УДК 517.5

В. В. Волчков (Донец. ун-т)

СФЕРИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ НА ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*

The description of some classes of functions with zero spherical means is given.

Наведено опис деяких класів функцій з нульовими сферичними середніми.

Введение. Пусть R^n — вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $S = \{x \in R^n : |x| = 1\}$, $U = \{x \in R^n : |x| > 1\}$, f — непрерывная функция на U. Предположим, что при всех $y \in R^n$, $r > 1 + |y|$ справедливо равенство

$$\int_S f(y + r\sigma)\, d\sigma = 0, \tag{1}$$

где $d\sigma$ — нормированная поверхностная мера на S.

Верно ли, что $f = 0$ в U? В общем случае ответ отрицательный, однако при некоторых дополнительных предположениях равенство $f = 0$ выполняется. Одним из таких предположений является быстрое убывание f на бесконечности. Хелгасон установил [1] (см. также[2, с. 127]), что если при любом фиксированном $k > 0$ $\sup\limits_{x \in R^n} |x|^k |f(x)| < \infty$, то из условия (1) следует $f = 0$. Результаты такого типа находят применение в теории преобразования Радона (см. [2, с. 125]).

В данной работе получено полное описание пространства решений уравнения (1) в терминах разложения функции f в ряд по сферическим гармоникам (см. теорему 1 ниже). Этот результат позволил существенно усилить сформулированное выше утверждение Хелгасона и получить новые теоремы единственности для решений уравнения (1) (см. теоремы 2, 3).

1. Формулировки основных результатов. Пусть ρ, σ – полярные координаты в R^n (для всех $x \in R^n$ $\rho = |x|$, а если $x \neq 0$, то $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = x/\rho \in S$). Для любых $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$ обозначим $K_{\alpha,\beta} = \{x \in R^n : \alpha < |x| < \beta\}$. Пусть $\{Y_l^{(k)}\}$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_k$ сферических гармоник степени k на S (см., например, [3, с. 162]), α_k — размерность пространства $\mathcal{H}_k$. При $k = 0$ имеем $\alpha_k = 1$ и $Y_l^{(k)} = 1$. Любой функции $f \in C(K_{\alpha,\beta})$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) = f_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\alpha_k} f_{kl}(\rho)\, Y_l^{(k)}(\sigma), \tag{2}$$

где $\alpha < \rho < \beta$, $f_{kl}(\rho) = \int_S f(\rho\sigma)\, \overline{Y_l^{(k)}}(\sigma)\, d\sigma$,

$$f_0(\rho) = \int_S f(\rho\sigma)\, d\sigma.$$

Обозначим через $S_{\alpha,\beta}$ множество непрерывных в $K_{\alpha,\beta}$ функций f, для которых выполнено равенство (1) при всех $y \in R^n$, $r > 0$ таких, что $r + |y| < \beta$, $\alpha + |y| < r$.

---

* Выполнена при частичной поддержке Объединенного фонда Правительства Украины и Международного научного фонда (гранты № U9D000, U9D200).

Теорема 1. *Пусть* $f \in C(K_{\alpha,\beta})$. *Тогда для того чтобы* $f \in S_{\alpha,\beta}$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты разложения* (2) *функции* f *имели вид*

$$f_0(\rho) = 0, \quad f_{kl}(\rho) = \sum_{\nu=0}^{k=1} c_{k,l,\nu}\,\rho^{2\nu-n-k+2},$$

где $\alpha < \rho < \beta$, $c_{k,l,\nu}$ — *комплексные постоянные.*

Теорема 2. *Пусть* $f \in S_{\alpha,\infty}$ *и при любом фиксированном* $m > 0$ $\varliminf\limits_{\rho\to\infty} \rho^m \int\limits_S |f(\rho\sigma)|\,d\sigma = 0$. *Тогда* $f = 0$ *в* $K_{\alpha,\infty}$. *Для любого* $m > 0$ *существует ненулевая функция* $f \in S_{\alpha,\infty}$ *такая, что* $\sup\limits_{|x|>\alpha} |x|^m |f(x)| < \infty$.

Отметим, что в случае $n = 2$ в [2, с. 129] построен пример ненулевой функции $f \in S_{\alpha,\infty}$ такой, что $\sup\limits_{|x|>\alpha} |x|^5 |f(x)| < \infty$.

Теорема 3. *Пусть* E — *некоторое множество чисел из интервала* (α, β), $f \in S_{\alpha,\beta}$ *и* $f = 0$ *на любой сфере радиуса* $r \in E$ *с центром в нуле. Тогда*:

1) *если* E — *бесконечное множество, то* $f = 0$ *в* $K_{\alpha,\beta}$;

2) *если* E — *конечное множество, то существует ненулевая функция* $f \in S_{\alpha,\beta}$ *с указанным условием.*

2. Вспомогательные построения. Далее, как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ обозначаются соответственно множества натуральных, целых и целых неотрицательных чисел. Пусть $SO(n)$ — группа вращений R^n с нормированной мерой Хаара $d\tau$, $T^k(\tau)$ — сужение квазирегулярного представления группы $SO(n)$ на пространство $\mathcal{H}_k$ [4, с. 426], $\{t^k_{lp}\}$ — матрица представления $T^k(\tau)$, т. е.

$$Y^{(k)}_l(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{p=1}^{\alpha_k} t^k_{lp}(\tau)\, Y^{(k)}_p(\sigma), \qquad \tau \in SO(n). \tag{3}$$

При $n = 2$ в дальнейшем будет использоваться следующий базис в $\mathcal{H}_k$, $k \geq 1$: $Y^{(k)}_1(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k$, $Y^{(k)}_2(\sigma) = (\sigma_1 - i\sigma_2)^k$.

Если τ — вращение на угол θ в R^2, то для этого базиса $t^k_{11}(\tau) = e^{-ik\theta}$, $t^k_{22}(\tau) = e^{ik\theta}$, $t^k_{12}(\tau) = t^k_{21}(\tau) = 0$. В этом случае для коэффициентов разложения (2) имеем равенство

$$f_{kl}(\rho)\, Y^{(k)}_l(\sigma) = \int\limits_{SO(2)} f(\tau^{-1}x)\,\overline{t^k_{ll}(\tau)}\,d\tau. \tag{4}$$

Если $n \geq 3$, представления $T^k(\tau)$ неприводимы [4, с. 431]. Отсюда следует [5], что при всех $1 \leq l, p \leq a_k$

$$f_{kl}(\rho)\, Y^{(k)}_p(\sigma) = a_k \int\limits_{SO(n)} f(\tau^{-1}x)\,\overline{t^k_{lp}(\tau)}\,d\tau. \tag{5}$$

Пусть $\gamma \in R^1$, $t > 0$. Положим $\pi_k(\gamma) = \prod_{m=0}^{k}(\gamma - 2m)$, $u_\gamma(t) = t^\gamma$, $v_\gamma(t) = t^\gamma \ln t$. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим дифференциальный оператор d_k, заданный на пространстве $C^1(\alpha, \beta)$ следующим образом:

$$(d_k f)(t) = f'(t) - \frac{k}{t} f(t), \;\; f \in C^1(\alpha, \beta).$$

При $k \in \mathbb{N}$ обозначим $D_k = d_k d_{k-1} \ldots d_0$, $D_0 = d_0$. Индукцией по $k = 0, 1, \ldots$ нетрудно получить равенства

$$(D_k u_\gamma)(t) = \pi_k(\gamma) u_\gamma(t) t^{-k-1}, \tag{6}$$

$$(D_k v_\gamma)(t) = \frac{v_\gamma(t)}{t^{k+1}} \pi_k(\gamma) + \frac{u_\gamma(t)}{t^{k+1}} \sum_{m=0}^{k} \frac{\pi_k(\gamma)}{\gamma - 2m}. \tag{7}$$

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим $w_{m,n}(t) = v_{2m-n}(t)$, если n — четно, $2m \geq n$, и $w_{m,n}(t) = u_{2m-n}(t)$ — в противном случае. Простые вычисления показывают, что

$$\Delta^m (w_{m,n}(\rho)) = 0, \quad 0 < \rho < \infty, \tag{8}$$

где Δ — оператор Лапласа в R^n.

3. Свойства функций класса $S_{\alpha,\beta}$. Лемма 1. *Пусть $f \in S_{\alpha,\beta}$. Тогда*:

а) $f(\tau x) \in S_{\alpha,\beta}$ *для любого* $\tau \in SO(n)$;

б) *если* $n = 2$ и $f = f(x_1, x_2)$, *то функция* $f(x_1, -x_2)$ *принадлежит* $S_{\alpha,\beta}$;

в) *если* $f \in C^1(K_{\alpha,\beta})$, *то все частные производные первого порядка от* f *принадлежат* $S_{\alpha,\beta}$.

Доказательство. Утверждения а), б) следуют из (1) и инвариантности меры $d\sigma$ относительно вращений τ и симметрий $(\sigma_1, \sigma_2) \to (\sigma_1, -\sigma_2)$. Для доказательства в) достаточно продифференцировать равенство (1) по каждой координате вектора $y \in R^n$.

Лемма 2. *Пусть $f \in S_{\alpha,\beta}$. Тогда каждое слагаемое в разложении* (2) *принадлежит $S_{\alpha,\beta}$. Более того, при всех $1 \leq l$, $p \leq a_k$ $f_{kl}(\rho)\, Y_p^{(k)}(\sigma) \in S_{\alpha,\beta}$.*

Доказательство. При $n = 2$ требуемое утверждение следует из (1), (4) и утверждения б) леммы 1 (см. [6, с. 860]). Пусть $n \geq 3$. Из (1) и утверждения а) леммы 1 имеем $\int_S f(\tau^{-1} y + r\tau^{-1}\sigma)\, d\sigma = 0$ при любом $\tau \in SO(n)$. Умножим это равенство на $\overline{t_{lp}^{k}}(\tau)$ и интегрируя на $SO(n)$, из формулы (5) получим утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть $f \in C^1(\alpha, \beta)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ – фиксировано и при некотором $Y \in \mathcal{H}_k$ функция $f(\rho)\, Y(\sigma)$ принадлежит $S_{\alpha,\beta}$. Тогда*:

а) $(d_k f)(\rho)\; Y_l^{(k+1)}(\sigma) \in S_{\alpha,\beta}$ *при всех* $1 \leq l \leq a_{k+1}$;

б) *если* $k \geq 1$, *то* $(d_{2-k-n} f)(\rho)\; Y_l^{(k-1)}(\sigma) \in S_{\alpha,\beta}$ *при всех* $1 \leq l \leq a_{k-1}$.

Доказательство. При $n = 2$ оба утверждения следуют из леммы 2 и утверждения в) леммы 1 (см. [6, с. 860]).

Пусть $n \geq 3$. Имеем $\partial(f(\rho) Y(\sigma)) / \partial x_1 = \rho^{-1} f(\rho) U(\sigma) + (d_k f)(\rho)\, \sigma_1 Y(\sigma)$, где $U(\sigma) = 0$ при $k = 0$ и $U(\sigma) = \rho^{1-k} \partial(\rho^k Y(\sigma)) / \partial x_1 \in \mathcal{H}_{k-1}$ при $k \geq 1$. Учитывая, что при $k = 0$ $\sigma_1 Y(\sigma) \in \mathcal{H}_1$, а при $k \geq 1$ $\sigma_1 Y(\sigma) = U_0(\sigma) + U_1(\sigma)$, где $U_0 \in \mathcal{H}_{k-1}$, $U_1 \in \mathcal{H}_{k+1}$ (см. [3, с. 253]), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(f(\rho) Y(\sigma)) = (d_k f)(\rho)\, U_1(\sigma) + \frac{f(\rho)}{\rho} U_2(\sigma) + f'(\rho)\, U_3(\sigma), \tag{9}$$

где U_2, $U_3 \in \mathcal{H}_{k-1}$ при $k \geq 1$ и равны нулю при $k = 0$. Из (9) и лемм 1, 2 следует утверждение а) леммы 3.

Пусть $V_1(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k$, $V_m(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^{k-1}\sigma_m$, где $k \ge 1$, $2 \le m \le n-1$. Поскольку $V_m \in \mathcal{H}_k$, из условия и леммы 2 следует, что $F_m \in S_{\alpha,\beta}$, где $F_m(x) = f(\rho)V_m(\sigma)$, $m = 1, \ldots, n-1$. Так как $\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - i\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \sum_{m=2}^{n-1}\frac{\partial F_m}{\partial x_m} = (d_{2-k-n}f)(\rho)(\sigma_1 + i\sigma_2)^{k-1}$ и $(\sigma_1 + i\sigma_2)^{k-1} \in \mathcal{H}_{k-1}$, из леммы 2 и утверждения в) леммы 1 имеем утверждение б) леммы 3.

4. Примеры функций класса $S_{\alpha,\beta}$. Пусть $B_R = \{x \in R^n : |x| \le R\}$.

Лемма 4. *Пусть* $m \in \mathbb{N}, f \in C^{2m}(B_R)$, $f(x) = f_0(\rho)$ *и* $\Delta^m f = 0$ *в* B_R. *Тогда* $f_0(\rho) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{(\Delta^\nu f)(0)\rho^{2\nu}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\nu\right)2^{2\nu}\nu!}$, *где* $\rho \in [0, R]$, Γ – *гамма-функция.*

Доказательство. Требуемое равенство есть прямое следствие теоремы о среднем для полигармонических функций (см., например, [7, с. 289]).

Лемма 5. *Пусть* $1 < R < 2$, $g \in C[2-R, R]$, $Y \in \mathcal{H}_k$ *и* $f(x) = g(\rho)Y(\sigma)$. *Тогда существует функция* U *на* $[0, R-1]$ *такая, что*

$$\int_S f(x-\eta)\,d\eta = U(\rho)\,Y(\sigma). \tag{10}$$

Доказательство. Положим $f = 0$ при $|x| < 2-R$ и $|x| > R$. Тогда левая часть равенства (10) является сверткой финитной функции f с дельта-функцией сферы S. Поскольку преобразование Фурье дельта-функции сферы S является радиальной функцией (см. [2, с. 40; 3, с. 176]), из условия леммы получаем (см. [3, с. 179], теорема 3.10), что преобразование Фурье свертки в левой части равенства (10) имеет вид $W(\rho)Y(\sigma)$ для некоторой функции W на $[0, +\infty)$ такой, что функция $W(\rho)Y(\sigma)$ принадлежит пространству $L^2(R^n)$. Отсюда следует (см. [3, с. 179], теорема 3.10 для пространства L^2) утверждение леммы 5.

Лемма 6. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{Z}$ *и* $0 \le \nu \le k-1$. *Тогда для любого* $Y \in \mathcal{H}_k$ *функция* $\Phi(x) = \rho^{2\nu-k-n+2}Y(\sigma)$ *принадлежит* $S_{0,\infty}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \int_S w_{\nu+1,n}(|x-\eta|)\,d\eta, \quad |x| < 1. \tag{11}$$

Из инвариантности меры $d\eta$ относительно вращений имеем $f(\tau x) = f(x)$ для любого $\tau \in SO(n)$, откуда $f(x) = f_0(\rho)$ при $|x| < 1$. Из (8) получаем $\Delta^{\nu+1}f = 0$. Тогда (см. лемму 4) $f_0(\rho) = \sum_{m=0}^{\nu} c_m\rho^{2m}$, где c_m – комплексные постоянные. Отсюда следует, что $(\partial/\partial x_1)^{\nu+1}f$ есть многочлен степени не выше $\nu - 1$ при $\nu \ge 1$ и $\partial f/\partial x_1 = 0$ при $\nu = 0$. С другой стороны, из (9) получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu+1} w_{\nu+1,n}(\rho) = (D_\nu w_{\nu+1,n})(\rho)\,V_{\nu+1}(\sigma) + \sum_{m=0}^{\nu} g_m(\rho)\,V_m(\sigma),$$

где g_m – непрерывные функции на $(0, +\infty)$, $V_m \in \mathcal{H}_m$, $m = 0, \ldots, \nu$. Отсюда, из (11) и из леммы 5 следует (см. [3, с. 159]), что свертка функции $(D_\nu w_{\nu+1,n})(\rho)V_{\nu+1}(\sigma)$ с дельта-функцией сферы S равна нулю при $|x| < 1$.

Учитывая, что $(D_\nu w_{\nu+1,\,n})(\rho) = c\,\rho^{\nu+1-n}$, где $c \neq 0$ (см. (6), (7)), отсюда и из леммы 2 получаем $\Phi \in S_{0,\,\infty}$ при $k = \nu + 1$. Пусть теперь $k > \nu + 1$. Применяя к функции $\rho^{\nu+1-n} V_{\nu+1}(\sigma)$ утверждение а) леммы 3, при любом $l = 1, \ldots, a_{m+1}$, получаем, что функция $\Phi_m(\rho)\, Y_l^{(m+1)}(\sigma) \in S_{0,\,\infty}$, где $\Phi_m(\rho) = (d_m d_{m-1} \ldots d_{\nu+1} u_{\nu+1-n})(\rho)$. При $m = k-1$ имеем $\Phi_{k-1}(\rho) = \pi_{k-\nu-2}(-n)\,\rho^{2\nu-n-k+2}$, откуда следует утверждение леммы 6.

5. Доказательство основных результатов. Лемма 7. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$ — *фиксировано,* $g \in C(\alpha, \beta)$ *и* $g(\rho)\, Y(\sigma) \in S_{\alpha,\,\beta}$ *для некоторого* $Y \in \mathcal{H}_k$. *Тогда*

$$g(\rho) = \sum_{m=0}^{k-1} c_m\, \rho^{2m-n-k+2}, \tag{12}$$

где c_m — *комплексные постоянные.*

Доказательство. Пусть сначала $g \in C^\infty(\alpha, \beta)$. Из леммы 3 следует, что функция $f(\rho) = (d_{-n+1} d_{-n} \cdots d_{-n-k+2}\, g)(\rho)$ принадлежит $S_{\alpha,\,\beta}$. Записывая для нее условие (1) при $y = 0$, получаем $f(\rho) = 0$ в $K_{\alpha,\,\beta}$. Отсюда следует равенство (12) для $g \in C^\infty(\alpha, \beta)$.

Пусть теперь $g \in C(\alpha, \beta)$, $G(x) = g(\rho)\, Y(\sigma)$. Для любого $0 < \varepsilon < \dfrac{\beta - \alpha}{2}$ рассмотрим радиальную функцию $\gamma_\varepsilon \in C^\infty(R^n)$ с носителем в шаре B_ε. Тогда свертка $G * \gamma_\varepsilon \in C^\infty(K_{\alpha+\varepsilon,\,\beta-\varepsilon})$ и принадлежит $S_{\alpha+\varepsilon,\,\beta-\varepsilon}$. Кроме того, $(G * \varphi_\varepsilon)(x) = U_\varepsilon(\rho)\, Y(\sigma)$ для некоторой функции U_ε на $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$ (см. доказательство леммы 5). Поэтому $U_\varepsilon(\rho) = \sum_{m=0}^{k-1} c_{m,\varepsilon}\, \rho^{2m-n-k+2}$. Отсюда в силу произвольности φ_ε следует (см. [3, с. 17, 18]) утверждение леммы 7.

Перейдем к доказательству основных результатов.

***Доказательство теоремы* 1.** *Необходимость* следует из лемм 2, 7 и равенства (1) при $y = 0$. Докажем *достаточность.* Из условия и леммы 6 следует, что $f_{kl}(\rho)\, Y_p^{(k)}(\sigma) \in S_{\alpha,\,\beta}$ при всех $k \geq 0$, $0 \leq l$, $p \leq a_k$. Положим $F(\tau) = = \int_S f(\tau^{-1} y + r\tau^{-1}\sigma)\, d\sigma$, $\tau \in SO(n)$. Умножая это равенство на $t_{lp}^k(\tau)$ и интегрируя на $SO(n)$, из (4), (5) получаем $\int_{SO(n)} F(\tau)\, \overline{t_{lp}^{(k)}(\tau)}\, d\tau = 0$. Из полноты системы $t_{lp}^k(\tau)$ (см. [4, с. 435, 50] для $n \geq 3$ и явные формулы для $t_{lp}^k(\tau)$ при $n = 2$ в п. 2) следует, что $F = 0$ на $SO(n)$ и теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Второе утверждение теоремы 2 следует из леммы 6 при $k - 2\nu = m$. Докажем первое утверждение. Имеем

$$|f_{kl}(\rho)| = \left| \int_S f(\rho\sigma)\, \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}\, d\sigma \right| \leq c_{k,l} \int_S |f(\rho\sigma)|\, d\sigma,$$

где постоянная $c_{k,l}$ не зависит от ρ. Отсюда $\lim\limits_{\rho\to\infty} \rho^m f_{kl}(\rho) = 0$ при любом фиксированном $m \in \mathbb{N}$. Из теоремы 1 получаем $f_{kl}(\rho) = 0$ в $K_{\alpha,\,\beta}$, откуда $f = 0$.

***Доказательство теоремы* 3.** Пусть E – бесконечное множество. Из формул (4), (5) следует, что $f_{kl}(r) = 0$ при любом $r \in E$. Из теоремы 1 получаем $f_{kl}(\rho) = 0$ в $K_{\alpha,\beta}$, откуда $f = 0$.

Пусть E – конечное множество и ненулевой многочлен $p(r) = \sum_{m=0}^{k-1} c_m r^{2m+2}$ обращается в нуль при всех $r \in E$. Тогда функции $p(\rho)\rho^{-n-k} Y_l^{(k)}(\sigma)$ удовлетворяют требованиям второго утверждения теоремы 3.

1. *Helgason S.* A duality in integral geometry: some generalizations of the Radon transform // Bull.. Amer. Math. Soc. – 1964. – **70**. – P. 435–446.
2. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
3. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 336 с.
4. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. – 2-е изд.– М.: Наука, 1991. – 576 с.
5. *Волчков В. В.* Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца // Мат. сб. – 1993. – **184**, № 7. – С. 71–78.
6. *Волчков В. В.* О функциях с нулевыми интегралами по кубам // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 6. – С. 859–863.
7. *Курант Р.* Уравнение с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 832 с.

Получено 10.06.96