УДК 514

В. Ф. Игнатенко (Симферопол. ун-т)

ДИАМЕТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ОТРАЖЕНИЯМИ. III

The geometric theory of invariants of wild groups of skew symmetries in the real Euclidean space is presented.

В основному викладається побудована автором геометрична теорія інваріантів диких груп косих симетрій у дійсному евклідовому просторі.

Введение. Пусть в вещественном евклидовом пространстве E^m задана $(m-1)$-мерная алгебраическая поверхность F_n порядка n, инвариантная относительно бесконечной группы G_μ, порожденной косыми (в частности, ортогональными) отражениями относительно $(m-1)$-мерных плоскостей. Группы G_μ определяют важный класс групп непрерывных преобразований (топологических многообразий) и могут найти широкое применение, например, при изучении систем дифференциальных уравнений (см. [1 – 5]) и при исследовании квадратичных форм, коэффициенты которых зависят от точки многообразия [6, 7].

Многие из результатов теории инвариантов групп G_μ естественно переносятся на общие многообразия (для конечных групп симметрий см. [8]). Они стимулируют также развитие направления, связанного с использованием комбинаторной геометрии тех методов, которые применяются при изучении поверхностей F_n с группами G_μ. Тем более что в последнее время усиливается интерес к изучению геометрии симметричных поверхностей [9].

Систематическому изложению начал геометрической теории инвариантов групп G_μ посвящены работы [10, 11]. В данной статье продолжается рассмотрение указанной теории. Все результаты принадлежат преимущественно автору.

1. О типах поверхностей с асимптотическими направлениями симметрии. В декартовой системе координат Ox_i, $i=\overline{1,m}$, поверхность F_n зададим уравнением

$$\sum_{s=0}^{n} \varphi_{n-s}(\vec{x}) = 0, \tag{1}$$

где $\varphi_{n-s}(\vec{x})$ — формы степеней $n-s$ от координат вектора $\vec{x} = (x_i)$.

Плоскости симметрии поверхности F_n, инвариантной относительно группы G_μ, образуют множество B_μ. Направления симметрии плоскостей B_μ определяются векторами и составляют множество N_μ (коллинеарные векторы не различаются); μ-плоскость Π^μ — его линейная оболочка.

Пусть направления симметрии $\vec{u}$ являются асимптотическими для поверхности F_n $(\varphi_n(\vec{u}) = 0$ [11]$)$, причем линейная оболочка каждой $G_\mu(\vec{u})$-орбиты вектора $\vec{u} \in N_\mu$, например Π^λ, удовлетворяет следующему условию: хотя бы одна λ-плоскость, не лежащая на F_n и параллельная Π^λ, пересекает F_n по $(\lambda-1)$-квадрикам с общей симметрией. Тогда группа G_μ будет нететраэдральной [11]. При этом строение множества B_λ определяется следующей леммой.

Лемма 1 [12]. *Поверхность F_n без параллельных плоскостей симметрии, инвариантная относительно группы G_λ, определяется уравнением*

$$\sum_{j=0}^{s} R_j(x_\gamma)\,\xi^{s-j} = 0, \tag{2}$$

где

$$\xi = \sum_{p=1}^{\tau} a_p x_p^2 + 2\sum_{k=1}^{\lambda} \xi_k(x_\gamma)\,x_k,$$

$$1 \le \tau \le \lambda < m,$$

все $a_p \ne 0$, $2s < n \ge \deg R_j + 2(s-j)$, $\deg \xi_k \le 1$, $\gamma = \overline{\lambda+1, m}$. *Множество* B_λ *состоит из диаметральных плоскостей квадрики с уравнением* $\xi = 0$.

Доказательство. Установим строение B_λ с использованием диаметральных поверхностей [10]. Согласно условию на G_λ, уравнение (1) запишем так:

$$\sum_{j} R_j(x_\gamma)\,\zeta^{s-j} = 0; \tag{3}$$

многочлен $\zeta = \sum_{p=1}^{\tau} \zeta_p(x_\gamma)\,x_p^2 + 2\sum_{k=1}^{\lambda} \xi_k(x_\gamma)\,x_k$, все $\zeta_p \not\equiv 0$ и ζ_p, ξ_k не имеют непостоянного множителя.

Плоскость симметрии $\pi_{\vec u}$, сопряженную вектору $\vec u = (u_i) \parallel \Pi^\lambda$ $(u_\gamma = 0)$, зададим уравнением

$$\sum_i p_i(\vec u)\,x_i + p_{m+1}(\vec u) = 0. \tag{4}$$

Если $x_\gamma = c_\gamma$ — уравнение плоскости $\Pi_0^\lambda \parallel \Pi^\lambda$, то $(\lambda-1)$-поверхность $\Pi_0^\lambda \cap F_n$ симметрична относительно $(\lambda-1)$-плоскости $\Pi_0^\lambda \cap \pi_{\vec u}$, уравнение которой в Π_0^λ имеет вид

$$\sum_k p_k(\vec u)\,x_k + \sum_\gamma p_\gamma(\vec u)\,c_\gamma + p_{m+1}(\vec u) = 0. \tag{5}$$

На основании ζ уравнение (5) перепишем так:

$$\sum_p \zeta_p(c_\gamma)\,u_p\,x_p + \sum_k \xi_k(c_\gamma)\,u_k = 0. \tag{6}$$

Из (5), (6) следует

$$p_h(\vec u) = 0, \qquad h = \overline{\tau+1, \lambda}. \tag{7}$$

Согласно (5), коэффициенты при x_p в (6) не зависят от c_γ. Значит, многочлены $\zeta_p = a_p\zeta'(x_\gamma)$, где a_p — числа, $\deg\zeta' \ge 0$.

В случае $\zeta' \equiv 1$ находим следующее уравнение диаметральной поверхности $D_{n'-1}(\vec u)$ порядка $n'-1$:

$$\left(\sum_p a_p u_p x_p + \sum_k \xi_k u_k\right)\sum_{j=0}^{s-1}(s-j)\,\zeta^{s-j-1} R_j = c; \tag{8}$$

число n' есть степень (3) (без многочлена R_s). Поскольку $\pi_{\vec u}$ является компонентой $D_{n'-1}(\vec u)$ [10], уравнение (8) с учетом (4) и (7) принимает вид

$$\left[\sum_{i \neq h} p_i(\vec{u})\, x_i + p_{m+1}(\vec{u})\right] \rho(\vec{u}, \vec{x}) = 0. \tag{9}$$

Согласно (6), в (8) и (9) не все функциональные коэффициенты при x_p равны тождественно нулю. Сравнивая их, получаем

$$\rho = \delta(\vec{u}) \sum_{j=0}^{s-1} (s-j)\, \zeta^{s-j-1} R_j. \tag{10}$$

Уравнение (9) показывает, что $\deg \rho = n' - 2$; при этом из (8) и (10) вытекает $\deg \xi_k \leq 1$. Положим

$$\xi_k = \sum_{\gamma} b_{k\gamma}\, x_\gamma + b_k, \qquad k = \overline{1, \lambda}. \tag{11}$$

Тогда уравнение (4) принимает вид

$$\sum_{p} a_p u_p x_p + \sum_{\gamma} \left(\sum_{k} b_{k\gamma} u_k \right) x_\gamma + \sum_{k} b_k u_k = 0. \tag{12}$$

Подставляя значения ξ_k, определяемые формулами (11), в многочлен $\zeta \equiv \equiv \xi$, получаем, что уравнение (12) задает диаметральную плоскость квадрики Φ_2 с уравнением $\zeta = 0$, сопряженную вектору $\vec{u}$.

Следовательно, диаметральные плоскости Φ_2, сопряженные векторам $\vec{u} \,|\, u_\gamma = 0$, составляют множество B_λ; векторы Π^{λ}, не определяющие асимптотические направления для Φ_2, принадлежат N_λ. Из уравнения (12) видно, что при $\tau < \lambda$ плоскости B_λ содержат оси Ox_h.

Если $\deg \zeta' > 0$, то член $\sum_p a_p u_p x_p$ в уравнении (8) и правая часть формулы (10) имеют множитель ζ'. Поэтому все ξ_k имеют множитель ζ', что исключается. Лемма доказана.

Плоскости множества B_λ проходят через одну точку, например, O; тогда в (11) все $b_k = 0$. Коэффициенты при x_γ в уравнении (12) могут обращаться тождественно в нуль. Если это имеет место в случае $\gamma = \gamma_0$, то $b_{k\gamma_0} = 0$. Выберем оси координат так, чтобы в (12) числа $b_{k\gamma_1} = 0$, $\gamma_1 = \overline{\lambda + 1, m'} \leq m$. Любая из плоскостей B_λ содержит оси $Ox_{\tau+1}, \ldots, Ox_{m_0}$, где $m_0 = \lambda$ или $m' > > \lambda$. При этом предполагается, что плоскости B_λ $(m_0 - \tau)$-параллельны; многочлены

$$\xi_k = \xi_k(x_{\gamma_2}), \qquad \gamma_2 = \overline{m_0 + 1, m}. \tag{13}$$

Множество N_μ, если $\mu > \lambda$, состоит из нескольких орбит; μ-плоскость Π^{μ} является суммой μ_j-плоскостей Π^{μ_j}, $j = \overline{0, q}$, $\mu_0 = \lambda$. Так как множество B_λ инвариантно относительно всей группы G_μ, то справедливо такое следствие.

Следствие. *Если $\mu > \lambda$, то $m_0 = m'$ и μ_r-плоскость Π^{μ_r}, $0 < r \leq q$, параллельна $(m' - \tau)$-плоскости $\Pi^{\mu' - \tau}(x_{\tau+1}, \ldots, x_{m'})$.*

Плоскости множества B_{μ_r} параллельны осям Ox_p, $p = \overline{1, \tau}$, которые задают направления симметрии N_λ. Так как векторы $\Pi^{\lambda - \tau}(x_h)$ не входят в N_λ, то возможен случай $\Pi^{\lambda-\tau} \bigcap \Pi^{\mu_r} \neq 0$. Следовательно, Π^{μ} не будет, вообще говоря, прямой суммой Π^{μ_j}.

2. Размерность пересечения линейных оболочек двух орбит направлений симметрии. Рассмотрим μ_1-плоскость $\Pi^{\mu_1}(x_l)$, $l = \overline{\alpha+1, \alpha+\mu_1} \le m'$, $\alpha \ge \tau$, $\alpha + \mu_1 > \lambda$. Уравнение (2) принимает вид

$$\sum_{j=0}^{s'} S_j(x_v)\,\theta^{s'-j} = 0, \tag{14}$$

где

$$\theta = \sum_{\beta=\lambda+1}^{\tau_0} a_\beta x_\beta^2 + 2\sum_l \theta_l(x_{\gamma'})\,x_l,$$

$n \ge \deg S_j + 2(s'-j)$, $S_0 \not\equiv 0$, $\lambda + 1 \le \tau_0 \le \alpha + \mu_1$, $v = i \ne l$, $\gamma' = \overline{\alpha+\mu_1+1, m}$.

Положим

$$\theta_l = \sum_{\gamma'} c_{l\gamma'} x_{\gamma'} + c_l. \tag{15}$$

Множество B_{μ_1} определяется уравнением

$$\sum_\beta a_\beta u_\beta x_\beta + \sum_{\gamma'}\left(\sum_l c_{l\gamma'} u_l\right) x_{\gamma'} + \sum_l c_l u_l = 0. \tag{16}$$

Если все плоскости B_{μ_1} содержат O, то $c_l = 0$. Предположим, что общими переменными квадратичных форм ξ и θ являются только

$$x_{\gamma_3} \mid \{\gamma_3\} \bigcap \{k\} = \varnothing \tag{17}$$

(см. (2) и (14)). На основании (13), (15) и (17)

$$\{\gamma_3\} \subseteq \{\gamma_2\}. \tag{18}$$

Переменные x_{γ_3} входят в (12), (16) и влияют, с учетом (18), на размерность пересечения любых двух плоскостей симметрии, одна из которых принадлежит B_λ, а другая — B_{μ_1}.

Пусть $\Pi^\lambda \bigcap \Pi^{\mu_1} = \Pi^\varepsilon(x_w)$, $w \le \lambda$. Из уравнения (2) видно, что любая прямая, параллельная каждой из осей Ox_w, либо лежит на поверхности Φ_2 с уравнением $\xi = 0$, либо пересекает ее в одной точке. Поэтому Ox_w не задает направление симметрии и, значит, степень x_w в θ равна единице. Пусть, для определенности,

$$w = \overline{\alpha+1, \varepsilon} \le \lambda. \tag{19}$$

Многочлены θ_l не содержат x_w. Левая часть в (14) содержит одночлены $x_v x_w$ $(v \ne w)$ в степени s' $(j = 0)$. Так как в (2) их наибольшая степень равна s, то число $s' = s$. Приравнивая функциональные коэффициенты при x_w^s в (2) и (14), получаем

$$R_0 \xi_w^s = S_0 \theta_w^s. \tag{20}$$

Следовательно, многочлены R_0, S_0 (как и ξ_w, θ_w) зависят только от переменных $x_{\gamma'}$, $\gamma' = \overline{\alpha+\mu_1+1, m}$.

Поскольку здесь поверхность F_n отлична от цилиндра, то $\xi_{w_1} \neq c\xi_{w_2}$ ($\alpha + 1 \le w_1,\ w_2 \le \varepsilon$), если $\varepsilon > \alpha + 1$ (см. (19)). Поскольку (14) является видоизмененным уравнением (2), из (20) находим $R_0 = S_0$ и $\xi_{w_1} = \theta_{w_1}$, $\xi_{w_2} = \theta w_2$. Значит, справедлива следующая лемма.

Лемма 2 [12]. *В случае* $\varepsilon > \alpha + 1$ *выполняются соотношения* $R_0 = S_0$ *и* $\xi_{w'} = \theta_{w'}$, *где* $w' \in \{w\}$.

Пусть $m_1 = \max\{\lambda'\}$, где λ' есть размерность $\Pi^{\lambda'} \parallel \Pi^{\lambda}$, $\lambda' \ge \lambda$, пересекающей F_n по $(\lambda' - 1)$-квадрикам с общей симметрией. Введем аналогично число $m_2 = \max\{\mu_1'\}$, где $\Pi^{\mu_1'} \parallel \Pi^{\mu_1}$, $\mu_1' \ge \mu_1$. Будем считать в (2) и (14) $\lambda = m_1$ и $\mu_1 = m_2$; Π^{m_1}, Π^{m_2} соответствуют множествам N_{m_1}, N_{m_2}. Неожиданным оказался следующий результат.

Теорема 1 [12]. $\operatorname{Dim}(\Pi^{m_1} \parallel \Pi^{m_2}) \le 1$.

Доказательство. Предположим, что Π^{m_1} и Π^{m_2} пересекаются по p-плоскости ($p > 1$), которая параллельна осям Ox_w, $w = \overline{\alpha + 1, \varepsilon}$ $= \alpha + p$. На основании леммы 2

$$\xi = \xi_0 + z, \quad \theta = \theta_0 + z, \tag{21}$$

где $z = 2\sum_w \xi_w x_w$. Уравнения (2) и (14) перепишем так:

$$\sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} R_k \xi_0^{j-k} \right) z^{s-j} = 0, \tag{22}$$

$$\sum_{j} \left(\sum_{k} C_{s-k}^{s-j} S_k \theta_0^{j-k} \right) z^{s-j} = 0, \tag{23}$$

$$\sum_{k} C_{s-k}^{s-j} R_k \xi_0^{j-k} = \sum_{k} C_{s-k}^{s-j} S_k \theta_0^{j-k}, \quad j = \overline{0, s}. \tag{24}$$

Уравнение

$$\sum_{j} P_j(x_{\gamma'})(\xi_0 + \theta_0 + z)^{s-j} = 0, \quad \gamma' = \overline{\alpha + \mu_1 + 1, m}, \tag{25}$$

допускает вид

$$\sum_{j} \left[\sum_{k} C_{s-k}^{s-j} P_k (\xi_0 + \theta_0)^{j-k} \right] z^{s-j} = 0. \tag{26}$$

Убедимся, что существуют многочлены $P_j(x_{\gamma'})$, при которых каждое из уравнений (22), (23) представимо в виде (26).

Считая в (26) P_k неопределенными многочленами от x_i, $i = \overline{1, m}$, рассмотрим соотношения

$$\sum_{k} C_{s-k}^{s-j} R_k \xi_0^{j-k} = \sum_{k} C_{s-k}^{s-j} P_k (\xi_0 + \theta_0)^{j-k}. \tag{27}$$

Из них находятся P_k как многочлены от ξ_0, θ_0 и R_k (или S_k). В частности, $P_0 = R_0(x_{\gamma'})$. Выберем натуральное $r \mid 1 \le r \le s$. Согласно (24) и (25), P_1 равен любому из многочленов $R_1 - sR_0\theta_0$, $S_1 - sR_0\xi_0$ ($r = 1$), которые, с учетом (13), не содержат переменных $x_{k'}$ ($k' \in \{k\}$) и $x_{l'}$ ($l' \in \{l\}$) соответственно. Значит, $P_1 = P_1(x_{\gamma'})$. Предположим, что в случае $r > 2$ $P_j = P_j(x_{\gamma'})$, если $j \mid 1 < j < r \le s$. В левой и правой частях (27), $j = r$, функциональные коэффициенты при $\xi_0^{j'}$, $j' = \overline{0, r}$, одинаковы. Следовательно,

$$P_r = R_r - \sum_{k''=0}^{r-1} C_{s-k''}^{s-r} P_{k''} \theta_0^{r-k''}. \tag{28}$$

Аналогично, с учетом (24) находим

$$P_r = S_r - \sum_{k''=0}^{r-1} C_{s-k''}^{s-r} P_{k''} \xi_0^{r-k''}. \tag{29}$$

Так как $x_{k'}$ и $x_{l'}$ не входят в правые части формул (28) и (29), то $P_r = P_r(x_{\gamma'})$.

Из уравнения (25) видно, что любая из $(m - \alpha - \mu_1)$-плоскостей с уравнениями $x_{\gamma'} = c_{\gamma'}$ пересекает F_n по $(m - \alpha - \mu_1 - 1)$-квадрикам. Поскольку это невозможно, размерность пересечения Π^{m_1} и Π^{m_2} не больше единицы. Теорема доказана.

Так как доказательство теоремы 1 основано на существовании общей части z многочленов ξ и θ (см. (21)), то справедливо такое следствие.

***Следствие* 1.** *Если* $\Pi^{m_1} \cap \Pi^{m_2} \neq 0$, *то* $\xi_\varepsilon \neq \theta_\varepsilon$ *и*

$$R_0(x_{\gamma'}) = R_0' \theta_\varepsilon^s, \quad S_0(x_{\gamma'}) = R_0' \xi_\varepsilon^s. \tag{30}$$

С учетом леммы 1 и формул (30) уравнения (2) и (14), если $\Pi^{m_1} \cap \Pi^{m_2} \neq 0$, можно записать так:

$$\sum_{j=0}^{s} R_j(x_\gamma) \left[\sum_{p=1}^{\tau} a_p x_p^2 + 2 \sum_{k=1}^{\lambda} \xi_k(x_{\gamma_2}) x_k \right]^{s-j} = 0, \tag{31}$$

$$\sum_{j=0}^{s} S_j(x_v) \left[\sum_{\beta=\lambda+1}^{\tau_0} a_\beta x_\beta^2 + 2 \sum_{l=\lambda}^{\lambda+\mu_1-1} \theta_l(x_{\gamma'}) x_l \right]^{s-j} = 0, \tag{32}$$

где R_0, S_0 удовлетворяют формулам (30); $\gamma = \overline{\lambda+1, m}$, $1 \leq \tau \leq \lambda$, $\lambda + 1 \leq \tau_0 \leq \lambda + \mu_1 - 1$, $\gamma' = \overline{\lambda + \mu_1, m}$, $v = i \neq l$ и $\gamma_2 = \overline{m'+1, m}$ согласно (13).

***Следствие* 2.** *Уравнение поверхности* F_n, *инвариантной относительно группы* $G_\mu \mid \Pi^{m_1} \cap \Pi^{m_2} \neq 0$, *приводится к любому из видов* (31) *и* (32).

3. Общее уравнение поверхности с нететраэдральной группой симметрий. Уравнение поверхности F_n с тетраэдральной группой G_μ^t устанавливает теорема 2 из работы [11]. Поэтому рассмотрим группу $G_\mu \neq G_\mu^t$ с асимптотическими направлениями симметрии для F_n.

Изучим первоначально общую схему строения μ-плоскости Π^μ и множества B_μ (они определяют группу G_μ).

Существует такой набор μ_j-плоскостей Π^{μ_j}, $j = \overline{0, q}$, — линейных оболочек направлений симметрии плоскостей B_{μ_j}, что

$$\Pi^\mu = \sum_{j=0}^{q} \Pi^{\mu_j}, \tag{33}$$

причем каждая из μ_j'-плоскостей $\Pi^{\mu_j'} \parallel \Pi^{\mu_j}$ $(\mu_j' > \mu_j)$ не пересекает поверхность F_n по $(\mu'_j - 1)$-квадрикам с общей симметрией. Согласно лемме 1, множества B_{μ_j} состоят из диаметральных плоскостей квадрик, определяемых уравнением F_n. Плоскости B_{μ_j} пересекаются с любой из μ_j-плоскостей $\Pi_0^{\mu_j} \parallel \Pi^{\mu_j}$ по $(\mu_j - 1)$-плоскостям, параллельным в Π^{μ_j} некоторым γ_j-плоскостям Π^{γ_j}, $0 \le \gamma_j \le \mu_j - 1$. Каждое из множеств $\{\Pi^{\mu_j} \cap \pi_j\}$, где π_j — произвольный элемент B_{μ_j}, содержит $d_j = \mu_j - \gamma_j$ линейно независимых $(\mu_j - 1)$-плоскостей; они являются диаметральными $(\mu_j - 1)$-плоскостями $(\mu_j - 1)$-поверхностей $\Pi^{\mu_j} \cap F_n$ и сопряжены направлениям симметрии с линейными оболочками $\Pi^{d_j} = \Pi^{\mu_j} \ominus \Pi^{\gamma_j}$. Здесь плоскости B_{μ_j}, сопряженные векторам Π^{d_j}, проходят через Π^{γ_j}.

Лемма 3 [13]. *Пусть f-плоскость Π^f (g-плоскость $\Pi^g \ne \Pi^f$) есть линейная оболочка орбиты N_f (N_g) некоторого вектора $\vec{u} \in N_\mu$ ($\vec{v} \in N_\mu$) относительно группы G_μ. Тогда плоскости множества B_μ по направлениям N_f параллельны Π^g.*

Действительно, направлениям N_f сопряжены плоскости B_μ, составляющие множество B_f. Плоскости B_f пересекаются по некоторой p-плоскости Π^p. Каждый элемент N_g параллелен Π^p. С другой стороны, пусть вектор $\vec{v} \nparallel \Pi^p$ ($\vec{v} \in N_g$); ему сопряжена плоскость π. Она не проходит через Π^p, так как, согласно лемме 1, любая плоскость множества B_μ, содержащая Π^p, принадлежит B_f. Отражая плоскости B_f (со своими направлениями симметрии) относительно π, получаем расширение орбиты N_f, что невозможно.

В известном смысле лемма 3 является модификацией следствия 1 теоремы 1.

Положим $\Pi^{\nu_r} = \sum_{s=0}^{r-1} \Pi^{\mu_s}$, $0 < r \le q$. Лемма 3 показывает, что плоскости множества B_{μ_r} параллельны Π^{ν_r}; прямые $\Pi^{\mu_r} \cap \Pi^{\nu_r}$ не определяют направления симметрии, т. е. являются асимптотическими для $(\mu_r - 1)$-поверхности $\Pi^{\mu_r} \cap F_n$.

Линейные оболочки всех орбит ($\ne N_f$) векторов N_μ относительно G_μ дают в сумме ν-плоскость Π^ν. Выделим в Π^f d-плоскость $\Pi^d \in \{\Pi^{d_j}\}$.

Лемма 4 [13]. $\operatorname{Dim}(\Pi^\nu + \Pi^d) = \nu + d$.

Действительно, согласно строению Π^d и лемме 3, в Π^d можно выбрать оси координат Ox_α, $\alpha = \overline{1, d}$, так, что плоскости B_μ по направлениям симметрии, определяемым прямыми в Π^d, являются диаметральными плоскостями цилиндров с уравнениями $\sum_\alpha a_\alpha x_\alpha^2 = 0$, $a_\alpha \ne 0$; все остальные оси координат лежат в Π^ν и $\Pi^f \ominus \Pi^d$.

Из лемм 3 и 4 вытекает следующая лемма.

Лемма 5. *В разложении* (33) *μ_j-плоскости Π^{μ_j} определяются однозначно (с точностью до их нумерации).*

Пусть $\Pi^{\omega_k} = \Pi^\nu$, где $k \in \{0, \ldots, q\}$, $f = \mu_k$; $\Pi^{p_k} = \Pi^{\mu_k} \cap \Pi^{\omega_k}$, $p_k \ge 0$. Зафиксируем Π^{μ_j}, считая, например, $\gamma_0 \geq \ldots \geq \gamma_q$. Так как $\Pi^{\nu_r} \subseteq \Pi^{\omega_r}$, $0 < r \leq q$, то

$$\Pi^{v_r} = \Pi^{\mu_r} \cap \Pi^{\nu_r}, \quad v_r \leq p_r, \tag{34}$$

$$\Pi^{\gamma_r} = \Pi^{v_r} \oplus \Pi^{c_r}, \quad \gamma_r = v_r + c_r. \tag{35}$$

Лемма 6 [13]. $\Pi^{v_r} = \Pi^{\gamma_r} \cap \Pi^{t_r}$, *где*

$$\Pi^{t_r} = \sum_{s=0}^{r-1} \Pi^{\gamma_s}.$$

В самом деле, возьмем произвольную прямую $l \in \Pi^{v_r}$, проходящую через точку O. Согласно лемме 3 в Π^{ν_r} $(\nu_r - 1)$-плоскости симметрии по направлениям N_{μ_0} параллельны μ_0'-плоскости

$$\Pi^{\mu_0'} = \Pi^{\mu_1} + \ldots + \Pi^{\mu_{r-1}} + \Pi^{\gamma_0}. \tag{36}$$

Согласно строению Π^{d_0}, не существует μ_0''-плоскость $(\mu_0'' > \mu_0')$, которой параллельны указанные выше $(\nu_r - 1)$-плоскости. Поэтому прямая $l \in \in \Pi^{\mu_0'}$. Так как в (36) индексы μ_0', μ_{k_0} $(1 \leq k_0 \leq r-1)$, γ_0 можно заменить на μ_{k_0}', μ_0, γ_{k_0} соответственно, то l принадлежит пересечению $\Pi^{\mu_0'} \cap \ldots$ $\ldots \cap \Pi^{\mu_{r-1}'}$, которым является Π^{t_r}.

Группа G_μ называется *дикой*, если каждая из μ_j-плоскостей Π^{μ_j} имеет ненулевое пересечение с суммой остальных линейных оболочек, и обозначается через G_μ^w.

В леммах 1 – 5 содержится следующий важный результат.

Теорема 2. *Для дикой группы* G_μ^w *существует разложение*

$$\Pi^{\mu_j} = \Pi^{d_j} \oplus \Pi^{\gamma_j}, \quad 0 \leq j \leq q, \tag{37}$$

где числа $\gamma_j > 0$, *а произвольное направление симметрии* $\vec{u} \in N_{\mu_j}$ *не параллельно* Π^{γ_j}. *При этом взаимное расположение всех* Π^{μ_j} *определяют* γ_j*-плоскости* Π^{γ_j}.

Из теорем 1 и 2 работы [11], а также леммы 1 видно, что разложение (37) справедливо для любой группы G_μ, если $\gamma_j \geq 0$. Существуют группы $G_\mu (\neq G_\mu^w) \mid \gamma_j > 0$.

Числа d_k, γ_k, p_k определяются строением поверхности F_n; v_r, c_r — еще и нумерацией орбит. Так как Π^{γ_k}, $0 \leq k < q$, пересекает, может быть, Π^{γ_j} $(j > k)$ по прямым, то $\delta_k \geq 0$ есть размерность их множества P_k, не содержащего при $k > 0$ прямых Π^{t_k}. В Π^{d_j}, Π^{c_j} $(c_0 = \gamma_0)$ поместим d_j, c_j осей координат; δ_j, $j < q$, из них принадлежат P_j. Переобозначим эти оси через Oy_{i_1}, $i_1 = \overline{1, m_1}$, и Oz_{i_2}, $i_2 = \overline{1, m_2}$, соответственно (другие — Ox_{i_3}, $i_3 = \overline{1, m_3}$; $m_1 + m_2 = \mu$, $\mu + m_3 = m$); $\tilde{\gamma}_k \leq \gamma_k$, $0 \leq k \leq q$, есть число всех осей координат в Π^{γ_k}, $\gamma_j = \tilde{\gamma}_j$ при $j < 2$. Далее, $\lambda_k \geq 0$ — число осей в Π^{γ_k}, не принадлежащих

$$\{\Pi^{\gamma_k}\bigcap\Pi^{\gamma_j},\ j\neq k\};$$

$$\alpha_r=\sum_{s=0}^{r-1}d_s,\quad \beta_r=\sum_{s=0}^{r-1}\lambda_s,\quad \alpha_0=\beta_0=0.$$

На основании леммы 4 работы [11], лемм $1-6$, теорем 1, 2 и соотношений (34), (35) устанавливается следующая теорема.

Теорема 3 [13]. *Поверхность F_n, инвариантная относительно группы G_μ, определяется любым из следующих уравнений*:

$$\Phi_j\equiv\sum_{t=0}^{s_j}R_{j,t}\left(\sum_{\rho=1}^{d_j}\alpha_{j,\rho}\,y^2_{\alpha_j+\rho}+\sum_{\tau=1}^{\lambda_j}\xi_{j,\tau}\,z_{\beta_j+\tau}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\alpha(j)}\kappa_{j,\alpha(j)}\,z_{\alpha(j)}\right)^{s_j-t}=0,\quad j=\overline{0,q},\tag{38}$$

где $\sum_j d_j=m_1$, $\sum_j\lambda_j=\beta\le m_2$, индекс $\alpha(k)$, $0\le k\le q$, принимает $\sigma_k=\tilde{\gamma}_k-\lambda_k$ различных значений, принадлежащих $\{\beta+1,\ldots,m_2\}$; многочлен $R_{k,0}$ содержит s_k-ю степень произведения σ_k линейных функций из $\{\kappa_{j,\alpha(j)},\ j\neq k\}$. При этом γ_j-плоскости Π^{γ_j}, $j=\overline{0,r}$, $1<r\le q$, определяют такое невырожденное аффинное преобразование A_{t_r}, действующее вне Π^{t_r} тождественно, что уравнение $A_{t_r}(F_n)$ имеет вид

$$\sum_{t=0}^{s_r}R'_{r,t}\,\zeta^{s_r-t}=0;\tag{39}$$

многочлены

$$\zeta_r=\sum_{\rho=1}^{d_r}\alpha'_{r,\rho}\,y^2_{\alpha_r+\rho}+\sum_{\tau=1}^{\gamma_r}\xi'_{r,\tau}\,z_{\beta_r+\tau}.$$

В уравнениях (38) *и* (39) $\alpha_{j,\rho}$, $\alpha'_{r,\rho}$ *— вещественные коэффициенты; многочлены $R_{j,t}$, $R'_{r,t}$ и линейные функции $\xi_{j,\tau}$, $\kappa_{j,\alpha(j)}$, $\xi'_{r,\tau}$ зависят от переменных x_{i_3}. Плоскости множества B_{μ_r} состоят из диаметральных плоскостей цилиндра с уравнением $\zeta_r=0$.*

И наоборот, если поверхность F_n может быть задана каждым из уравнений (38), *то она инвариантна относительно группы G_μ, соответствующей направлениям симметрии с линейной оболочкой Π^μ.*

На основании теоремы 3 общим уравнением поверхности F_n является уравнение $\Phi_0=0$, которое приводится к любому из $\Phi_j=0$, $j>0$; при этом уравнение $A_{t_r}(F_n)$ должно иметь вид (39). Формулы преобразования A_{t_r} находятся по уравнениям Π^{γ_j}, $j=\overline{0,r}$.

Пусть $\xi'_{k,\tau}=\sum_{i_3=1}^{m_3}b_{\beta_k+\tau,i_3}\,x_{i_3}$, где $m_3=m-\mu$, $\tau=\overline{1,\gamma_k}$, $0\le k\le q$. Тогда при любом k ранг матрицы $\|b_{\beta_k+\tau,i_3}\|$ равен γ_k; число $m_3\ge\max\{\gamma_j\}$.

4. Перестроечный метод. Теоремы 2 и 3 определяют способ построения всех групп G_μ и алгебр их инвариантов. Приведем основные его характеристики (см. [14–16]).

1. На основе разложения (37) оси Oy_{i_1}, $i_1 = \overline{1, m_1}$, находятся в Π^{d_j}. Оси типа z находятся в соответствующих Π^{γ_j} (см. (38)).

2. Пусть некоторая $\Pi^{\gamma_{j'}}$ пересекает r-плоскость $\Pi^r = \sum_k \Pi^{\gamma_k}$ ($\gamma_k \in \in \{\gamma_j\}$) по v-плоскости Π^v. Тогда Π^v в Π^r определяется специальными уравнениями, позволяющими выделить такое преобразование координат, которое новые оси, например, Oz'_t, $t = \overline{1, v}$, помещает в Π^v. При этом выделяется квадратичная форма, определяющая плоскости симметрии по направлениям $\Pi^{\mu_{j'}}$; все другие квадратичные формы, кроме содержащей z_t, неизменны. Предполагается (при необходимости) варьирование в исходной системе координат осями в Π^{γ_j}, вне Π^{μ} и т. п., что определяется конкретной задачей.

3. Каждая группа G_μ действует на некоторой поверхности F_n с уравнением (38) при $s_j = 1$. Теоремы 1 и 2 из работы [11] показывают необходимость рассмотрения ситуации, когда $R_{j,t} = c_{j,t} \geq 0$.

4. Нерасширяемость группы G_μ достигается следующим: прежде всего, в исходной системе координат в уравнении вида (38), $s_j = 1$, поверхности F_n скобки не расширяются, т. е. нельзя ввести новые переменные типа z за счет x_γ ($\gamma = i_3$); дальнейшие ограничения определяют выбор линейных функций $\xi_{j,t}$, $\kappa_{j,\alpha(j)}$.

5. С построением групп G_μ связано нахождение их базисных инвариантов. Первоначально изучается случай $n = 2$ (аналогично конечным группам), затем — $n > 2$ ($s_j = 1$).

В качестве иллюстрации рассмотрим случай, когда любые две из Π^{γ_j} при $q = 2$ пересекаются только в начале координат O. Положим $\gamma_0 = \lambda$, $\gamma_1 = \mu$, $\gamma_2 = \nu$ ($\lambda \geq \mu \geq \nu$); $\Pi^r = \Pi^\lambda \oplus \Pi^\mu$, $\Pi^v = \Pi^\nu \cap \Pi^r$, $\Pi^\rho = \Pi^\nu \ominus \Pi^v$.

Рассмотрим группу G ($= G_\mu^w$), действующую на поверхности F_n с уравнением

$$R\left(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda} \xi_i z_i\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu} \zeta_j z_{\lambda+j}\right) + $$
$$+ T\left(y_3^2 + \sum_{k=1}^{\rho} \chi_{r+k} z_{r+k}\right) = c, \tag{40}$$

где многочлены R, S, T (их степени одинаковы), не содержащие общего множителя, и линейные функции ξ_i, ζ_j, χ_{r+k} зависят только от переменных x_γ, числа $d_j = 1$.

Координатные оси Oz_t, $t = \overline{1, v}$, поместим в v-плоскость $\Pi_0^v = \Pi^\lambda \cap (\Pi^\mu \oplus \oplus \Pi^v)$. Запишем такие уравнения Π^v в Π^r:

$$z_{v+\varepsilon} = 0, \quad \varepsilon = \overline{1, \lambda - v},$$
$$z_{\lambda+j} = \sum_{t=1}^{v} a_{jt} z_t, \quad j = \overline{1, \mu}, \tag{41}$$
$$\operatorname{rang} \| a_{jt} \| = v.$$

Поместим в Π^{v} новые координатные оси Oz'_t. На основании (41)

$$z_t = z'_t, \quad t = \overline{1, v},$$
$$z_{\lambda+j} = z'_{\lambda+j} + \sum_{t=1}^{v} a_{jt} z'_t, \quad j = \overline{1, \mu}. \tag{42}$$

Подействовав преобразованием (42) на уравнение (40) поверхности F_n, получим

$$R\left(y_1^2 + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-v} \xi_{v+\varepsilon} z_{v+\varepsilon} \right) + S\left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu} \zeta_j z'_{\lambda+j} \right) +$$
$$+ T\left(y_3^2 + \sum_{t=1}^{v} \chi_t z'_t + \sum_{k=1}^{\rho} \chi_{r+k} z_{r+k} \right) = c; \tag{43}$$

линейные функции $\chi_t = \chi_t(x_\gamma)$. При этом

$$R\xi_t + S \sum_{j=1}^{\mu} a_{jt} \zeta_j = T\chi_t, \quad t = \overline{1, v}. \tag{44}$$

Выберем в (44) функции χ_t следующим образом:

$$\chi_t = \lambda_1^{-1} \xi_t = \lambda_2^{-1} \sum_{j=1}^{\mu} a_{jt} \zeta_j, \quad t = \overline{1, v}, \tag{45}$$

где λ_1 и λ_2 — вещественные параметры. Согласно (44) и (45), многочлен

$$T = \lambda_1 R + \lambda_2 S. \tag{46}$$

Группа G зависит от функций χ_t, определяемых формулами (44). Выбор функций χ_t по формулам (45) является естественным. Но совокупность функций χ_t может быть и другой, если использовать специальный вид многочленов R, S, T.

Функции χ_t, $1 \le t \le v$, принадлежат *функциям основного типа* (ФОТ), если существует координатная система, в которой соответствующие функции удовлетворяют формулам вида (45).

Если существуют прямые пересечения γ_j-плоскостей Π^{γ_j}, то построение групп G имеет некоторые особенности. В известной мере они раскрываются в ситуации, когда $\dim(\Pi^{v} \cap \Pi^{\lambda}) = 1$ (теорема 2). Пусть v-плоскость Π^{v} пересекает Π^{λ} по Oz_λ. Выделим $(v-1)$-плоскость $\Pi^{v-1} = \Pi^{v} \ominus \Pi^{1}(z_\lambda)$. Положим $\Pi_0^{v-1} = \Pi^{\lambda} \cap (\Pi^{\mu} \oplus \Pi^{v-1})$, $\Pi_1^{v-1} = \Pi^{\mu} \cap (\Pi^{\lambda} \oplus \Pi^{v-1})$; оси Oz_β, $\beta = \overline{1, v-1}$, и $Oz_{\lambda+\beta}$ поместим в Π_0^{v-1} и Π_1^{v-1} соответственно. Зададим Π^{v-1} в Π^{r} уравнениями

$$z_\alpha = 0, \quad \alpha = \overline{v, \lambda}, \quad z_{\lambda+\delta} = 0, \quad \delta = \overline{v, \mu},$$
$$z_{\lambda+\sigma} = \sum_{\beta=1}^{v-1} a_{\beta\sigma} z_\beta, \quad \sigma = \overline{1, v-1}. \tag{47}$$

На основании формул (30) многочлены R и T в уравнении (40) приводимы: $R = R_0\chi_\lambda$, $T = R_0\xi_\lambda$, где $\chi_\lambda \ne c\xi_\lambda$. Поместив в Π^{v-1} новые оси Oz'_β, получим с использованием (47) уравнение поверхности F_n, аналогичное (43). Тогда в (44) j, t нужно заменить индексами σ, β соответственно. При этом (44) позволяет дать классификацию χ_β (на основании ξ_β и ζ_σ).

Так как $\Pi_0^{\upsilon-1}(z_\beta)$ и $\Pi_1^{\upsilon-1}(z_{\lambda+\beta})$ определяются $(\upsilon-1)$-плоскостью $\Pi^{\upsilon-1}$, то вид (47) не зависит от ее выбора. Поэтому при любой $\Pi^{\upsilon-1}$ формулы вида (44) содержат все типы χ_β. Каждой совокупности функций ξ_β, ζ_σ, χ_β соответствует группа $G_0 \subset G$. Произвольная G_0 будет характеристической для целого семейства групп G, содержащих G_0 и действующих на поверхностях F_n.

Рассмотренный метод нахождения плоскостей, отражения относительно которых определяют группу G_μ, называется *перестроечным*. Он эффективен при любом $q > 1$. Название объясняется тем, что все множество плоскостей симметрии находится преимущественно за счет перестройки квадратичных форм, стоящих в скобках уравнения (38).

5. Три орбиты направлений симметрии. При $q = 2$ каждая из групп G $(= G_\mu^w)$ действует на некоторой базовой поверхности F_n, определяемой уравнением вида (40).

Рассмотрим такие случаи.

1. Пусть $\Pi^\lambda \cap \Pi^\mu = \Pi^1(z_1)$, $\Pi^\nu \cap \Pi^\lambda = \Pi^1(z_\lambda)$, υ-плоскость $\Pi^\upsilon = \Pi^\nu \cap \cap \Pi^r$, где $\Pi^r = \Pi^\lambda + \Pi^\mu$ $(r = \lambda + \mu - 1)$; $(\upsilon - 1)$-плоскость $\Pi^{\upsilon-1} = \Pi^\upsilon \ominus \Pi^1(z_\lambda)$. Зададим $\Pi^{\upsilon-1}$ в Π^r уравнениями

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sum_{t=2}^{\upsilon} a_t z_t, \\
z_{\upsilon+\varepsilon} &= \sum_{t=2}^{\upsilon} a_{\varepsilon t} z_t, \quad \varepsilon = \overline{1, \lambda-\upsilon}, \\
z_{\lambda+j} &= \sum_{t=2}^{\upsilon} b_{jt} z_t, \quad j = \overline{1, \mu-1}.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

В уравнении (40) ζ_j, $j = \overline{1, \mu-1}$, переобозначим через $\zeta_{\lambda+j}$ и затем квадратичные формы, стоящие в скобках, обозначим через A, B, C соответственно. Далее, на основании (48) при $\upsilon \geq 2$ положим

$$
\begin{aligned}
A_t &= \xi_t + a_t \xi_1 + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-\upsilon} a_{\varepsilon t} \xi_{\upsilon+\varepsilon}, \\
B_t &= \sum_{j=1}^{\mu-1} b_{jt} \zeta_{\lambda+j}, \quad t = \overline{2, \upsilon}.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

2. Пусть $\Pi^\lambda \cap \Pi^\mu = \Pi^1(z_1)$, $\Pi^\mu \cap \Pi^\nu = \Pi^1(z_{\lambda+1})$, $\Pi^\upsilon = \Pi^\nu \cap \Pi^r = \Pi^{\upsilon-1} \oplus \Pi^1(z_{\lambda+1})$. Зададим $\Pi^{\upsilon-1}$ в Π^r уравнениями (48).

3. Пусть кроме двух прямых пересечения линейных оболочек, указанных в первом случае, существует еще одна прямая $\Pi^1(z_{\lambda+1}) = \Pi^\mu \cap \Pi^\nu$. Тогда $\Pi^\upsilon = \Pi^{\upsilon-2} \oplus \Pi^2(z_\lambda, z_{\lambda+1})$. Запишем уравнения $\Pi^{\upsilon-2}$ в Π^r $(\upsilon > 2)$:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sum_{k=2}^{\upsilon-1} a_k z_k, \\
z_{\upsilon+\delta} &= \sum_{k=2}^{\upsilon-1} a_{\delta k} z_k, \quad \delta = \overline{0, \lambda-\upsilon}, \\
z_{\lambda+j} &= \sum_{k=2}^{\upsilon-1} b_{jk} z_k, \quad j = \overline{1, \mu-1}.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Согласно (50) положим

$$
\begin{aligned}
C_k &= \xi_k + a_k \xi_1 + \sum_{\delta=0}^{\lambda-\upsilon} a_{\delta k} \xi_{\upsilon+\delta}, \\
D_k &= \sum_{j=1}^{\mu-1} b_{jk} \zeta_{\lambda+j}, \quad k = \overline{2, \upsilon-1}.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Принцип нахождения линейных функций (49) и (51) одинаков.

4. Пусть $\Pi^{\mu} \cap \Pi^{\nu} = \Pi^1(z_{\lambda+1})$, $\Pi^{\upsilon} = \Pi^{\nu} \cap \Pi^{r}$, где $\Pi^{r} = \Pi^{\lambda} \oplus \Pi^{\mu}$ $(r = \lambda + \mu)$; $\Pi^{\upsilon-1} = \Pi^{\upsilon} \ominus \Pi^1(z_{\lambda+1})$ определяется уравнениями

$$
\begin{aligned}
z_{\upsilon+\delta} &= \sum_{s=1}^{\upsilon-1} a_{\delta s} z_s, \quad \delta = \overline{0, \lambda-\upsilon}, \\
z_{\lambda+\sigma} &= \sum_{s=1}^{\upsilon-1} b_{\sigma s} z_s, \quad \sigma = \overline{1, \mu}.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

На основании (52)

$$
\begin{aligned}
H_s &= \xi_s + \sum_{\delta=0}^{\lambda-\upsilon} a_{\delta s} \xi_{\upsilon+\delta}, \\
K_s &= \sum_{\sigma=1}^{\mu} b_{\sigma s} \zeta_{\lambda+\sigma}, \quad s = \overline{1, \upsilon-1}, \quad \upsilon \geq 2.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Кроме того,

$$
B_0 = y_2^2 + \sum_{\sigma=1}^{\mu} \zeta_{\lambda+\sigma} z_{\lambda+\sigma}.
$$

5. Пусть $\Pi^{\lambda} \cap \Pi^{\nu} = \Pi^1(z_{\lambda})$, $\Pi^{\mu} \cap \Pi^{\nu} = \Pi^1(z_{\lambda+1})$, $\Pi^{r} = \Pi^{\lambda} \oplus \Pi^{\mu}$, $\Pi^{\upsilon-2} = \Pi^{\upsilon} \ominus \Pi^2(z_{\lambda}, z_{\lambda+1})$. Зададим $\Pi^{\upsilon-2}$ в Π^{r} такими уравнениями:

$$
\begin{aligned}
z_{\lambda} &= \sum_{\rho=1}^{\upsilon-2} a_{\rho} z_{\rho}, \\
z_{\upsilon-1+\delta} &= \sum_{\rho=1}^{\upsilon-2} a_{\delta\rho} z_{\rho}, \quad \delta = \overline{0, \lambda-\upsilon},
\end{aligned}
\tag{54}
$$

$$z_{\lambda+\sigma} = \sum_{\rho=1}^{\upsilon-2} b_{\sigma\rho} z_\rho, \quad \sigma = \overline{1, \mu}.$$

Как и выше, по уравнениям (54) введем линейные функции

$$L_\rho = \xi_\rho + a_\rho \xi_\lambda + \sum_{\delta=0}^{\lambda-\upsilon} a_{\delta\rho} \xi_{\upsilon-1+\delta},$$

$$M_\rho = \sum_{\sigma=1}^{\mu} b_{\sigma\rho} \zeta_{\lambda+\sigma}, \quad \rho = \overline{1, \upsilon-2}. \tag{55}$$

6. Пусть $\Pi^\lambda \cap \Pi^\mu = \Pi^1(z_1)$, $\Pi^r = \Pi^\lambda + \Pi^\mu$; Π^υ в Π^r определяется уравнениями

$$z_1 = \sum_{t=2}^{\upsilon+1} a_t z_t,$$

$$z_{\upsilon+1+\varepsilon} = \sum_{t=2}^{\upsilon+1} a_{\varepsilon t} z_t, \quad \varepsilon = \overline{1, \lambda-\upsilon-1}, \tag{56}$$

$$z_{\lambda+j} = \sum_{t=2}^{\upsilon+1} b_{jt} z_t, \quad j = \overline{1, \mu-1}.$$

Согласно (56),

$$N_q = \xi_q + a_q \xi_1 + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-\upsilon-1} a_{\varepsilon q} \xi_{\upsilon+1+\varepsilon},$$

$$P_q = \sum_{j=1}^{\mu} b_{jq} \zeta_{\lambda+j}, \quad q = \overline{2, \upsilon+1}. \tag{57}$$

7. Пусть $\Pi^r = \Pi^\lambda \oplus \Pi^\mu$, $\Pi^\upsilon \cap \Pi^\mu = 0$, $\Pi^\upsilon \cap \Pi^\lambda = \Pi^1(z_\lambda)$. Зададим $\Pi^{\upsilon-1} = \Pi^\upsilon \ominus \Pi^1(z_\lambda)$ в Π^r уравнениями (52).

Теперь пусть группы $G(k)$, $k = \overline{1, 7}$, имеют соответственно γ_j-плоскости Π^{γ_j}, выделенные в случаях $1-7$.

Теорема 4 [17]. *Инварианты групп $G(k)$, $k = \overline{1, 7}$, принадлежат соответственно алгебрам с такими системами образующих:*

1) $A\zeta_1 + B\xi_1 + c^{-1}C\xi_\lambda$ $(\chi_\lambda = c\zeta_1(x_\gamma))$,

2) $A\zeta_1 + B\xi_1 + c^{-1}C\zeta_{\lambda+1}$ $(\chi_{\lambda+1} = c\xi_1)$,

3) $A\zeta_1 + B\xi_1 + c_1^{-1}C\xi_\lambda$ $(\chi_\lambda = c_1\zeta_1,\ \chi_{\lambda+1} = c_2\xi_1,\ \xi_\lambda = c_1 c_2^{-1}\zeta_{\lambda+1})$,

4) A, $B_0\chi_{\lambda+1} + C\zeta_{\lambda+1}$,

5) $A\chi_\lambda + c^{-1}B_0\chi_{\lambda+1} + c\xi_\lambda$ $(\xi_\lambda = c^{-1}\zeta_{\lambda+1})$,

$A\zeta_{\lambda+1}\chi_\lambda + B_0\xi_\lambda\chi_{\lambda+1} + C\xi_\lambda\zeta_{\lambda+1}$ $(\zeta_\lambda \neq c^{-1}\zeta_{\lambda+1})$,

6) $A\zeta_1 + B\xi_1$, C,

7) B_0, $A\chi_\lambda + C\xi_\lambda$ $(\chi_\lambda \neq c\xi_\lambda)$.

Отметим, что здесь не приводятся тривиальные образующие x_γ алгебр инвариантов групп $G(k)$.

Пусть $q=1$ и $\Pi^\lambda \cap \Pi^\mu = \Pi^1(z_1)$, тогда $\gamma = \overline{\lambda+\mu+1, m}$; G^* — соответствующая группа симметрий. При доказательстве теоремы 4 ключевую роль играет следующая лемма.

Лемма 7 [17]. *Алгебра инвариантов группы* G^* *имеет образующую* $A\zeta_1 + B\xi_1$.

Доказательство. Линейные функции $\xi_1 = f$ и $\zeta_1 = g$ зависят от переменных χ_γ, $\gamma = \overline{\lambda+\mu+1, m}$. Пусть форма $H = gz_1 + B$. Согласно (31) и (32), уравнение поверхности F_n, инвариантной относительно G^*, допускает любой из следующих видов:

$$\sum_{j=0}^{s} R_j A^{s-j} = 0, \tag{58}$$

$$\sum_{j=0}^{s} S_j H^{s-j} = 0, \tag{59}$$

где $R_0 = R_0' g^s$, $S_0 = R_0' f^s$. Докажем, что уравнение (58) можно записать так:

$$\sum_{j=0}^{s} P_j (Ag + Bf)^{s-j} = 0. \tag{60}$$

При $A = fz_1 + D$ уравнение (58) имеет вид

$$\sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} R_k D^{j-k} \right) (fz_1)^{s-j} = 0. \tag{61}$$

Аналогично запишем уравнение (59):

$$\sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} S_k B^{j-k} \right) (gz_1)^{s-j} = 0. \tag{62}$$

Из (61) и (62) получаем соотношения

$$\sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} R_k D^{j-k} f^{s-j} = \sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} S_k B^{j-k} g^{s-j}, \quad j = \overline{0, s}. \tag{63}$$

Следовательно,

$$R_j = R_j' g^{s-j}, \quad S_j = S_j' f^{s-j}. \tag{64}$$

Запишем уравнение (60) в виде (62):

$$\sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} P_k (Bf + Dg)^{j-k} \right) (fgz_1)^{s-j} = 0. \tag{65}$$

Будем считать, что в (65) P_k являются неопределенными многочленами от всех переменных. Убедимся в существовании многочленов $P_j = P_j(x_\gamma)$, при которых уравнение (58) (или (59)) представимо в виде (65). Рассмотрим соотношения

$$\sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} R_k D^{j-k} = \sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} P_k (Bf + Dg)^{j-k} g^{s-j}, \tag{66}$$

$$\sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} S_k B^{j-k} = \sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} P_k (Bf + Dg)^{j-k} f^{s-j}, \quad j = \overline{0, s}, \tag{67}$$

из которых следует, в частности, (64). Приравняв в (66) и (67) функциональные коэффициенты при D^{j-k} и B^{j-k} соответственно, с учетом (64) получим

$$P_0 = R'_0 = S'_0,$$
$$P_j = R'_j - \sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} P_k (Bf)^{j-k} = S'_j - \sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} P_k (Dg)^{j-k}, \quad j > 0. \tag{68}$$

Значит, $P_j = P_j(x_\gamma)$ и находятся по формулам (68). Соотношения, определяемые (68), выполняются на основании (63). Лемма доказана.

Теорема 4, по существу, устанавливает базисные инварианты групп $G(k)$, если размерность $v = t$, где t — число прямых пересечения Π^v с Π^λ и Π^μ. Дальнейшее изучение групп $G(k)$ продолжено в [18], где с использованием (46) и линейных функций (49), (51), (53), (55), (57) находятся дополнительные условия, при выполнении которых формы, установленные в теореме 4, являются базисными инвариантами групп $G(k)$, $v > t$, Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Алгебры инвариантов групп* $G(k)$, $k = \overline{1, 7}$, *имеют, соответственно, такие системы образующих*:

1. $AS_1 + B\xi_1 + c^{-1}C\xi_\lambda$. *При этом* $\chi_\lambda = cS_1 = a\xi_1 + b\xi_\lambda$, $cB_t = b_t\xi_\lambda - aA_t$, $\chi_t = b_t\xi_1 + bA_t$ $(ab \neq 0,\ t = \overline{2, v})$;

некоторый выбор Π^{v-1} (*или осей в* Π^μ) *дает функцию* $b^{-1}\chi_t = A_t = -ca^{-1}B_t$ $(\chi_t \in$ ФОТ$)$.

2. $A\zeta_1 + B\xi_1 + c^{-1}C\xi_{\lambda+1}$ $(v \geq 2)$.

Функция $\chi_{\lambda+1} = c\xi_1 = a\zeta_1 + b\zeta_{\lambda+1}$, $cA_t = b\zeta_{\lambda+1} - aB_t$, $\chi_{t-1} = b_t\zeta_1 + bB_t$ $(t = \overline{2, v})$; *при определенном выборе* Π^{v-1} (*или осей в* Π^μ) *числа* $b_t = 0$ $(\chi_t \in$ ФОТ$)$.

3. $A\zeta_1 + B\xi_1 + c^{-1}C\xi_\lambda$ $(v \geq 3)$. *При этом* $\xi_\lambda = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\chi_\lambda$, $C_k = c_1^{-1}\alpha_2\chi_k + \lambda_k\xi_1$, $D_k = c_1^{-1}\alpha_1\chi_k - \lambda_k\chi_\lambda$ $(k = \overline{2, v-1})$; *существует такая* Π^{v-2} (*или оси в* Π^μ), *что все* $\lambda_k = 0$.

4. $(\alpha\chi_{\lambda+1} + \beta\zeta_{\lambda+1})A + B_0\chi_{\lambda+1} + C\zeta_{\lambda+1}$, *где* $v \geq 2$ *и* $K_s = -\alpha H_s + \lambda_s\zeta_{\lambda+1}$, $\chi_s = \beta H_s + \lambda_s\chi_{\lambda+1}$ $(s = \overline{1, v-1})$, *при некотором выборе* Π^{v-1} *все* $\lambda_s = 0$;

$A(\chi_1\zeta_{\lambda+1} - K_1\chi_{\lambda+1}) + H_1(B\chi_{\lambda+1} + C\zeta_{\lambda+1})$, *число* $v = 2$ *и* $\chi_1\zeta_{\lambda+1} - K_1\chi_{\lambda+1}$ *не делится на* H_1.

5. $A\chi_\lambda + c^{-1}B_0\chi_{\lambda+1} + C\xi_\lambda$ $(v \geq 3)$, *функция* $\zeta_{\lambda+1} = c\xi_\lambda = c(a\chi_\lambda + b\chi_{\lambda+1})$, $L_\rho = a\chi_\rho - b_\rho\chi_{\lambda-1}$, $c^{-1}M_\rho = b_\rho\chi_\rho + b_\rho\chi_\lambda$ $(\rho = \overline{1, v-2})$, *существует такая* Π^{v-2}, *что все числа* $b_\rho = 0$ $(\chi_\rho \in$ ФОТ$)$;

$A\zeta_{\lambda+1}\chi_\lambda + B_0\xi_\lambda\chi_{\lambda+1} + C\xi_\lambda\zeta_{\lambda+1}$ $(v = 2,\ \zeta_{\lambda+1} \neq c\xi_\lambda)$.

6. $A\zeta_1 + B\xi_1 + C(\alpha\zeta_1 + \beta\xi_1)$, *где* $N_q = \alpha\chi_q + \lambda_q\xi_1$, $P_q = \beta\chi_q - \lambda_q\zeta_1$ $(q = \overline{2, \upsilon+1},\ \upsilon \ge 1)$; *при некотором выборе осей в* Π^μ *числа* $\lambda_q = 0$ $(\chi_q \in \in \text{ФОТ})$;

$(A\zeta_1 + B\xi_1)\chi_2 + C(N_2\zeta_1 + P_2\xi_1)$, *число* $\upsilon = 1$ *и* $N_2\zeta_1 + P_2\xi_1$ *не делится на* χ_2.

7. $\chi_\lambda A + \lambda_2^{-1}(\xi_\lambda - \lambda_1\chi_\lambda)B_0 + C\xi_\lambda$, *где* $\upsilon \ge 2$, *при определенном выборе* $\Pi^{\upsilon-1}$ *(или осей в* Π^μ*) функции* $\chi_s \in$ ФОТ $(s = \overline{1, \upsilon-1})$;

$K_1\chi_\lambda A + (\xi_\lambda\chi_1 - \chi_\lambda H_1)B_0 + K_1\xi_\lambda C$, *число* $\upsilon = 2$ *и* $\xi_\lambda\chi_1 - \chi_\lambda H_1$ *не делится на* K_1.

Обзор результатов, соответствующих $q > 2$ орбитам направлений симметрий, приведен в работе [19].

1. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 759 с.
2. *Винберг Э. Б., Попов В. Л.* Теория инвариантов // Итоги науки и техники. Сер. соврем. пробл. мат.: Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1989. – С. 137–309.
3. *Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Там же. – 1988. – **28**. – С. 5–298.
4. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. – М.: Наука, 1984. – 520 с.
5. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 286 с.
6. *Гельфанд И. М., Мищенко А. С.* Квадратичные формы над коммутативными групповыми кольцами и K-теория // Функцион. анализ и его прил. – 1969. – **3**, вып. 4. – С. 28–33.
7. *Рышков С. С., Барановский Е. П.* Классические методы теории решетчатых упаковок // Успехи мат. наук. – 1979. – **34**, № 4. – С. 4–63.
8. *Home R.* Respectives on invariant theory: schur duality, multiplicity – free actions and beyond // Isr. Math. Conf. Proc. – 1996. – **8**. – P. 1–182.
9. *Barth W.* Two projective surfaces with many nodes, admitting the symmetries of the ikosaedron // J. Algebr. Geometry. – 1996. – **3**. – P. 173–186.
10. *Игнатенко В. Ф.* Диаметральная теория алгебраических поверхностей и геометрическая теория инвариантов групп, порожденных отражениями. I //Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 5. – С. 639–653.
11. *Игнатенко В. Ф.* Диаметральная теория алгебраических поверхностей и геометрическая теория инвариантов групп, порожденных отражениями. II // Там же. – № 6. – С. 792–802.
12. *Игнатенко В. Ф.* Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. I // Укр. геом. сб. – 1989. – Вып. 32. – С. 47–60.
13. *Игнатенко В. Ф.* О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геометрии / ВИНИТИ. – 1989. – **21**. – С. 155–208.
14. *Ignatenko V. F.* Algebraic surfaces with an infinite set of skew symmetry planes. Mutual arrangement of linear spans of Four orbits of symmetry directions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1996. – **176**. – P. 27–51.
15. *Игнатенко В. Ф.* Об одном способе построения бесконечных групп косых симметрий. – Симферополь, 1995. – 42 с. – Деп. в ГНТБ Украины; № 1744–Ук95.
16. *Игнатенко В. Ф.* О современном состоянии теории инвариантов бесконечных групп косых симметрий // Тр. мат. факультета. – Симферополь: Изд-во Симферопол. ун-та, 1997. – С. 54–56.
17. *Игнатенко В. Ф.* Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. II // Укр. геом. сб. – 1991. – Вып. 34. – С. 42–51.
18. *Игнатенко В. Ф., Криворучко А. И.* Кольца инвариантов специальных групп косых симметрий. – Симферополь, 1997. – 22 с. – Деп. в ГНТБ Украины; № 82-Ук98.
19. *Ignatenko V. F.* Invariants of finite anf infinite groups generated by reflections // J. Math. Soc. – 1996. – **76**, № 3. – P. 334–361.

Получено 13.03.97