УДК 517.9

М. П. Філіпчук, Я. Й. Бігун (Чернівец. ун-т)

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ БАГАТОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

The problem of existence and approximate construction is studied for a solution of nonlinear system of differential equations with a transformed argument and linear multipoint boundary conditions.

Досліджується питання існування і наближеної побудови розв'язку нелінійної системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом та лінійними багатоточковими крайовими умовами.

Дослідженню періодичних розв'язків і розв'язків крайових задач звичайних диференціальних рівнянь чисельно-аналітичним методом присвячені монографії [1, 2]. Для крайових задач із постійним запізненням наближений розв'язок побудовано в [3]. Для одного класу систем із постійним запізненням двоточкові крайові задачі досліджувались за допомогою чисельно-аналітичного методу в [4], а для диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу — в [5, 6].

У даній роботі досліджується багатоточкова крайова задача вигляду

$$\dot{x} = f(t, x, x_\lambda), \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{N} A_i\, x(t_i) = d, \tag{2}$$

де $t \in [0, T]$; x, f, d — точки евклідового простору E_n; $x_\lambda(t) = x(\lambda(t))$, $\lambda(t)$: $[0, T] \to [0, T]$ — довільне неперервне відображення; A_i, $i = \overline{0, N}$, — сталі $(n \times n)$-матриці, $N \ge 1$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$. Відзначимо, що випадок двоточкової крайової задачі вивчався за допомогою чисельно-аналітичного методу в [5].

Функцію $f(t, x, y)$ вважатимемо визначеною і неперервною по t, x, y в області $G = [0, T] \times D \times D$, де D — замкнена обмежена область простору E_n. Припустимо, що в області G функція $f(t, x, y)$ обмежена вектором $M = (M_1, \ldots, M_n)$, $M_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, і задовольняє умову Ліпшиця по x, y з матрицею $K = \{k_{ij} \ge 0,\ i, j = \overline{1, n}\}$:

$$|f(t, x, y)| \le M, \qquad \left|f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})\right| \le K\left(\left|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\right| + \left|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\right|\right), \tag{3}$$

де $|f(t, x, y)| = \left(|f_1(t, x, y)|, \ldots, |f_n(t, x, y)|\right)$ і нерівність між векторами розуміється покомпонентно.

1. Розглянемо випадок, коли виконується умова

$$\det\left(\sum_{k=1}^{N} t_k A_k\right) \ne 0. \tag{4}$$

Позначимо через D_β множину точок $x_0 \in E_n$, які містяться в області D разом зі своїм β-околом, де

$$\beta = (E + L)MT + T\,|Hd(x_0)|,$$

$$H = \left(\sum_{k=1}^{N} t_k A_k\right)^{-1}, \qquad L = \sum_{k=1}^{N} t_k\,|HA_k|, \qquad d(x_0) = d - \left(\sum_{k=0}^{N} A_k\right)x_0.$$

Нехай множина D_β непорожня:

$$D_\beta \neq \varnothing \tag{5}$$

і найбільше власне значення $\lambda_{\max}(Q)$ матриці $Q = 2(E+L)KT$ не перевищує одиниці:

$$\lambda_{\max}(Q) < 1. \tag{6}$$

Розглянемо послідовність функцій, які визначаються рекурентним співвідношенням

$$x_0(t, x_0) = x_0,$$

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s, x_0), x_{m-1}(\lambda(s), x_0))\,ds -$$

$$- tH\sum_{k=1}^{N} A_k \int_0^{t_k} f(s, x_{m-1}(s, x_0), x_{m-1}(\lambda(s), x_0))\,ds + tHd(x_0), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

де параметр $x_0 \in E_n$.

Легко перевірити, що при довільному x_0 всі функції цієї послідовності задовольняють крайові умови (2).

Теорема 1. *Нехай функція $f(t, x, y)$ визначена, неперервна в області G і виконані умови* (3)–(6). *Тоді послідовність функцій $x_m(t, x_0)$ вигляду* (7) *рівномірно збігається при $m \to \infty$ в області $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ до граничної функції $x^*(t, x_0)$, яка задовольняє крайові умови* (2) *і є розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s), x(\lambda(s)))\,ds -$$

$$- tH\sum_{k=1}^{N} A_k \int_0^{t_k} f(s, x(s), x(\lambda(s)))\,ds + tHd(x_0), \tag{8}$$

який при $t = 0$ проходить через точку $x^*(0, x_0) = x_0$. Крім цього, $x^*(t, x_0)$ є розв'язком крайової задачі

$$\dot{x} = f(t, x, x_\lambda) + \Delta(x_0), \qquad \sum_{i=0}^{N} A_i x(t_i) = d, \tag{9}$$

де

$$\Delta(x_0) = Hd(x_0) - H\sum_{k=1}^{N} A_k \int_0^{t_k} f(t, x, x_\lambda)\,dt.$$

Для відхилення $x^*(t, x_0)$ від $x_m(t, x_0)$ при всіх $m = 1, 2, \ldots, t \in [0, T]$ вірна оцінка

$$|x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \le W_m(x_0), \qquad W_m(x_0) = Q^m (E - Q)^{-1}\beta. \tag{10}$$

Доведення. Із (7) випливає

$$|x_1(t, x_0) - x_0| \le MT + T\sum_{k=1}^{N} |HA_k| Mt_k + T|Hd(x_0)| = \beta. \tag{11}$$

Тому $x_1(t, x_0) \in D$ при $x_0 \in D_\beta$. Індукцією легко показати, що для всіх $m = 1, 2, \ldots, t \in [0, T]$ і будь-якого $x_0 \in D_\beta$ функції $x_m(t, x_0)$ вигляду (7) не виходять за межі області D.

Покладаючи $r_{m+1}(t, x_0) = |x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)|$, на підставі (7) з урахуванням (3) одержуємо

$$r_{m+1}(t, x_0) \le K\int_0^t (r_m(s, x_0) + r_m(\lambda(s), x_0))ds + $$
$$+ t\sum_{k=1}^N |HA_k|K\int_0^{t_k}(r_m(s, x_0) + r_m(\lambda(s), x_0))ds. \qquad (12)$$

Згідно з (11) $r_1(t, x_0) = |x_1(t, x_0) - x_0| \le \beta$. Тому із (12) при $m = 1$ знаходимо

$$r_2(t, x_0) \le 2K\beta t + 2t\sum_{k=1}^N |HA_k|K\beta t_k \le 2K\beta T + 2\sum_{k=1}^N t_k|HA_k|K\beta T = Q\beta.$$

Нескладно перевірити, що $r_{m+1}(t, x_0) \le Q^m\beta$, $m = 0, 1, \ldots$. Тому

$$|x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \le \sum_{i=1}^j r_{m+i}(t, x_0) \le \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\right)\beta = Q^m\left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i\right)\beta. \qquad (13)$$

На підставі умови (6)

$$\lim_{m\to\infty} Q^m = 0, \qquad \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \le (E - Q)^{-1},$$

тому із (13) одержуємо, що при $m \to \infty$ послідовність $x_m(t, x_0)$ рівномірно збігається в області $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ і $\lim_{m\to\infty} x_m(t, x_0) = x^*(t, x_0)$. Оскільки всі функції $x_m(t, x_0)$ послідовності (7) задовольняють крайові умови (2), то й гранична функція $x^*(t, x_0)$ також їх задовольняє. При $j \to \infty$ із (13) для всіх $m = 1, 2, \ldots$ і $t \in [0, T]$ отримуємо оцінку (10). Крім цього, переходячи в рівності (7) до границі при $m \to \infty$, бачимо, що функція $x^*(t, x_0)$ є розв'язком інтегрального рівняння (8), який при $t = 0$ проходить через точку $x^*(0, x_0) = x_0$. Таким чином, гранична функція $x^*(t, x_0)$ справді є розв'язком крайової задачі (9). Теорему доведено.

На підставі теореми 1 за допомогою методики, запропонованої в [2], встановлено всі наведені далі результати.

Вкажемо необхідні і достатні умови для того, щоб гранична функція $x^*(t, x_0)$ послідовності (7) була розв'язком крайової задачі (1), (2).

Теорема 2. *Нехай виконані умови теореми* 1. *Тоді для того щоб розв'язок* $x^*(t)$ *початкової задачі* $\dot{x} = f(t, x, x_\lambda)$, $x(0) = x_0^*$, *був одночасно розв'язком крайової задачі* (1), (2), *необхідно і достатньо*, щоб визначальна функція*

$$\Delta(x_0) = Hd(x_0) - H\sum_{k=1}^N A_k\int_0^{t_k} f\left(t, x^*(t, x_0), x^*(\lambda(t), x_0)\right)dt \qquad (14)$$

у точці $x_0 = x_0^*$ *перетворювалася в нуль:*

$$\Delta\left(x_0^*\right) = 0. \qquad (15)$$

При цьому $x^*(t) = x^*\left(t, x_0^*\right)$ *і для відхилення точного розв'язку* $x^*(t) = x^*\left(t, x_0^*\right)$ *крайової задачі* (1), (2) *від її наближеного розв'язку* $x_m\left(t, x_0^*\right)$ *вигляду* (7) *вірна оцінка* (10) *при* $x_0 = x_0^*$.

На підставі теореми 2 отримуємо наступний чисельно-аналітичний алгоритм побудови розв'язку крайової задачі (1), (2): при $x_0 \in D_\beta$ згідно з (7) будуємо послідовність функцій $x_m(t, x_0)$, залежну від x_0 як від параметра; знаходимо граничну функцію $x^*(t, x_0)$ цієї послідовності; складаємо визначальну функцію $\Delta(x_0)$ вигляду (14) і яким-небудь чисельним методом знаходимо розв'язок $x_0 = x_0^*$ рівняння (15); знаходимо розв'язок початкової задачі $\dot{x} = f(t, x, x_\lambda)$, $x(0) = x_0^*$, або, що те ж саме, знаходимо граничну функцію $x^*\left(t, x_0^*\right)$ послідовності $x_m\left(t, x_0^*\right)$. Отримана функція і буде точним розв'язком крайової задачі (1), (2), а за наближений розв'язок можна взяти функцію $x_m\left(t, x_0^*\right)$.

Виявляється, що існування розв'язку задачі (1), (2) можна встановити, не знаходячи граничну функцію $x^*(t, x_0)$. Розглянемо наближену визначальну функцію

$$\Delta_m(x_0) = Hd(x_0) - H\sum_{k=1}^{N} A_k \int_0^{t_k} f\left(t, x_m(t, x_0), x_m(\lambda(t), x_0)\right) dt \tag{16}$$

та наближене визначальне рівняння

$$\Delta_m(x_0) = 0. \tag{17}$$

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай виконані умови теореми* 1, *а також умови:*

а) *існує опукла замкнена область* $D_1 \subset D_\beta$, *в якій відображення* $\Delta_m : D_\beta \to \to E_n$, *визначене згідно з* (16), *має для деякого фіксованого* $m \geq 1$ *єдину особливу точку* $x_0 = x_0^m$ *ненульового індексу;*

б) *на межі* S_1 *області* D_1 *виконується нерівність*

$$\inf_{x_0 \in S_1} |\Delta_m(x_0)| > 2LKW_m(x_0).$$

Тоді крайова задача (1), (2) *має розв'язок* $x^*(t)$, *початкове значення якого*

$$x^*(0) = x_0^* \tag{18}$$

визначається значенням x_0^*, *яке належить області* D_1.

Нескладно перевірити, що

$$\left|x_m\left(t, x_0'\right) - x_m\left(t, x_0''\right)\right| \leq \left[\sum_{i=0}^{m} Q^i + \sum_{i=0}^{m-1} Q^i R_2\right]\left|x_0' - x_0''\right|,$$

$$\left|x^*\left(t, x_0'\right) - x^*\left(t, x_0''\right)\right| \leq (E-Q)^{-1}(E+R_2)\left|x_0' - x_0''\right|,$$

$$\Delta(x_0) \leq |Hd(x_0)| + LM,$$

$$\left|\Delta\left(x_0'\right) - \Delta\left(x_0''\right)\right| \leq \left(\frac{1}{T}R_2 + 2LK(E-Q)^{-1}(E+R_2)\right)\left|x_0' - x_0''\right|,$$

де $x_0', x_0'' \in D_\beta$, $R_2 = T\left|H\sum_{k=0}^{N} A_k\right|$.

Тому необхідні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай виконані умови теореми* 1. *Тоді для того щоб деяка область* $D_2 \subset D_\beta$ *містила точку* x_0^*, *яка визначає згідно з формулою* (18) *початкове значення розв'язку* $x^*(t)$ *крайової задачі* (1), (2), *необхідно, щоб для всіх* m *і довільного* $\overline{x_0} \in D_2$ *виконувалася нерівність*

$$\left|\Delta_m\left(\overline{x_0}\right)\right| \le \sup_{x_0 \in D_2}\left[\frac{1}{T}R_2 + 2LK(E-Q)^{-1}(E+R_2)\right]\left|x_0 - \overline{x_0}\right| + 2LKW_m\left(\overline{x_0}\right).$$

Зауважимо, що, аналогічно [2], на підставі теореми 4 можна вказати алгоритм вибору точок, які визначатимуть при $t = 0$ згідно з формулою (18) початкові значення розв'язків розглядуваної крайової задачі.

2. В [7] для крайових задач звичайних диференціальних рівнянь запропоновано модифікацію чисельно-аналітичного методу, де немає потреби розв'язувати визначальне рівняння. Наведемо аналогічний результат для крайової задачі (1), (2).

Теорема 5. *Нехай виконуються умови:*

а) *функція* $f(t, x, y)$ *визначена, неперервна в області* G *і задовольняє умови* (3);

б) *матриця* $S = \sum_{k=0}^{N} A_k$ *невироджена;*

в) *вектор* $w_0 = S^{-1}d$ *лежить в області* D *разом зі своїм* δ*-околом, де*

$$\delta = (ET + P)M, \qquad P = \sum_{k=0}^{N-1}\left|S^{-1}A_k\right|(T - t_k);$$

г) *найбільше власне значення* $\lambda_{\max}(\Phi)$ *матриці* $\Phi = 2(ET + P)K$ *менше одиниці.*

Тоді крайова задача (1), (2) *має в області* D *єдиний розв'язок* $x^*(t)$, *який є границею послідовних наближень*

$$x_0(t) = w_0,$$

$$x_m(t) = w_0 - \int_t^T f\left(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\lambda(s))\right)ds +$$

$$+ S^{-1}\sum_{k=0}^{N} A_k \int_{t_k}^{T} f\left(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\lambda(s))\right)ds, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

причому $\left|x^*(t) - x_m(t)\right| \le \Phi^m(E - \Phi)^{-1}\delta.$

Доведення цієї теореми можна здійснити за схемою доведення теореми 1.

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Вища шк., 1976. – 180 с.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
4. *Янчук С. В.* Дослідження неавтономних диференціальних рівнянь та системи Чуа: Дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 1997. – 111 с.
5. *Augustynowicz A., Kwapisz M.* On a numerical-analytic method of solving of boundary value problem for functional differential equation of neutral type // Math. Nachr. – 1990. – **145**. – P. 255–269.
6. *Kwapisz M.* Some remarks on an integral equation arising in applications of numerical-analytic method of solving of boundary value problems // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 1. – С. 128–132.
7. *Трофимчук Е. П., Коваленко А. В.* Численно-аналитический метод А. М. Самойленко без определяющего уравнения // Там же. – 1995. – **47**, № 1. – С. 138–140.

Одержано 19.02.97