УДК 519. 46

П. І. Голод, Т. В. Скрипник (Ін-т теорет. фізики НАН України, Київ)

ЯВНА РЕАЛІЗАЦІЯ НЕЗВІДНИХ ЗОБРАЖЕНЬ КЛАСИЧНИХ КОМПАКТНИХ ГРУП ЛІ У ПРОСТОРАХ СІЧНИХ ЛІНІЙНИХ РОЗШАРУВАНЬ*

We use the Borel – Weil scheme when constructing irreducible representations of the compact Lie groups in the spaces of holomorphic sections of line bundles over homogeneous manifolds. We find the explicit form of the space of sections and construct an invariant scalar product. We show that the space of holomorphic sections locally satisfies the Zhelobenko indicator system.

Реалізується схема Бореля – Вейля для побудови незвідних зображень компактних груп Лі у просторах голоморфних січних лінійних розшарувань над однорідними многовидами. Знайдено явний вигляд простору січних та побудовано інваріантний скалярний добуток. Показано, що локально простір голоморфних січних задовольняє індикаторну систему Д. Желобенка.

Серед можливих реалізацій зображень компактних груп особливе місце займає реалізація, що базується на теорії Бореля – Вейля [1]. Ця реалізація узагальнює відому конструкцію зображень групи $SU(2)$ у просторі поліномів від однієї комплексної змінної, що є локальною координатою проективного простору CP_1. Якщо G — компактна група Лі, G_c — її комплексифікація, B — борелівська підгрупа, то, згідно з теорією Бореля – Вейля, незвідні унітарні зображення компактної групи Лі реалізуються у просторі січних лінійних розшарувань над $B\backslash G_c$.

Теорія Бореля – Вейля має ряд нетривіальних узагальнень, таких як зображення у когомологіях та геометричне квантування [2 – 5]. Проте, окрім випадку $G = SU(2)$ [5], не існує явного опису простору січних, в якому реалізується зображення, та явного вигляду інваріантного скалярного добутку.

Локальним варіантом теорії Бореля – Вейля можна вважати так звану Z-реалізацію Д. Желобенка [7], в якій опис зображень зводиться до розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь (індикаторної системи). Проте конструкція Желобенка не дає явного опису простору зображень.

У даній роботі ми реалізуємо схему Бореля – Вейля, деталізуючи відповідні геометричні об'єкти: систему локальних карт, закон перетворення координат при переході між картами, функції переходу в індукованих векторних розшаруваннях. Використовуючи їх, ми знаходимо у випадку $G = SU(n)$ вигляд просторів січних лінійних розшарувань та унітаризуючі ядра скалярних добутків. Показано, що локальні компоненти січних задовольняють індикаторну систему Желобенка, тобто належать ядру виродженого оператора переплетення [7 – 9]. Це вказує на зв'язок між реалізацією Бореля – Вейля та „елементарними" модулями Харіш-Чандри. Хоча основні обчислення виконані у випадку $G = SU(n)$, розвинуту схему можна застосувати і для інших класичних компактних простих груп Лі, оскільки вони можуть розглядатись як підгрупи в [7].

1. Означимо деякі факти загальної теорії індукованих зображень. Нехай E_u — векторне розшарування, шаром якого є векторний простір V — простір зображення U індукуючої підгрупи B, а базою — $X = B\backslash G_c$. Це розшарування будується шляхом факторизації прямого добутку $G_c \times V$ за співвідношенням еквівалентності $(v, g) \approx (U(b)v, b^{-1}g)$. Нехай s — січна цього розшарування, s_α — її локальна тривіалізація за деякою системою карт U_α, x_α — координата точки многовиду у відповідній карті. Дія групи у просторах січних задається формулою [6]

*Частково підтримана грантом CRDF № UP-1309.

$$T_g s_\alpha(x_\alpha) = U\big(\sigma(x_\alpha) g \sigma^{-1}(x_\alpha^g)\big) s_\alpha(x_\alpha^g), \tag{1}$$

де σ — січна головного розшарування $B \to G_c \xrightarrow{\mathrm{Pr}} B \setminus G_c$ така, що майже для кожного $g \in G_c$ має місце розклад Маккі:

$$g = b_\alpha \sigma(x_\alpha), \quad \text{де } b_\alpha \in B.$$

Функції переходу в лінійному розшаруванні мають вигляд [6]

$$g_{\alpha\beta} = U\big(\sigma(x_\alpha)\sigma^{-1}(x_\beta)\big). \tag{2}$$

Нехай тепер G — компактна проста група Лі, G_c — її комплексифікація, g та g_c — відповідні алгебри Лі, $\mathring{H}$ — картанівська підгрупа в G (максимальний тор), h — відповідна картанівська підалгебра. Для алгебри g_c має місце трикутний розклад [10]: $g_c = n_- + h_c + n_+$. Нехай $n_- + h_c$ — борелівська підалгебра, B — відповідна підгрупа в G_c. Якщо λ — цілочисельна домінантна вага на картанівській підалгебрі, e^λ — відповідне зображення максимального тору, то, згідно з теоремою Лі, воно однозначно продовжується до незвідного голоморфного зображення борелівської підгрупи B. Отже, у цьому випадку $U = e^\lambda$, $V = C$.

2. Побудуємо тепер систему локальних карт та визначимо відображення σ. Для довільної комплексної напівпростої групи Лі має місце розклад

$$G_c = \bigcup_{w \in W} BZw, \tag{3}$$

який асоціюється з розкладом Брюа [11],

$$G_c = \bigcup_{w \in W} BwZ$$

в тому сенсі, що кожна компонента останнього міститься у відповідній компоненті розкладу (3). Дійсно,

$$BwZ = B(wZw^{-1})w = BZ_w^- Z_w w = BZ_w w \subset BZw,$$

де Z — „доповнювальна" до B нільпотентна підгрупа: $Z = \exp\{n_+\}$,

$$Z^- = \exp\{n_-\}, \quad Z_w = \left\{wZw^{-1} \cap Z\right\}, \quad Z_w^- = \left\{wZw^{-1} \cap Z^-\right\}.$$

На відміну від стандартного розкладу Брюа, розклад (3) не є диз'юнктивним — всі множини в ньому скрізь щільні в G_c та мають однакові розмірності.

Розклад (3) породжує систему локальних карт на многовиді X, $X = B \setminus G_c = \bigcup_{w \in W} Zw$, оскільки подає його у вигляді об'єднання $N = \mathrm{ord}\, W$ екземплярів нільпотентної групи Z, яка дифеоморфна комплексному лінійному простору. Таким чином, кількість карт у атласі повного стягового многовиду X дорівнює порядку групи Вейля, а його локальними комплексними координатами є параметри групи Z. У випадку класичних груп такими параметрами можуть бути матричні елементи матриць $z \in Z$.

***Зауваження* 1.** Оскільки згідно з розкладом (3), карти даного атласу знаходяться у взаємно однозначній відповідності з елементами групи Вейля, то будемо приписувати елементам групи Вейля додатковий індекс, що нумерує карти.

Знайдемо тепер відображення σ та функції переходу. Неважко побачити, що відображення σ має вигляд

$$\sigma(x_\alpha) = z_\alpha w_\alpha .$$

Тут індекс α елемента z підгрупи Z означає, що його параметри залежні від індексу, який нумерує карти.

Справедливе таке твердження.

Твердження 1.

i. *Переходи між картами здійснюються елементами групи Вейля:*

$$z_\beta = z_\alpha^{w_\alpha w_\beta^{-1}}.$$

ii. *Функції переходу в індукованому лінійному розшаруванні E_λ мають вигляд*

$$g_{\alpha\beta} = e^\lambda\left(b(w_\alpha w_\beta^{-1}, z_\alpha)\right), \tag{4}$$

де $z_\alpha w_\alpha w_\beta^{-1} = b(w_\alpha w_\beta^{-1}, z_\alpha) z_\alpha^{w_\alpha w_\beta^{-1}}$ *— розклад Гаусса* елемента* $z_\alpha w_\alpha w_\beta^{-1}$.

Доведення. Розглянемо два розклади Маккі, що відповідають різним локальним картам. Майже для кожного $g \in G_c$ маємо

$$g = b_\alpha z_\alpha w_\alpha,$$

$$g = b_\beta z_\beta w_\beta.$$

З першого розкладу випливає

$$g = b_\alpha z_\alpha w_\alpha w_\beta^{-1} w_\beta = \left(b_\alpha b(w_\alpha w_\beta^{-1}, z_\alpha)\right) z_\alpha^{w_\alpha w_\beta^{-1}} w_\beta .$$

Тому, порівнявши два розклади, одержуємо

$$z_\beta = z_\alpha^{w_\alpha w_\beta^{-1}}, \qquad b_\beta = b_\alpha b(w_\alpha w_\beta^{-1}, z_\alpha).$$

З означення відображення σ та попередньої формули випливає

$$\sigma(x_\alpha)\sigma(x_\beta)^{-1} = b(w_\alpha w_\beta^{-1}, z_\alpha).$$

Враховуючи формулу (2), дістаємо

$$g_{\alpha\beta} = e^\lambda\left(b(w_\alpha w_\beta^{-1}, z_\alpha)\right).$$

Отже, з твердження 1 можна зробити висновок, що вся геометрія однорідного многовиду та векторних розшарувань над ним міститься у групі Вейля відповідної напівпростої групи Лі.

Дія групи на локальну тривіалізацію січної в довільній локальній карті має вигляд

$$T_g s_\alpha(z_\alpha) = e^\lambda\left(z_\alpha g^{w_\alpha}\left(z_\alpha^{g^{w_\alpha}}\right)^{-1}\right) s_\alpha\left(z_\alpha^{g^{w_\alpha}}\right), \qquad \text{де } g^{w_\alpha} = w_\alpha g w_\alpha^{-1}.$$

Зауваження 2. Як елементи компактної групи твірні групи Вейля w_{α_i} мають вигляд [7]

$$w_{\alpha_i} = \exp i\pi \frac{(n_{\alpha_i} + n_{-\alpha_i})}{(\alpha_i, \alpha_i)},$$

де α_i — прості корені.

---

*Тут і в подальшому під розкладом Гаусса будемо розуміти першу компоненту розкладу Брюа.

Розглянемо тепер вибрану карту, що відповідає тривіальному елементу групи Вейля $w = e$. Розклад Маккі в цьому випадку буде звичайним розкладом Гаусса $g = b_{\alpha_0} z_{\alpha_0}$, а відображення σ матиме вигляд $\sigma(x_{\alpha_0}) = z_{\alpha_0}$ (в подальшому індекс α_0 для зручності будемо пропускати).

Дія групи на локальну компоненту січної в цій карті, згідно з формулою (1), матиме вигляд

$$T_g s(z) = e^{\lambda}\left(zg(z^g)^{-1}\right)s(z^g).$$

3. Нехай тепер $G = SU(n)$, $G_c = Sl(n, C)$. Тоді H — підгрупа діагональних унітарних матриць, B — підгрупа нижньотрикутних матриць, Z — підгрупа верхньотрикутних матриць з одиницями на головній діагоналі.

Оскільки $e^{\lambda}\left(zg(z^g)^{-1}\right) = e^{\lambda}(b(g,z)) = e^{\lambda}(h(g,z))$, де $zg = b(g,z)z^g = z^-(g, z)\,h(g,z)z^g$ — „трикутна" форма розкладу Гаусса,

$$h(g,z) \in H_c, \quad h(g,z) = \operatorname{diag}\left(zg\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \frac{zg\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}}{zg\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}}, \ldots, \frac{zg\begin{pmatrix}12\ldots n\\12\ldots n\end{pmatrix}}{zg\begin{pmatrix}12\ldots n-1\\12\ldots n-1\end{pmatrix}} \right) \; [7, 12],$$

враховуючи, що

$$e^{\lambda}(\operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) = d_1^{\lambda_1}(d_1 d_2)^{\lambda_2} \ldots (d_1 d_2 \ldots d_{n-1})^{\lambda_{n-1}} \quad [13],$$

маємо

$$e^{\lambda}(zg(z^g)^{-1}) = \left(zg\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)^{\lambda_1}, \left(zg\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}\right)^{\lambda_2}, \ldots, \left(zg\begin{pmatrix}12\ldots n-1\\12\ldots n-1\end{pmatrix}\right)^{\lambda_{n-1}}. \tag{5}$$

Тут $A\begin{pmatrix}l_1 l_2 \ldots l_k & l_1 l_2 \ldots l_k\\ i_1 i_2 \ldots i_k & i_1 i_2 \ldots i_k\end{pmatrix}$ — мінори матриці A, що стоять на перетині $l_1, l_2, \ldots, l_k$ рядків та $i_1 i_2, \ldots, i_k$ стовпців.

Отже, ми отримали Z-реалізацію Желобенка, яка співпадає з локальною тривіалізацією теорії Бореля – Вейля у вибраній локальній карті.

Для формулювання основної теореми необхідна наступна лема.

Лема 1. *При перетворенні $z \to z^g$, що визначається розкладом Гаусса елемента zg:*

$$zg = b(g,z)z^g, \quad b(g,z) \in B, \quad z^g \in Z, \tag{6}$$

мінори фіксованого порядку матриці z перетворюються дробово-лінійно:

$$z^g\begin{pmatrix}12\ldots k\\ i_1 i_2 \ldots i_k\end{pmatrix} = \frac{\sum\limits_{l_1 < l_2 \ldots < l_k} z\begin{pmatrix}12\ldots k\\ l_1 l_2 \ldots l_k\end{pmatrix} g\begin{pmatrix}l_1 l_2 \ldots l_k\\ l_1 l_2 \ldots l_k\end{pmatrix}}{\sum\limits_{l_1 < l_2 \ldots < l_k} z\begin{pmatrix}12\ldots k\\ l_1 l_2 \ldots l_k\end{pmatrix} g\begin{pmatrix}l_1 l_2 \ldots l_k\\ 12\ldots k\end{pmatrix}}. \tag{7}$$

Доведення. З (4) випливає рівність

$$b(g,z)z^g\begin{pmatrix}12\ldots k\\ i_1 i_2 \ldots i_k\end{pmatrix} = zg\begin{pmatrix}12\ldots k\\ i_1 i_2 \ldots i_k\end{pmatrix}.$$

Перетворимо її ліву частину за формулою Біне – Коші [12]:

$$\sum_{l_1 < l_2 \ldots < l_k} b(g,z)\begin{pmatrix}12\ldots k\\ l_1 l_2 \ldots l_k\end{pmatrix} z^g\begin{pmatrix}l_1 l_2 \ldots l_k\\ i_1 i_2 \ldots i_k\end{pmatrix} = zg\begin{pmatrix}12\ldots k\\ i_1 i_2 \ldots i_k\end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця $b(g, z)$ нижньотрикутна, то

$$b(g, z)\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ l_1 l_2 \ldots l_k \end{pmatrix} = \delta^1_{l_1}\delta^2_{l_2}\ldots\delta^k_{l_k} b(g, z)\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ 12\ldots k \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$z^g\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ i_1 i_2 \ldots i_k \end{pmatrix} = \frac{zg\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ i_1 i_2 \ldots i_k \end{pmatrix}}{b(g, z)\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ 12\ldots k \end{pmatrix}}.$$

Враховуючи, що $z\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ 12\ldots k \end{pmatrix} = 1$, маємо

$$b(g, z)\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ 12\ldots k \end{pmatrix} = zg\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ 12\ldots k \end{pmatrix}.$$

Це й доводить лему.

***Зауваження* 3.** Формула (7) узагальнює добре відомі формули [12] для розкладу Гаусса. Дійсно, оскільки матриця z верхньотрикутна, то

$$z_{kp} = z\begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 12\ldots k-1k \\ 12\ldots k-1p \end{pmatrix}, \quad p \geq k.$$

Враховуючи це, одержуємо формули для розкладу Гаусса як частковий випадок формули (4):

$$z^g\begin{pmatrix} 12\ldots k-1k \\ 12\ldots k-1p \end{pmatrix} = \frac{zg\begin{pmatrix} 12\ldots k-1k \\ 12\ldots k-1p \end{pmatrix}}{zg\begin{pmatrix} 12\ldots k-1k \\ 12\ldots k-1k \end{pmatrix}}.$$

Розглянемо тепер перетворення матриці z під дією групи Вейля. Оскільки ми розглядаємо конкретний випадок $G = SU(n)$, то $W = S_n$ і атлас складається з $\operatorname{ord} S_n = n!$ карт. Група Вейля породжується відбиттям стосовно простих коренів α_i, які при ізоморфізмі з груною перестановок співпадають з простими транспозиціями $w_{\alpha_i} = (i, i+1)$.

Матрична реалізація має вигляд

$$w_{\alpha_i} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

де діагональний блок $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ стоїть на $(i, i+1)$-й позиції. Враховуючи лему 1 та явний матричний вигляд елементів групи Вейля, неважко побачити, що для елемента групи Вейля $w(p)$, який відповідає перестановці p, справедлива рівність

$$zw(p)\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ i_1 i_2 \ldots i_k \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ p(i_1 i_2 \ldots i_k) \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1 (*леми* 1).** *Перетворення мінорів матриці* z *під дією групи Вейля має вигляд*

$$z^{w(p)}\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ i_1 i_2 \ldots i_k \end{pmatrix} = \frac{z\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ p(i_1 i_2 \ldots i_k) \end{pmatrix}}{z\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ p(12\ldots k) \end{pmatrix}}.$$

Покладемо $w_\alpha w_\beta^{-1} = w(p)$. Тоді на перетині карт

$$s_\alpha(z_\alpha) = g_{\alpha\beta} s_\beta(z_\beta).$$

Враховуючи явний вигляд функцій переходу (2), маємо

$$s_\alpha(z_\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(z_\alpha\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ p(12\ldots k) \end{pmatrix}\right)^{\lambda_k} s_\beta(z_\beta),$$

або на підставі зауваження 1 та наслідку 1

$$s_\alpha(z_\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(z_\alpha\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ p(12\ldots k) \end{pmatrix}\right)^{\lambda_k} s_\beta\left(\frac{z_\alpha\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ p(i_1 i_2 \ldots i_k) \end{pmatrix}}{z_\alpha\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ p(12\ldots k) \end{pmatrix}}\right).$$

Оскільки ми вимагаємо, щоб s_α та s_β були локальними компонентами глобально аналітичної січної , то s_α та s_β є аналітичними функціями скрізь в U_α та U_β. Отже, вони повинні бути поліномами і, як випливає з умов „склейки", поліномами степеня не вище λ_k від мінорів порядку k.

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема. *Простір незвідного унітарного зображення групи* $SU(n)$ *з вагою* $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1})$ *в реалізації у просторі січних розшарування* E_λ *локально співпадає з простором поліномів степеня не вище* λ_k *від мінорів* $z\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ i_1 i_2 \ldots i_k \end{pmatrix}$.

***Зауваження* 4.** Твердження теореми означає, що базис у просторі зображення можна вибрати серед мономів:

$$P_d(z) =$$

$$= \prod_{1\le i_1\le n}\left(z\begin{pmatrix} 1 \\ i_1 \end{pmatrix}\right)^{d_{i_1}} \prod_{1\le i_1\le i_2\le n}\left(z\begin{pmatrix} 12 \\ i_1 i_2 \end{pmatrix}\right)^{d_{i_1 i_2}} \cdots \prod_{1\le i_1\le i_2\le n}\left(z\begin{pmatrix} 12\ldots n-1 \\ i_1 i_2 \ldots i_{n-1} \end{pmatrix}\right)^{d_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}},$$

$$\sum_{i_1<i_2\ldots<i_k} d_{i_1 i_2 \ldots i_k} \le \lambda_k.$$

***Наслідок* 2 (*теореми*).** *Локальна тривіалізація голоморфних січних розшарування* E_λ *задовольняє індикаторну систему Желобенка.*

Доведення. Це перевіряється безпосереднім обчисленням з урахуванням вигляду індикаторної системи [6] та вигляду локальних компонент січних розшарування E_λ (теорема).

Знайдемо тепер унітаризуюче ядро скалярного добутку. Справедлива така лема.

Лема 2. *Функції*

$$\Omega_k(z) = \sum_{i_1<i_2\ldots<i_k} z\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ i_1 i_2 \ldots i_k \end{pmatrix} \overline{z\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ i_1 i_2 \ldots i_k \end{pmatrix}}$$

є мультиплікативними інваріантами, тобто

$$\Omega_k(z^g) = zg\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ 12\ldots k \end{pmatrix} \overline{zg\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ 12\ldots k \end{pmatrix}} \Omega_k(z).$$

Це випливає з дробово-лінійного характеру перетворення мінорів (лема 1) і перевіряється безпосереднім обчисленням.

Наслідок* 3 *(леми* 2*). *Інваріантний скалярний добуток у просторі січних має вигляд*

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_Z \frac{s_1(z)\overline{s_2(z)}}{\prod_{k=1}^{n-1} \Omega_k^{\lambda_k+2}(z)} \prod_{i<j} dz_{ij}.$$

Доведення. Інваріантність випливає з трансформаційних властивостей січних, міри та функцій Ω_k (лема 2). Крім того, оскільки доповнення до Z в $X = B \backslash G_c$ має меншу розмірність (міру нуль), то інтегрування по X можна замінити інтегруванням по Z.

***Зауваження* 5.** Знайдене ядро унітаризує не тільки простір голоморфних січних, але й простір гармонійних форм (голоморфні січні можуть розглядатись як гармонійні форми нульового порядку). Простори гармонійних форм порядку, більшого за нуль, як випливає з теорії Бота [2, 3], теж є незвідними G-модулями. Цей випадок (теорема Бота і Константа) буде розглянуто в наступній роботі.

Приклад. *Зображення групи* $SU(3)$. В цьому випадку

$$z = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_2 \\ 0 & 1 & z_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Простір зображення складається з поліномів:

$$P_{k_1 k_2 l_1 l_2}(z) = z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{l_1} (z_1 z_3 - z_2)^{l_2},$$
$$k_1 + k_2 \le \lambda_1,$$
$$l_1 + l_2 \le \lambda_2,$$

Інваріантний скалярний добуток має вигляд

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_{C^3} \frac{s_1(z_1, z_2, z_3)\overline{s_2(z_1, z_2, z_3)}}{\left(1+|z_1|^2+|z_2|^2\right)^{\lambda_1+2}\left(1+|z_3|^2+|z_3 z_1 - z_2|^2\right)^{\lambda_2+2}} \times$$
$$\times \prod_i dz_i \wedge \prod_i d\bar{z}_i.$$

***Зауваження* 6.** Оскільки інші класичні компактні групи Лі можуть бути реалізовані як підгрупи в $SU(n)$, а відповідні нільпотентні підгрупи Z — як підгрупи групи верхньотрикутних матриць, то даним методом можна аналогічно описати простори їх незвідних унітарних зображень. Для цього потрібно лише врахувати явний вигляд підгрупи Z [14] та змінити мультиплікатор (5). Узагальнення на некласичні групи можна здійснити, скориставшись нормальними координатами (координатами в алгебрі) для параметризації підгрупи Z, а отже, і многовиду X.

Підсумуємо отримані результати щодо структури простору зображення. Незвідність забезпечується групою Вейля, що в реалізації Бореля – Вейля діє через топологію: здійснюючи склейку між картами (твердження 1), вона „вирізує" потрібний підпростір з простору усіх голоморфних функцій. Тому реалізація Бореля – Вейля близька до інших реалізацій незвідних зображень компактних груп Лі, наприклад до тензорної [7]. Це особливо очевидно у випадку унітарних груп: якщо проаналізувати мономи $P_d(z)$, то неважко переконатись, що вони відтворюють структуру тензорів із заданою симетрією. Дійсно, вони кососиметричні відносно перестановки „мінорних" індексів і симетричні відносно перестановок мінорів між собою. Звідси випливає, що моному $P_d(z)$ можна співставити певний клас спряжених елементів у групі перестановок (діаграму Юнга). Тобто ми знову приходимо до дуальності Г. Вейля між зображеннями компактної групи та зображеннями її групи Вейля.

Крім того, наслідок 2 теореми показує, що простір голоморфних січних є ядром виродженого оператора переплетення [8, 9]. Це вказує на тісний зв'язок між геометричними реалізаціями незвідних зображень та „методом переплітаючих операторів". Розкрити цей зв'язок ми плануємо в наступній публікації, присвяченій узагальненій теорії Бореля – Вейля — теорії Бореля – Вейля – Бота.

1. *Borel A., Weil A.* Representations lineares et espaces homogenes Kallerians des groups de Lie Compacts // Seminare Bourbaki. – May 1954 (expose by J. P. Serre).
2. *Bott R.* Homogeneous Vector Bundles // Ann. Math. – 1957. – **66,** № 2. – P. 203 – 248.
3. *Kostant B.* Generalized Borel – Weil theorem // Ibid. – 1961. – **74,** № 2. – P. 329 – 390.
4. *Костант Б.* Квантование и унитарные представления // Успехи мат. наук. – 1973. – **28,** № 1. – С. 161–225.
5. *Харт Н.* Геометрическое квантование в действии. – М.: Мир, 1985. – 343 с.
6. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1978. – 343 с.
7. *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
8. *Желобенко Д. П.* О гармоническом анализе функций на полупростых группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. Мат. – 1963. – **27,** № 6. – С. 1343–1346.
9. *Желобенко Д. П.* Симметрия в классе элементарных представлений // Функцион. анализ и его прил. – 1967. – **1,** № 2. – С. 15–39.
10. *Wallach N.* Induced representations of Lie algebras and a theorem of Borel and Weil // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **36.** – P. 181.
11. *Warner G.* Harmonic analysis on semisimple Lie groups. – Berlin etc: Springer-Verlag, 1972. – 530 p.
12. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.
13. *Tsuchikawa M.* Unitary representations of $Sl(N, C)$ // Proc. Jap. Nat. Acad. – 1968. – **44.** – P. 859.
14. *Гельфанд И. М., Наймарк М.* Унитарные представления классических групп // Тр. мат. о-ва им. Стеклова. – 1950. – **36.** – 288 с.

Одержано 24.06.97