УДК 517.956.25

М. В. Борсук, М. І. Плеша (Львів. ун-т)

ОЦІНКИ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ОБЛАСТІ З КОНІЧНОЮ ТОЧКОЮ НА МЕЖІ

We obtain a priori estimates of the second generalized derivatives (in terms of the Sobolev weighted norm) of solutions of the Dirichlet problem for elliptic equation

$$\frac{d}{dx_i}a_i(x, u, u_x) + a(x, u, u_x) = 0, \quad x \in G,$$

in a neighborhood of conical boundary point of a domain G. We give an example which demonstrates that the estimates obtained are almost exact.

Отримані апріорні оцінки других узагальнених похідних (у ваговій соболєвській нормі) розв'язків задачі Діріхле для еліптичного рівняння

$$\frac{d}{dx_i}a_i(x, u, u_x) + a(x, u, u_x) = 0, \quad x \in G,$$

в околі конічної точки межі області G. Наведено приклад, який свідчить, що отримані оцінки є майже точними.

1. Вступ. У даній роботі продовжено дослідження (розпочаті в [1, 2]) поведінки узагальнених розв'язків задачі Діріхле для дивергентного еліптичного рівняння другого порядку в околі конічної точки межі області $G \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx_i}a_i(x, u, u_x) + a(x, u, u_x) = 0, \quad x \in G; \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial G\end{gathered} \tag{1}$$

(тут і далі за парами однакових індексів вважається підсумовування від 1 до n). У роботі [1] вивчено випадок $m = 2$ (означення числа m див. нижче), а в [2] у випадку $m > 2$ одержані оцінки максимумів модуля розв'язку (1) та його градієнта в околі конічної точки межі області. Ми виведемо апріорні оцінки для других узагальнених похідних розв'язку (у ваговій соболєвській нормі) і наведемо приклад, який показує, що отримані тут і в [2] результати є майже точними. Коротка історія питання та детальна бібліографія подані в [2].

2. Основні позначення. Нехай $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка в $\mathbb{R}^n$; $r = |x|$; G — обмежена область в $\mathbb{R}^n$; $O = (0, \ldots, 0)$ — початок прямокутної системи координат; (r, ω) — сферичні координати точки $x \in \mathbb{R}^n$ з полюсом в O; Ω — область, що вирізується конусом з вершиною в O на одиничній сфері S^{n-1} з центром в O, з гладкою $(n-2)$-вимірною межею $\partial\Omega$; $G_a^b = G \cap \{(r, \omega) \mid 0 \le a < r < b;\ \omega \in \Omega\}$ — шар в $\mathbb{R}^n$; $G^{(k)} = G_{2^{-k+1}d}^{2^{-k+2}d}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $\bigcup_{k=0}^{\infty} G^{(k)} = G_0^{4d}$;

$v_{hp} = \frac{1}{h}[v(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p + h, x_{p+1}, \dots, x_n) - v(x_1, \dots, x_n)]$; $v_p^h = v(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p + h, x_{p+1}, \dots, x_n)$; $W^{k,p}(G)$ — соболєвський простір функцій, що складається з усіх елементів $L_p(G)$, які мають всі узагальнені похідні до порядку k включно, інтегровні по G із степенем p; $V^k_{p,\alpha}(G)$ — ваговий соболєвський простір функцій $u(x)$, для яких скінченна норма

$$\|u\|_{V^k_{p,\alpha}(G)} = \left(\iint_G \sum_{|\beta|=0}^{k} r^{p(|\beta| - k + \alpha/p)} \left|D^\beta u\right|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 1;$$

$\overset{\circ}{W}{}^k_\alpha = V^k_{2,\alpha}(G)$, $k \geq 0$; $\lambda = \lambda(\Omega)$ — найменше додатне власне число нелінійної задачі на власні значення (НЗВ) [3]

$$\operatorname{div}_\omega\Big((\lambda^2\psi^2 + |\nabla_\omega\psi|^2)^{(m-2)/2} \nabla_\omega\psi \Big) +$$
$$+ \lambda(\lambda(m-1) + n - m)(\lambda^2\psi^2 + |\nabla_\omega\psi|^2)^{(m-2)/2}\psi = 0, \quad \omega \in \Omega;$$
$$\psi(\omega) = 0, \quad \omega \in \partial\Omega,$$

де

$$|\nabla_\omega\psi|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} q_i^{-1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega_i}\right)^2; \quad q_1 = 1; \quad q_i = (\sin\omega_1 \dots \sin\omega_{i-1})^2, \quad i \geq 2.$$

3. Локальна оцінка в гладкій області $(m \geq 2)$. Означимо множину $\mathfrak{M} = \overline{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Надалі будемо припускати, що функції $a_i(x, u, w)$, $a(x, u, w) \in C^1(\mathfrak{M})$, $i = 1, \dots, n$, та задовольняють умови: існують числа $\mu \geq \nu > 0$ такі, що на множині $\mathfrak{M}$ виконуються нерівності

$$\nu|w|^{m-2}\xi^2 \leq \frac{\partial a_i(x, u, w)}{\partial w_j}\xi_i\xi_j \leq \mu|w|^{m-2}\xi^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial a(x, u, w)}{\partial w_j} \right|^2 \right)^{1/2} \leq \mu|w|^{m-1}, \tag{3}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i(x, u, w) - a_i(y, v, w)|^2 \right)^{1/2} |w| + |a(x, u, w) - a(y, v, w)| \leq$$
$$\leq \mu|w|^m (|x - y| + |u - v|) \quad \forall x, y \in G, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

існують функції $g(x) \in L_{(m+2)/(m-1)}(G) \cap L_{q/(m-1)}(G)$, $f(x) \in L_{(m+2)/m}(G) \cap L_{q/m}(G)$, $q > n$, такі, що

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i(x, u, 0)}{\partial x_i} \right| \leq f(x), \tag{5}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2(x, u, 0) + \left| \frac{\partial a_i(x, u, 0)}{\partial u} \right|^2 \right) \right]^{1/2} \leq g(x), \tag{6}$$

$$|a(x, u, w)| \leq \mu|w|^m + f(x). \tag{7}$$

Означення. *Узагальненим розв'язком задачі* (1) *будемо називати функцію*

$u(x) \in W^{1,m}(G)$ *таку, що для довільної* $\psi \in W_0^{1,m}(G)$ *справедлива тотожність*

$$\iint_G \left[a_i(x, u, u_x)\psi_{x_i} - a(u, u, u_x)\psi \right] dx = 0. \tag{8}$$

Зауваження 1. Покладаючи

$$a_{ij}(x, u, w) = \int_0^1 \frac{\partial a_i(x, u, \tau w)}{\partial(\tau w_j)} d\tau, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

записуємо зображення $a_i(x, u, w) = a_{ij}(x, u, w)w_j + a_i(x, u, 0)$, $i = 1, \ldots, n$. З цього зображення на підставі (2), (6) випливає нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2(x, u, w) \right)^{1/2} \le \mu |w|^{m-1} + g(x). \tag{9}$$

Далі, на підставі (2), (6) та нерівності Юнга маємо

$$a_i(x, u, w)w_i = a_{ij}(x, u, w)w_i w_j + a_i(x, u, 0)w_i \ge$$

$$\ge \frac{\nu}{2(m-1)}|w|^m - c(\nu, m)g^{m'}, \quad \text{де } \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1. \tag{10}$$

Зауваження 2. За теоремою 2.2 з гл. IX [4] припущення (2), (6), (7) забезпечують неперервність за Гельдером в $\overline{G}$ обмежених узагальнених розв'язків задачі (1), тому маємо $|u(x)| \le c_0\rho^\alpha$, $x \in G_0^{4\rho}$, де c_0, α — додатні сталі, що залежать від n, m, q, ν, μ, $M = \operatorname{ess\,sup}_{x \in G} |u(x)|$, відповідних L_p-норм функцій $f(x)$, $g(x)$ та від області G.

В подальшому вважаємо число d (>0) фіксованим, вибір якого буде вказано нижче.

Теорема 1. *Нехай* $u(x)$ — *обмежений узагальнений розв'язок задачі* (1), $u(x) \equiv 0$ *при* $|x| > 4d$, *та на множині* $\mathfrak{M}$ *виконані припущення* (2) – (7). *Тоді справедлива оцінка*

$$\iint_{G_\rho^{2\rho}} \left(|\nabla u|^{m+2} + |\nabla u|^{m-2} u_{xx}^2 \right) dx \le$$

$$\le C \iint_{G_{\rho/2}^{4\rho}} \left(\rho^{-2}|\nabla u|^m + |g(x)|^{(m+2)/(m-1)} + |f(x)|^{(m+2)/m} \right) dx, \qquad \rho \in (0, d). \tag{11}$$

Доведення. Нехай $\rho \in (0, d)$. Підставимо в інтегральну тотожність (8) функцію $\psi = \left[u_{hp}(x)\zeta^2(r) \right]_{-hp}$, де ζ — гладка функція,

$$\zeta(r) = \begin{cases} 1, & r \in [\rho, 2\rho]; \\ 0 \le \zeta(r) \le 1, & r \in [\rho/2, \rho] \cup [2\rho, 4\rho]; \\ 0, & r \in [0, \rho/2] \cup [4\rho, +\infty), \end{cases}$$

причому $|\zeta'(r)| \le c\rho^{-1}$. Скориставшись формулою „підсумовування частинами" (див. [4], гл. II, формула (4.8)), одержимо

$$\iint_{G_{\rho/2}^{4\rho}} \left\{ [a_i(x, u, u_x)]_{hp} \left((u_{hp})_{x_i} \zeta^2 + 2u_{hp}\zeta\zeta_{x_i} \right) - [a(x, u, u_x)]_{hp} \zeta^2 u_{hp} \right\} dx = 0,$$

$$[a_i(x,u,u_x)]_{hp} = (u_{hp})_{x_j}\int_0^1 \frac{\partial a_i(x,u,u_x^t)}{\partial u_{x_j}^t}dt +$$

$$+\frac{a_i\big(x_p+h,u_p^h,u_x(x_p+h)\big)-a_i\big(x,u,u_x(x_p+h)\big)}{h} \equiv \tilde a_{ij}(u_{hp})_{x_j} + \tilde b_i,$$

$$[a(x,u,u_x)]_{hp} = (u_{hp})_{x_j}\int_0^1 \frac{\partial a(x,u,u_x^t)}{\partial u_{x_j}^t}dt +$$

$$+\frac{a\big(x_p+h,u_p^h,u_x(x_p+h)\big)-a\big(x,u,u_x(x_p+h)\big)}{h} \equiv \tilde a(u_{hp})_{x_j} + \tilde b,$$

де $u^t(x)=(1-t)u(x)+tu_p^h$.

Отже,

$$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}} \tilde a_{ij}(u_{hp})_{x_i}(u_{hp})_{x_j}\zeta^2\,dx \le \iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}}\Big\{\Big|\tilde a_{ij}(u_{hp})_{x_j}u_{hp}2\zeta\zeta_{x_i}\Big| +$$

$$+\Big|\tilde b_i(u_{hp})_{x_i}\zeta^2\Big| + \Big|\tilde b_i 2u_{hp}\zeta\zeta_{x_i}\Big| + \Big|\tilde a(u_{hp})_{x_j}u_{hp}\zeta^2\Big| + \Big|\tilde b u_{hp}\zeta^2\Big|\Big\}dx. \tag{12}$$

Використовуючи нерівність

$$\int_0^1 |(1-t)x+ty|^{k-2}dt \ge c(k)(|x|+|y|)^{k-2}, \text{ де } k>1,\ c(k)>0,$$

а також умови (2) – (4), виводимо наступні нерівності:

$$c_1\big(|\nabla u|+\big|\nabla u_p^h\big|\big)^{m-2}\xi^2 \le \tilde a_{ij}\xi_i\xi_j \le c_2\big(|\nabla u|+\big|\nabla u_p^h\big|\big)^{m-2}\xi^2,$$

$$\tilde a \le \mu\big(|\nabla u|+\big|\nabla u_p^h\big|\big)^{m-1}, \qquad \tilde b_i \le \mu\big|\nabla u_p^h\big|^{m-1}\big(1+|u_{hp}|\big),$$

$$\tilde b \le \mu\big|\nabla u_p^h\big|^{m}\big(1+|u_{hp}|\big).$$

Отже, покладаючи $P_p^m = \big(|\nabla u|+\big|\nabla u_p^h\big|\big)^m$, з (12) одержуємо нерівність

$$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}} P_p^{m-2}|\nabla u_{hp}|^2\zeta^2\,dx \le c(\nu,\mu)\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}}\Big(P_p^{m-2}|\nabla u_{hp}||u_{hp}||\zeta||\nabla\zeta| +$$

$$+ P_p^{m-1}|\nabla u_{hp}|\zeta^2 + P_p^{m-1}|\nabla u_{hp}||u_{hp}|\zeta^2 + P_p^{m-1}|u_{hp}||\zeta||\nabla\zeta| +$$

$$+ P_p^{m-1}|u_{hp}|^2\zeta|\nabla\zeta| + P_p^m|u_{hp}|\zeta^2 + P_p^m|u_{hp}|^2\zeta^2\Big)dx.$$

Тепер кожний доданок у правій частині отриманої нерівності оцінюємо за нерівністю Коші з будь-яким $\varepsilon>0$, надаючи множник ε доданкам, подібним підінтегральному виразу в лівій частині. Вибираючи належним чином ε, отримуємо

$$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}} P_p^{m-2}|\nabla u_{hp}|^2\zeta^2\,dx \le C\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}}\Big\{P_p^m u_{hp}^2\zeta^2 +$$

$$+\big(P_p^{m-2}u_{hp}^2+P_p^m\big)\big(|\nabla\zeta|^2+\zeta^2\big)\Big\}dx. \tag{13}$$

Для оцінки інтеграла $\iint_{G_{\rho/2}^{4\rho}} P_p^m u_{hp}^2\zeta^2\,dx$ доведемо додаткову нерівність. Покладемо в тотожності (8) $\psi = u(x)u_{hp}^2\zeta^2$:

$$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}} a_i(x,u,u_x)\Big(u(x)u_{hp}^2\zeta^2\Big)_{x_i}\,dx = \iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}} a(x,u,u_x)u(x)u_{hp}^2\zeta^2\,dx.$$

На підставі зображення $a_i(x,u,u_x)$ з зауваження 1 маємо

$$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}} a_i(x,u,u_x)u_{x_i}u_{hp}^2\zeta^2\,dx = \iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}} \{\, a(x,u,u_x)u(x)u_{hp}^2\zeta^2 -$$

$$- u(x)\Big(a_{ij}u_{x_j}2u_{hp}(u_{hp})x_i\zeta^2 + a_{ij}u_{x_j}2\zeta\zeta_{x_i}u_{hp}^2 + a_i(x,u,0)\Big(u_{hp}^2\zeta^2\Big)_{x_i}\Big)\Big\}\,dx.$$

Використовуючи нерівності (2), (7), (10) та формулу інтегрування частинами, одержуємо

$$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}} |\nabla u|^m u_{hp}^2\zeta^2 \le c(m,\mu,\nu)\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}}\Bigg\{\Big(g^{m'}(x)+\big|a_i(x,u,0)u_{x_i}\big|\Big)u_{hp}^2\zeta^2 +$$

$$+ |u(x)|\Bigg[|\nabla u|^m u_{hp}^2\zeta^2 + f(x)u_{hp}^2\zeta^2 + |\nabla u|^{m-1}\big|\nabla u_{hp}\big|\big|u_{hp}\big|\zeta^2 +$$

$$+ |\nabla u|^{m-1}u_{hp}^2\zeta|\nabla\zeta| + \left|\frac{\partial a_i(x,u,0)}{\partial x_i} + \frac{\partial a_i(x,u,0)}{\partial u}u_{x_i}\right|u_{hp}^2\zeta^2\Bigg]\Bigg\}\,dx. \tag{14}$$

Користуючись нерівністю Коші з будь-яким $\varepsilon > 0$, дістаємо

$$|u||\nabla u|^{m-1}\big|\nabla u_{hp}\big|\big|u_{hp}\big|\zeta^2 \le \frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^m u_{hp}^2\zeta^2 + \frac{1}{2\varepsilon}u^2|\nabla u|^{m-2}\big|\nabla u_{hp}\big|^2\zeta^2,$$

$$|u||\nabla u|^{m-1}u_{hp}^2|\zeta||\nabla\zeta| \le \frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^m u_{hp}^2\zeta^2 + \frac{1}{2\varepsilon}u^2|\nabla u|^{m-2}u_{hp}^2|\nabla\zeta|^2.$$

Тепер, згідно з зауваженням 2, з (14) на підставі (5), (6) маємо

$$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}} |\nabla u|^m u_{hp}^2\zeta^2\,dx \le C\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}}\Big(g^{m'}(x)+g(x)|\nabla u|\Big)u_{hp}^2\zeta^2dx +$$

$$+ (\varepsilon + c_0\rho^\alpha)\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}} |\nabla u|^m u_{hp}^2\zeta^2dx +$$

$$+ C\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}}\left(\frac{1}{2\varepsilon}u^2|\nabla u|^{m-2}u_{hp}^2|\nabla\zeta|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}u^2|\nabla u|^{m-2}\big|\nabla u_{hp}\big|^2\zeta^2 + |u(x)|f(x)u_{hp}^2\zeta^2\right)dx.$$

Виберемо $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ та $d > 0$ таке, щоб $c_0 d^\alpha \le \dfrac{1}{4}$; в результаті отримаємо

$$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}} |\nabla u|^m u_{hp}^2\zeta^2dx \le C\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}}\Big(g^{m'}(x)+g(x)|\nabla u|\Big)u_{hp}^2\zeta^2dx +$$

$$+ C\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}}\Big(u^2|\nabla u|^{m-2}\big|\nabla u_{hp}\big|^2\zeta^2 + u^2|\nabla u|^{m-2}u_{hp}^2|\nabla\zeta| + |u|f(x)u_{hp}^2\zeta^2\Big)dx. \tag{15}$$

Зауваження 3. Функція $v(x) \equiv u_p^h(x)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d}{dx_i}a_i\Big(x_p^h, v(x), v_x(x)\Big) + a\Big(x_p^h, v(x), v_x(x)\Big) = 0.$$

Підставимо у відповідну цьому рівнянню інтегральну тотожність функцію

$\psi = \upsilon(x)u_{hp}^2\zeta^2$. Виконавши описану вище процедуру, легко переконатися у справедливості оцінки (15) для функції $\upsilon(x)$.

Використовуючи елементарні нерівності $(a+b)^m \le 2^{m-1}(a^m+b^m)$, $a^{m-2} + b^{m-2} \le 2(a+b)^{m-2}$ $\forall\, a, b \ge 0$, $m \ge 2$, нерівність (15) та зауваження 3, одержуємо

$$\iint_{G_{\rho/2}^{4\rho}} P_p^m u_{hp}^2 \zeta^2 dx \le$$

$$\le C \iint_{G_{\rho/2}^{4\rho}} \left(g^{m'}(x) + g^{m'}(x_p^h) + g(x)|\nabla u| + g(x_p^h)\left|\nabla u_p^h\right|\right) u_{hp}^2\zeta^2 dx +$$

$$+ C \iint_{G_{\rho/2}^{4\rho}} P_p^{m-2} u^2 \left(\left|\nabla u_{hp}\right|^2 \zeta^2 + u_{hp}^2 |\nabla\zeta|^2\right) dx +$$

$$+ C \iint_{G_{\rho/2}^{4\rho}} \left(|f(x)||u| + \left|f\left(x_p^h\right)\right|\left|u_p^h\right|\right) u_{hp}^2 \zeta^2 dx. \tag{16}$$

За нерівностями (13), (16) при достатньо малому d (враховуючи гельдеровість $u(x)$) отримуємо

$$\iint_{G_{\rho/2}^{4\rho}} \left(P_p^m u_{hp}^2 + P_p^{m-2}\left|\nabla u_{hp}\right|^2\right)\zeta^2 dx \le$$

$$\le C \iint_{G_{\rho/2}^{4\rho}} \left(P_p^{m-2} u_{hp}^2 + P_p^m\right)\left(\zeta^2 + |\nabla\zeta|^2\right) dx +$$

$$+ C \iint_{G_{\rho/2}^{4\rho}} \Big(|u||f(x)| + \left|u_p^h\right|\left|f\left(x_p^h\right)\right| +$$

$$+ g^{m'}(x) + g^{m'}\left(x_p^h\right) + g(x)|\nabla u| + g\left(x_p^h\right)\left|\nabla u_p^h\right|\Big) u_{hp}^2 \zeta^2 dx.$$

Далі, на підставі нерівності Юнга маємо

$$g(x)|\nabla u| u_{hp}^2 \le \varepsilon |\nabla u|^m u_{hp}^2 + C_\varepsilon |g(x)|^{m'} u_{hp}^2 \qquad \forall\, \varepsilon > 0,$$

$$g^{m'}(x) u_{hp}^2 \le \delta \left|u_{hp}\right|^{m+2} + C_\delta |g(x)|^{(m+2)/(m-1)} \qquad \forall\, \delta > 0,$$

$$f(x) u_{hp}^2 \le \varepsilon\left|u_{hp}\right|^{m+2} + C_\varepsilon |f(x)|^{(m+2)/m}.$$

З огляду на властивості функції $\zeta(x)$ та обмеженість розв'язку $u(x)$, вибираючи належно малими ε і δ, остаточно отримуємо

$$\iint_{G_\rho^{2\rho}} \left(P_p^m u_{hp}^2 + P_p^{m-2}\left|\nabla u_{hp}\right|^2\right) dx \le C\rho^{-2} \iint_{G_{\rho/2}^{4\rho}} \left(P_p^{m-2} u_{hp}^2 + P_p^m\right) dx +$$

$$+ C \iint_{G_{\rho/2}^{4\rho}} \left(|g(x)|^{(m+2)/(m-1)} + \left|g(x_p^h)\right|^{(m+2)/(m-1)} + |f(x)|^{(m+2)/m} + \left|f(x_p^h)\right|^{(m+2)/m}\right) dx. \tag{17}$$

Далі, згідно з лемою (4.6) з гл. II [4], u_{hp} збігається до u_{x_p} в нормі $L_m(G)$ майже скрізь, а за теоремою Єгорова — і майже рівномірно (тобто рівномірно на G, за винятком деяких множин як завгодно малої міри). Аналогічно $f(x_p^h)$, $g(x_p^h)$ збігаються майже рівномірно до функцій $f(x)$, $g(x)$ відповідно внаслідок неперервності цих функцій у нормах $L_{(m+2)/m}(G)$, $L_{(m+2)/(m-1)}(G)$. Перейдемо в нерівності (17) до границі при $h \to 0$:

$$\iint\limits_{G_\rho^{2\rho}} \left(|\nabla u|^m u_{x_p}^2 + |\nabla u|^{m-2} |\nabla u_{x_p}|^2\right) dx \le \rho^{-2} C \iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}} \left(|\nabla u|^{m-2} u_{x_p}^2 + \right.$$

$$\left. + |\nabla u|^m \right) dx + C \iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}} \left(|g(x)|^{(m+2)/(m-1)} + |f(x)|^{(m+2)/m}\right) dx. \tag{18}$$

Підсумовуючи за всіма ρ, одержуємо (11). Теорему 1 доведено.

4. Оцінка других похідних в області G_0^ρ. Теорема 2. *Нехай $u(x)$ — обмежений узагальнений розв'язок задачі* (1), $u(x) \equiv 0$ *при* $|x| > 4d$, *та на множині* $\mathfrak{M}$ *виконані припущення* (2) – (4), (6) *теореми* 1, *а також наступні*:

а) $$a_i(0, 0, w) = |w|^{m-2} w_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall w \in \mathbb{R}^n, \quad m \ge 2,$$

та існує функція $\varphi \in L_{q/(m-1)}$, $q > n$, *така, що*:

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial (a_i(x, u, w) - a_i(0, 0, w))}{\partial w_j} \right|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \mu |x|^\gamma |w|^{m-2} + \varphi(x) \qquad \forall \gamma \in (0, 1),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial a_i(x, u, w)}{\partial u} \right|^2 \right)^{1/2} \le \mu |w|^{m-2} + g(x);$$

б) $$|a(x, u, w)| + \left| \frac{\partial a_i(x, u, w)}{\partial x_i} \right| \le \mu |w|^{m-1} + f(x),$$

$$a(x, u, w) \operatorname{sgn}(u) \ge -\left(\mu |w|^{m-1} + f(x)\right),$$

де $f(x)$ *та* $g(x)$ — *функції з п.* 3;

в) *існують числа* $d > 0$, $k_0 \ge 0$, $k_1 \ge 0$, $k_2 \ge 0$ *і* $\beta \ge \lambda(m-1) + \frac{\gamma}{2} - m$, $\delta \ge \frac{\gamma m}{2(m-1)} + (m-2)(\lambda - 1)$, *де* $\lambda > 1$ — *власне число* (НЗВ), *такі, що в області* G_0^d

$$f(x) \le k_0 |x|^\beta, \qquad g(x) \le k_1 |x|^{\delta - 1}, \qquad \varphi(x) \le k_2 |x|^\delta;$$

г) *виконана одна з умов, що забезпечують справедливість принципу максимуму для задачі* (1) (*див.* [5] § 10.4):

1) a_i, $i = 1, \dots, n$, *не залежать від* u,

2) a *не залежать від* w,

3) *матриця* $\begin{pmatrix} D_{w_j} a_i(x, u, w) & D_{w_j} a(x, u, w) \\ D_u a_i(x, u, w) & D_u a(x, u, w) \end{pmatrix}$ — *недодатно визначена в* $\mathfrak{M}$,

д) $$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}} \left(|f(x)|^{(m+2)/m} + |g(x)|^{(m+2)/(m-1)}\right) dx \le K \rho^{n-2+m(\lambda-1)}.$$

Тоді якщо

$$\alpha > 2 - n - m(\lambda - 1), \tag{19}$$

то виконується оцінка

$$\iint\limits_{G_0^\rho} r^\alpha |\nabla u|^{m-2} u_{xx}^2\, dx \le \text{const}\cdot \rho^{\alpha+n-2+m(\lambda-1-\varepsilon)}$$
$$\forall \varepsilon \in (0, \alpha+n-2+m(\lambda-1)). \tag{20}$$

Доведення. Згідно з теоремою 1 виконується нерівність (11). Помножимо обидві частини нерівності (11) на ρ^α і зауважимо, що $r \sim \rho$ на множинах $G_\rho^{2\rho}$ та $G_{\rho/2}^{4\rho}$; враховуючи умову д) теореми, отримуємо нерівність

$$\iint\limits_{G_\rho^{2\rho}} r^\alpha |\nabla u|^{m-2} u_{xx}^2\, dx \le C \iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho}} r^{\alpha-2} |\nabla u|^m\, dx + K\rho^{\alpha+n-2+m(\lambda-1)}$$
$$\forall \rho \in (0, d). \tag{21}$$

На підставі теорем 1, 2 [2] у випадку $m > 2$ маємо

$$|\nabla u(x)| \le c_1 |x|^{\lambda-1-\varepsilon} \qquad \forall \varepsilon > 0. \tag{22}$$

Якщо ж $m = 2$, то в (22) можна покласти $\varepsilon = 0$ (див. [1, 2]). З (21), (22) випливає нерівність

$$\iint\limits_{G_\rho^{2\rho}} r^\alpha |\nabla u|^{m-2} u_{xx}^2\, dx \le \text{const}\cdot \rho^{\alpha+n-2+m(\lambda-1-\varepsilon)} \quad \forall \rho \in (0, d), \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{23}$$

при умові, що виконана умова (19).

Розглянемо тепер послідовність $\rho_k = 2^{1-k} d \in (0, d)$ $\forall k = 1, 2, \ldots$. Запишемо нерівність (23), замінивши в ній ρ на ρ_k:

$$\iint\limits_{G^{(k)}} r^\alpha |\nabla u|^{m-2} u_{xx}^2\, dx \le \text{const}\cdot 2^{(1-k)\kappa} d^\kappa, \tag{24}$$

$$\kappa = \alpha + n - 2 + m(\lambda - 1 - \varepsilon) > 0 \qquad \forall \varepsilon \in (0, \alpha+n-2+m(\lambda-1)) \tag{25}$$

завдяки (19). Просумуємо нерівності (24) за всіма $k = 1, 2, \ldots$:

$$\iint\limits_{G_0^{4d}} r^\alpha |\nabla u|^{m-2} u_{xx}^2\, dx \le \text{const}\cdot d^\kappa \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(1-k)\kappa} = \frac{\text{const}}{1-2^{-\kappa}} d^\kappa.$$

Отримана нерівність разом з (25) означають, що виконується нерівність (20). Теорему 2 доведено.

5. Приклад: розв'язок однорідної задачі Діріхле для m-гармонійного рівняння в куті. В плоскому куті $G_0 = \{(r, \omega) \in R^n \mid 0 < r < \infty;\ 0 < \omega < \omega_0 \le \le \pi\}$ розглянемо задачу Діріхле

$$\mathcal{L}_m u \equiv 0, \qquad m > 1, \qquad x \in G_0,$$
$$u\big|_{\omega=0} = u\big|_{\omega=\omega_0} = 0, \tag{26}$$

де $\mathcal{L}_m$ — m-гармонійний оператор, $\mathcal{L}_m w \equiv \operatorname{div}\left(|\nabla w|^{m-2}\nabla w\right)$, $m > 1$; $x \in G_0$. Побудуємо невід'ємний розв'язок $u(x)$ задачі (26), що належить класу $C^{\lambda(\omega_0)}\left(G_0^d\right)$, $\lambda(\omega_0) \ge 1$, має скінченний інтеграл

$$J_d[u] = \iint\limits_{G_0^d} \left(r^\alpha |\nabla u|^{m-2} \sum_{i,j=1}^{2} u_{x_i x_j}^2 + r^{\alpha-2} |\nabla u|^m + r^{\alpha-2-m} |u|^m \right) dx$$

при $\alpha > m - m\lambda(\omega_0)$ і виконується оцінка

$$J_\rho[u] \le \text{const} \cdot \rho^{\alpha + n - 2 + m(\lambda - 1)}, \tag{27}$$

зокрема виконується оцінка (20) з $\varepsilon = 0$. Цей приклад свідчить, що наведений вище результат (оцінка (20)) та результати роботи [2] є майже точними.

Розв'язок задачі (26) шукаємо у вигляді $u(r, \omega) = r^\lambda \Phi(\omega)$, $\lambda \ge 1$. Функція $\Phi(\omega)$ є розв'язком задачі Штурма – Ліувілля для квазілінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{gathered}\left((m-1)\Phi'^2 + \lambda^2\Phi^2\right)\Phi'' + \lambda(\lambda(2m-3) - (m-2))\Phi\Phi'^2 + \\ + \lambda^3(\lambda(m-1) - (m-2))\Phi^3 = 0, \quad 0 < \omega < \omega_0, \\ \Phi(0) = \Phi(\omega_0) = 0.\end{gathered} \tag{28}$$

Введемо функції:

$$y(\omega) = \Phi'(\omega)/\Phi(\omega), \quad \Psi = \ln\Phi, \quad z(\Psi) = y^2(\Psi). \tag{29}$$

Тоді очевидно, що $y'(\omega) + y^2(\omega) = \Phi''(\omega)/\Phi(\omega)$, $y(\omega) = \Psi'(\omega)$. Функції $y(\omega)$ та $z(\Psi)$ задовольняють диференціальні рівняння першого порядку

$$\left[(m-1)y^2 + \lambda^2\right]y' + \left[(m-1)y^2 + \lambda^2(m-1) - \lambda(m-2)\right](y^2 + \lambda^2) = 0, \tag{30}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left[(m-1)z + \lambda^2\right]z' + (m-1)z^2 + \lambda[2\lambda(m-1) - (m-2)]z + \\ + \lambda^3[\lambda(m-1) - (m-2)] = 0.\end{gathered} \tag{31}$$

Інтегруючи рівняння (30), (31) з урахуванням (29), одержуємо

$$\Phi^2(\omega) = C^2(y^2 + \lambda^2)^{-\lambda}\left[(m-1)y^2 + \lambda^2(m-1) - \lambda(m-2)\right]^{\lambda - 1} \quad \forall C, \tag{32}$$

а також

$$\begin{gathered}\omega + \operatorname{arctg}\frac{y}{\lambda} + (1-\lambda)\left(\frac{m-1}{\lambda^2(m-1) - \lambda(m-2)}\right)^{1/2} \times \\ \times \operatorname{arctg}\frac{y(m-1)^{1/2}}{\left(\lambda^2(m-1) - \lambda(m-2)\right)^{1/2}} = C_1, \quad \lambda \ge 1, \quad m > 1.\end{gathered} \tag{33}$$

Тепер вивчимо властивості функцій $y(\omega)$, $\Psi(\omega)$ і знайдемо C_1 з граничних умов задачі (28). Перш за все, оскільки $m > 1$, $\lambda \ge 1$, з рівняння (30), очевидно, випливає, що $y'(\omega) < 0$ $\forall \omega \in (0, \omega_0)$, тобто функція $y(\omega)$ усюди строго спадає; крім того, з рівняння (30) маємо

$$y(\omega_0/2 + \upsilon) = -y(\omega_0/2 - \upsilon), \quad 0 \le \upsilon < \omega_0/2, \tag{34}$$

тобто графік функції $y(\omega)$ симетричний відносно точки $\omega = \omega_0/2$. Покладаючи в (34) спочатку $\upsilon \equiv 0$, отримуємо

$$y(\omega_0/2) = 0, \tag{35}$$

а потім спрямовуючи $\upsilon \to \omega_0/2 - 0$, знаходимо $y(\omega_0 - 0) = -y(+0) < y(+0)$ (оскільки $y(\omega)$ спадає), звідки маємо

$$y(+0) > 0, \quad y(\omega_0 - 0) < 0. \tag{36}$$

Оскільки $y(\omega)$ строго спадає, то на інтервалі $(0, \omega_0)$ вона має лише один нуль $\omega_0/2$. Далі, з співвідношення (32) випливає

$$\Phi(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in (0, \omega_0) \text{ при } C > 0 \tag{37}$$

і

$$\Phi(\omega) \sim \frac{1}{|y|} \text{ при } |y| \to +\infty. \tag{38}$$

На підставі граничних умов задачі (28) з (36) і (38) робимо висновок, що

$$\lim_{\omega \to +0} y(\omega) = +\infty, \qquad \lim_{\omega \to \omega_0 - 0} y(\omega) = -\infty. \tag{39}$$

Крім того, доведено, що $\Phi(\omega) \geq 0$ (а значить, $u(r, \omega) \geq 0$), причому внаслідок (37) функція $\Phi(\omega)$ рівна нулю лише на кінцях відрізка $[0; \omega_0]$.

Звернемося тепер до співвідношення (29). Маємо

$$\Phi'(\omega) = y(\omega)\Phi(\omega). \tag{40}$$

На підставі встановлених властивостей функцій $y(\omega)$ і $\Phi(\omega)$ одержимо очевидні властивості функції $\Phi'(\omega)$: вона має лише один нуль (в точці $\omega = \omega_0/2$) на відрізку $[0; \omega_0]$, тобто $\Phi'(\omega_0/2) = 0$. Далі, внаслідок (35) і (39): $y(\omega) > 0$, $\omega \in (0, \omega_0/2)$; $y(\omega) < 0$, $\omega \in (\omega_0/2, \omega_0)$. Тому з (40) з урахуванням (37) маємо $\Phi'(\omega) > 0$, $\omega \in (0, \omega_0/2)$; $\Phi'(\omega) < 0$, $\omega \in (\omega_0/2, \omega_0)$; $\Phi'(\omega_0/2) = 0$. Отже, на проміжку $[0; \omega_0/2)$ функція $\Phi(\omega)$ строго зростає, а на проміжку $(\omega_0/2, \omega_0]$ вона строго спадає. Крім того, з (32) і (34) випливає, що $\Phi(\omega)$ симетрична відносно прямої $\omega = \omega_0/2$. Нарешті, внаслідок (32), (38) з (40) одержуємо $\Phi'(+0) = C(m-1)^{(\lambda-1)/2}$; $\Phi'(\omega_0 - 0) = -\Phi'(+0)$. Покладаючи $C = C(m-1)^{(1-\lambda)/2}$, отримуємо $\Phi'(+0) = 1$, а

$$\Phi(\omega) = (y^2 + \lambda^2)^{-\lambda/2}\left[y^2 + \lambda^2 - \lambda\frac{m-2}{m-1}\right]^{(\lambda-1)/2}, \quad \lambda \geq 1. \tag{41}$$

В точці $\omega = \omega_0/2$ функція $\Phi(\omega)$ досягає максимального значення:

$$\max_{[0;\omega_0]} \Phi(\omega) = \Phi(\omega_0/2) = \Phi_0 \equiv \lambda^{-(1+\lambda)/2}\left(\lambda - \frac{m-2}{m-1}\right)^{(\lambda-1)/2}. \tag{42}$$

Розглянемо тепер рівність (33) і покладемо в ній $\omega = \omega_0/2$. Внаслідок (35) одержимо $C_1 = \omega_0/2$. Здійснимо тепер граничний перехід при $\omega \to +0$ і при $\omega \to \omega_0 - 0$; на підставі (39) одержимо

$$(1-\lambda)\left[\frac{m-1}{\lambda^2(m-1) - \lambda(m-2)}\right]^{1/2} = \frac{\omega_0}{\pi} - 1; \quad 0 < \omega_0 \leq \pi; \quad m > 1.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $\lambda \geq 1$, маємо

$$\lambda = 1 + \frac{\pi - \omega_0}{2(m-1)\omega_0(2\pi - \omega_0)}\Big[m(\pi - \omega_0) +$$

$$+ \left\{(m-2)^2(\pi-\omega_0)^2 + 4(m-1)\pi^2\right\}^{1/2}\Big], \quad 0 < \omega_0 \leq \pi; \quad m > 1. \tag{43}$$

Отже, побудовано невід'ємний розв'язок задачі (26) у вигляді $u(r, \omega) = r^{\lambda}\Phi(\omega)$ з $\lambda = \lambda(\omega_0; m)$, що визначається формулою (43). Перейдемо тепер до вивчення властивостей побудованого розв'язку та його похідних поблизу кутової точки — в області G_0^d. Перш за все, вже доведено (див. (42)), що

$$0 \leq u(r, \omega) \leq \Phi_0 r^{\lambda} \qquad \forall \omega \in [0; \omega_0]. \tag{44}$$

Далі, оскільки $|\nabla u|^2 = u_r^2 + \frac{1}{r^2}u_\omega^2 = r^{2(\lambda-1)}(\lambda^2\Phi^2 + \Phi'^2)$, на підставі (40), (41) маємо

$$|\nabla u| = r^{\lambda-1}\Phi(\omega)(y^2+\lambda^2)^{1/2} = r^{\lambda-1}\left(1-\lambda\frac{m-2}{(m-1)(y^2+\lambda^2)}\right)^{(\lambda-1)/2}, \quad (45)$$

звідки

$$|\nabla u| \le C(m,\lambda)r^{\lambda-1}. \quad (46)$$

З (43), (45) і (46) одержуємо, що при $\omega_0 = \pi$ $\lambda = 1$ і, значить, $|\nabla u| \le C(m)$. Нехай $\omega_0 < \pi$, тоді $\lambda > 1$ і внаслідок (45) маємо $|\nabla u|_{(0,0)} = 0$. Отже, нерівність (46) означає, що $u(x) \in C^{\lambda(\omega_0)}\left(\overline{G_0^d}\right)$. Зокрема, при $m = 2$ одержуємо добре відомий результат: $u(x) \in C^{\pi/\omega_0}\left(\overline{G_0^d}\right)$. Далі, шляхом нескладних обчислень з використанням рівняння (28) перевіряється, що

$$\left|u_{x_i x_j}\right| \le C_{ij}(\lambda; m)r^{\lambda-2}. \quad (47)$$

З оцінок (42), (46) і (47) встановлюється скінченність інтеграла $J_d[u]$ та справедливість оцінки (27) при умові збіжності інтеграла $\int_0^d r^{\alpha+\lambda m-m-1}dr$, що має місце, як легко бачити з (43), при умові $\alpha > (1-\lambda)m = -m(\lambda(\omega_0)-1)$.

***Зауваження* 4.** При $m = 2$ скінченність інтеграла $J_d[x]$ означає, що $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^2_\alpha(G_0)$ з $\alpha > 2 - \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ та виконується оцінка $\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^2_\alpha(G_o^\rho)} \le c\rho^{\alpha+2(\pi/\omega_0-1)}$, що є добре відомим фактом.

1. *Борсук М. В.* Поведение обобщенных решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических дивергентных уравнений второго порядка вблизи конической точки // Сиб. мат. журн. – 1990. – **31**, № 6. – С. 25–38.
2. *Борсук М. В.* Оценки обобщенных решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в области с конической граничной точкой // Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 6. – С. 1001–1007.
3. *Tolksdorf P.* On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points // Communs Part. Different. Equat. – 1983. – **8**, № 7. – P. 773–817.
4. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
5. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 463 с.

Одержано 24.06.96