(U(x)) \text{ в } \Omega, \quad U(x) = G_0(x), \quad \Delta_L U(x) = G_1(x) \text{ на } \Gamma,$$

где $\overline{\Omega}\sigma = \Omega \cup \Gamma$, Ω — *ограниченная область пространства* H *с границей* Γ, $G_0(x)$, $G_1(x)$ — *заданные функции, сводится к решению двух задач Дирихле для уравнений Лапласа–Леви**

$$\Delta_L \Psi_0(x) = 0 \text{ в } \Omega, \quad \Psi_0\big|_\Gamma = \varphi_0\left(\| x \|_H^2\big|_\Gamma, G_0(x), G_1(x)\right),$$

$$\Delta_L \Psi_1(x) = 0 \text{ в } \Omega, \quad \Psi_1\big|_\Gamma = \varphi_1(G_0(x), G_1(x)).$$

Доказательство. Из (3), воспользовавшись формулой (1) при $m = 3$, имеем

$$\frac{\partial \Phi_0(U(x), \Psi_0(x), \Psi_1(x))}{\partial \xi} \Delta_L U(x) + \frac{\partial \Phi_0(U(x), \Psi_0(x), \Psi_1(x))}{\partial c_0} \Delta_L \Psi_0(x) +$$

$$+ \frac{\partial \Phi_0(U(x), \Psi_0(x), \Psi_1(x))}{\partial c_1} \Delta_L \Psi_1(x) = 1.$$

Поскольку

$$\frac{\partial \Phi_0(\xi, c_0, c_1)}{\partial \xi} = \frac{1}{\Phi_1(\xi, c_0)},$$

*Задача Дирихле для уравнения Лапласа–Леви в разных функциональных классах изучалась во многих работах (см. библиографию к [5]).

а $\Delta_L\Psi_0(x) = \Delta_L\Psi_1(x) = 0$, то $\Delta_L U(x) = \Phi_1(U(x), \Psi_1(x))$ (формула (4)). Отсюда, воспользовавшись (1) при $m = 2$, получаем

$$\Delta_L^2 U(x) = \frac{\partial\Phi_1(U(x), \Psi_1(x))}{\partial\xi}\Delta_L U(x) + \frac{\partial\Phi_1(U(x), \Psi_1(x))}{\partial c_1}\Delta_L\Psi_1(x).$$

Поскольку

$$\frac{\partial\Phi_1(\xi, c_1)}{\partial\xi} = \frac{f(\xi)}{\pm\sqrt{2\int f(\xi)d\xi + c_1}} = \frac{f(\xi)}{\Phi_1(\xi, c_1)},$$

а $\Delta_L\Psi_1(x) = 0$, то

$$\Delta_L^2 U(x) = \frac{f(U(x))}{\Phi_1(U(x), \psi_1(x))}\Delta_L U(x).$$

Однако $\Delta_L U(x) = \Phi_1(U(x), \Psi_1(x))$, поэтому $\Delta_L^2 U(x) = f(U(x))$.

Заключительное утверждение теоремы очевидно.

Заметим, что решение задачи Рикьера для бигармонического уравнения, т. е. в случае $f(\xi) = 0$, приведено в [4].

Пример. Решим задачу Рикьера в единичном шаре $L_2(0, 1)$ для уравнения

$$\Delta_L^2 U(x) = e^{U(x)}, \tag{5}$$

$$U\Big|_{\|x\|^2_{L_2(0,1)}=1} = \int_0^1 \cos x(s)ds, \qquad \Delta_L U\Big|_{\|x\|^2_{L_2(0,1)}=1} = \sqrt{3}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 \cos x(s)\,ds\right\}. \tag{6}$$

Для уравнения (5) $f(\xi) = e^{\xi}$, поэтому

$$\Phi_1(\xi, c_1) = \pm\sqrt{2e^{\xi} + c_1}, \quad \Phi_0(\xi, c_0, c_1) =$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\frac{\sqrt{2e^{\xi} + c_1} - \sqrt{c_1}}{\sqrt{2e^{\xi} + c_1} + \sqrt{c_1}} + c_0, \qquad c_1 > 0.$$

Воспользовавшись формулой (3), получаем решение уравнения (5)

$$U(x) = \ln\left\{\frac{1}{2}\Psi_1(x)\,\mathrm{sh}^{-2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\Psi_1(x)}\left(\frac{1}{2}\|x\|^2_{L_2(0,1)} - \Psi_0(x)\right)\right]\right\}, \tag{7}$$

причем

$$\Delta_L U(x) = \pm\sqrt{2e^{U(x)} - \Psi_1(x)}, \tag{8}$$

где $\Psi_0(x), \Psi_1(x)$ — гармонические функции.

Из уравнений (7), (8) находим

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2_{L_2(0,1)} - \left[(\Delta_L U(x))^2 - 2e^{U(x)}\right]^{-1/2}\ln\left\{\left[(\Delta_L U(x))^2 e^{-U(x)} - 1\right] \pm\right.$$

$$\left.\pm\left[(\Delta_L U(x))^4 e^{-2U(x)} - 2(\Delta_L U(x))^2 e^{-U(x)}\right]^{1/2}\right\},$$

$$\Psi_1(x) = (\Delta_L U(x))^2 - 2e^{U(x)}$$

и из (6) имеем

$$\Psi_0\Big|_{\|x\|^2_{L_2(0,1)}=1} = \frac{1}{2} - \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^1 \cos x(s)\,ds\right\}\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right),$$

$$\Psi_1\Big|_{\|x\|^2_{L_2(0,1)}=1} = \exp\left\{\int_0^1 \cos x(s)\,ds\right\}.$$

Решениями задач Дирихле в единичном шаре $L_2(0, 1)$ для уравнений Лапласа – Леви являются:

для задачи $\Delta_L \Psi_0(x) = 0$

$$\Psi_0\Big|_{\|x\|^2_{L_2(0,1)}=1} = \frac{1}{2} - \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^1 \cos x(s)\,ds\right\}\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right),$$

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{2} - \exp\left\{-\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\int_0^1 x(s)^2\,ds\right)\right\}\int_0^1 \cos x(s)ds\right\}\ln(2\pm\sqrt{3}), \qquad (9)$$

для задачи $\Delta_L \Psi_1(x) = 0$

$$\Psi_1\Big|_{\|x\|^2_{L_2(0,1)}=1} = \exp\left\{\int_0^1 \cos x(s)ds\right\},$$

$$\Psi_1(x) = \exp\left\{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\int_0^1 x(s)^2\,ds\right)\right\}\int_0^1 \cos x(s)\,ds\right\}. \qquad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (7), получаем решение задачи (5), (6):

$$U(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\exp\left\{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\int_0^1 x(s)^2 ds\right)\right\}\int_0^1 \cos x(s)ds\right\} \times\right.$$

$$\times\ \mathrm{sh}^{-2}\left[\frac{1}{4}\exp\left\{\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\int_0^1 x(s)^2\,ds\right)\right\}\int_0^1 \cos x(s)\,ds\right\} \times\right.$$

$$\left.\left.\times\ \left(\|x\|^2_{L_2(0,1)}-1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right.\right]\right).$$

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. – М.: Наука, 1967. – 512 с.
2. *Полищук Е. М.* Линейные уравнения в функциональных лапласианах // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 2. – С. 163–170.
3. *Шилов Г. Е.* О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. III // Мат. сб. – 1967. – **74** (**116**), № 1. – С. 161–168.
4. *Феллер М. Н.* Про полігармонічне рівняння у функціональному просторі // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – № 11. – С. 1005–1011.
5. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные эллиптические уравнения и операторы типа П. Леви // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 4. – С. 97–140.

Получено 23.07.96