УДК 512.547.2

П. В. Філевич (Львів. ун-т)

ДО ТЕОРЕМИ ЛОНДОНА ПРО СПІВВІДНОШЕННЯ БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Estimate exact in a certain sense is obtained for the value of exceptional set in the Borel relation for entire functions.

Отримано в певному сенсі точну оцінку величини виняткової множини у співвідношенні Бореля для цілих функцій.

Вступ. Для цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

з $G(r,f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ і максимальним членом $\mu(r,f)$ справджується наступне співвідношення Е. Бореля [1]:

$$\ln G(r,f) \sim \ln \mu(r,f), \quad r \to +\infty \text{ при } r \in \{r_n\}, \tag{2}$$

де $r_n \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$.

Цей факт випливає також з відомої теореми А. Вімана [2]: для довільної цілої функції $f(z)$ вигляду (1) і довільного $\delta > 0$

$$G(r,f) \le \mu(r,f) \ln^{1/2+\delta} \mu(r,f) \tag{3}$$

при $r \in \{r_n\}$, де $r_n \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$. Як помітив Ж. Валірон [3], виняткова множина $E_1(\delta)$, зовні якої виконується нерівність (3), має скінченну логарифмічну міру, тобто $\int_{E_1(\delta) \cap [1;+\infty)} d(\ln r) < \infty$. Зрозуміло, що тоді співвідношення Бореля виконується зовні цієї множини.

У 1970 р. Р. Лондон [4], скориставшись теоретико-ймовірнісним підходом П. Розенблума [5] до одержання оцінок типу (3), встановив, що виняткова множина E_1 у співвідношенні (2) має скінченну міру: $\int_{E_1(\delta) \cap [1;+\infty)} dr < \infty$.

У зв'язку з переліченими результатами, а також з тим, що виняткова множина у співвідношенні Бореля, взагалі кажучи, міститься виняткова множина (див., наприклад, [6]), виникають природні питання про можливість покращення одержаної в [4] оцінки величини виняткової множини, а також про отримання в деякому сенсі точного описання цієї множини. Відповідь на ці питання і дають наведені нижче теореми 1 та 2.

Введемо спачатку поняття h-міри. Нехай $h(x)$ — додатна і інтегрована на кожному відрізку $[a;b] \subset [1;+\infty)$ функція, для якої $\int_1^{+\infty} h(x)\,dx = +\infty$. Клас таких функцій позначимо через L, а для вимірної множини $E \subset \mathbb{R}$ її h-мірою назвемо величину $h\text{–meas}\, E = \int_{E \cap [1;+\infty)} h(x)\,dx$.

Теорема 1. *Нехай* $f(z)$ — *ціла функція вигляду* (1), *а* $h \in L$ *така, що* $\ln h(r) = o(\ln G(r,f))$, $r \to +\infty$. *Тоді для довільного* $\varepsilon \in (0;1)$ *співвідношення* (2) *виконується зовні множини* $E_2 = E_2(\varepsilon)$ *такої, що*

$$h\text{–meas}\, E_2 \le \int_{E_2 \cap [1;+\infty)} \left(\frac{G'(r,f)}{G(r,f)} \right)^{1-\varepsilon} dr < +\infty.$$

© П. В. ФІЛЕВИЧ, 1998

Теорема 2. *Якщо для цілої функції* $f(z)$ *вигляду* (1) *існує таке* $h > 1$, *що*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln G(r, f)}{\ln \mu(r, f)} > h,$$

то для множини $E_3 = \{r \geq 1 : \ln G(r, f) > h \ln \mu(r, f)\}$ *виконується рівність*

$$\int_{E_3} \frac{G'(r, f)}{G(r, f)} dr = +\infty.$$

Зауважимо, що оскільки функція $\ln G(r, f)$ — опукла відносно $\ln r$, то функція $K(r, f) = rG'(r, f)/G(r, f)$ є неспадною, а тому

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{G'(r, f)}{G(r, f)}\right)^{1-\varepsilon} dr = \int_1^{+\infty} (K(r, f))^{1-\varepsilon} \frac{dr}{r^{1-\varepsilon}} = +\infty, \quad \varepsilon \in [0, 1].$$

Крім цього, як це буде видно з доведення теореми 1, на множині E_2 виконується нерівність $G'(r, f)/G(r, f) > 1$. Із теорем 1 і 2 випливає, що застосування h_ε-міри, де $h_\varepsilon(r) = (G'(r, f)/G(r, f))^{1-\varepsilon}$, дає точне описання виняткової множини в тому сенсі, що $\varepsilon > 0$ не можна замінити на $\varepsilon = 0$. З теореми 1 одержуємо також наступний наслідок.

Наслідок. Для довільної цілої функції $f(z)$ вигляду (1) співвідношення Бореля виконується зовні множини E_4 такої, що для кожного $n \geq 0$

$$\int_{E_4 \cap (1; +\infty)} r^n dr < +\infty.$$

Доведення. Зрозуміло, що досить довести наслідок для трансцендентних цілих функцій, оскільки для многочленів виняткова множина в (2) відсутня.

Нехай

$$\frac{\ln G(r, f)}{\ln r} = b(r, f) \nearrow +\infty, \quad r \to +\infty. \tag{4}$$

Виберемо в теоремі 1 $\ln h(r) = \sqrt{b(r, f)\ln r}$, а $\varepsilon = 1/2$. Оскільки $r^n < h(r)$, то співвідношення (2) буде виконуватись зовні множини $E_4 = E_2(1/2)$. Наслідок доведено.

***Доведення теореми* 1.** Вважаємо, що $f(z)$ — трансцендентна ціла функція.

Нехай $B(r) = \max\left\{(h(r))^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}; \ln^2 G(r, f)\right\}$. Розглянемо множину E_2 тих $r \geq 1$, для яких виконується кожна з нерівностей $(G'(r, f)/G(r, f))^{\varepsilon} > B(r)$, $G(r, f) > e$. Зовні цієї множини при довільному $C > 0$ маємо

$$G(r, f) \leq \sum_{n<C} |a_n| r^n + \frac{1}{C} \sum_{n \geq C} n|a_n| r^n \leq$$

$$\leq C\mu(r, f) + \frac{r}{C} G'(r, f) \leq C\mu(r, f) + \frac{r}{C} G(r, f) B^{1/\varepsilon}(r).$$

Вибираючи $C = (rG(r, f)B^{1/\varepsilon}(r)/\mu(r, f))^{1/2}$, а також враховуючи (4), отримуємо $G(r, f) \leq r\mu(r, f)B^{1/\varepsilon}(r)$, звідки

$$\ln G(r, f) \sim \ln \mu(r, f), \quad r \to +\infty, \; r \notin E_2.$$

Оскільки $(G'(r, f)/G(r, f))^{\varepsilon} > \ln^2 G(r, f)$ для $r \in E_2$, то

$$\int_{E_2 \cap [1;+\infty)} \left(\frac{G'(r,f)}{G(r,f)} \right)^{1-\varepsilon} dr < \int_{E_2 \cap [1;+\infty)} \frac{G'(r,f)}{G(r,f) \ln^2 G(r,f)} dr =$$

$$= \int_{E_2 \cap [1;+\infty)} \frac{d \ln G(r,f)}{\ln^2 G(r,f)} dr \leq \int_1^\infty \frac{dy}{y^2} < \infty.$$

Теорему 1 доведено.

Доведення теореми 2. Теорема 2 випливає з наступного більш загального твердження.

Твердження. *Нехай* $\alpha(x)$ *і* $\beta(x)$ — *додатні, диференційовні, строго зростаючі до* $+\infty$ *на* $[1;+\infty)$ *функції. Якщо існує таке число* h, *що*

$$\varliminf_{x \to +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} < h < \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

то для множини $E(h) = \{x \geq 1 : \alpha(x) > h\beta(x)\}$

$$\int_{E(h) \cap [1;+\infty)} d\alpha(x) = \int_{E(h) \cap [1;+\infty)} d\beta(x) = \infty.$$

Доведення. Зрозуміло, що $E(h) = \bigcup_{n=1}^\infty (a_n; b_n)$, $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots$, $a_n \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$, оскільки кожна відкрита на $\mathbb{R}$ множина є об'єднанням зліченної кількості інтервалів. Ясно також, що $\alpha(a_n) = h\beta(a_n)$, $\alpha(b_n) = h\beta(b_n)$, $n \geq 1$.

Доведемо рівність $\varlimsup_{n \to +\infty} (\beta(b_n) - \beta(a_n)) = +\infty$, з якої і випливатиме справедливість даного твердження. Нехай t — довільне число таке, що

$$\varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} > t > h.$$

Тоді $E(T) = \bigcup_{n=1}^\infty (c_n; d_n)$, де $c_1 < d_1 \leq c_2 < d_2 \leq \ldots, c_n \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$, а $\alpha(d_n) = t\beta(d_n)$, $n \geq 1$.

Кожен з інтервалів (c_j, d_j), $j, n \geq 1$, міститься в деякому інтервалі (a_{n_j}, b_{n_j}). Якщо $\varlimsup_{j \to +\infty} \left(\beta(b_{n_j}) - \beta(a_{n_j}) \right) < +\infty$, то існує таке K, що $\beta(b_{n_j}) \leq K + \beta(a_{n_j})$, $j \geq 1$. Але тоді при $j \to +\infty$

$$\alpha(d_j) \leq \alpha(b_{n_j}) = h\beta(b_{n_j}) \leq h(K + \beta(a_{n_j})) =$$

$$= (h + o(1))\beta(a_{n_j}) < t\beta(a_{n_j}) \leq t\beta(d_j).$$

Отримали суперечність з тим, що $\alpha(d_j) = t\beta(d_j)$. Твердження доведено, а разом з ним доведно і теорему 2.

1. *Borel E.* Lesons sur les fonctions entieres. – Paris: Gauthier–Vilars, 1921.
2. *Wiman A.* Über dem Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Function und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorischen Reihe // Acta Math. – 1914. – **37**. – P. 305–326.
3. *Valiron G.* Lectures on the general theory of integral function. – Toulouse, 1923.
4. *London R. R.* Note on a lemma Rosenbloom // Quart. J. Math. – 1970. – **21**, № 81. – P. 67–69.
5. *Rosenbloom P.* Probability and entire functions // Stud. Math. Anal. Related Topics. – Stanford: Calif. Univ. Press, 1962. – P. 325–332.
6. *Скасків О. Б.* Про наявність виняткових значень у співвідношенні типу Бореля для цілих рядів Діріхле // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1988. – Вип. 30. – С. – 53–54.

Одержано 17.02.97