УДК 517:512

А. Г. Мазко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

A general method is developed for localization of eigenvalues of matrix polynomials and functions which consists in solving matrix equations. For a wide class of equations, the theorems are formulated which generalize the known properties of the Lyapunov equation. A new method of representation of solutions of linear differential and difference systems is suggested.

Розроблено загальну методику локалізації власних значень матричних поліномів і функцій, що зводиться до розв'язування матричних рівнянь. Для широкого класу рівнянь встановлено теореми, що узагальнюють відомі властивості рівняння Ляпунова. Запропоновано нову методику зображення розв'язків лінійних диференціальних та різницевих систем.

1. Введение. В прикладных исследованиях, в частности в современной теории управления, широко используются классы дифференциальных и разностных систем вида

$$F(\mathcal{D})\, x(t) = g(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^s A_s$ — матричный полином размеров $n \times n$, $\det F(\lambda) \not\equiv 0$, $\mathcal{D}$ — оператор дифференцирования (смещения) в случае непрерывного (дискретного) времени t. Динамика и устойчивость таких систем определяются расположением спектра $\sigma(F)$ относительно некоторых областей комплексной плоскости.

В данной работе предлагаются методы локализации собственных значений и описания решений динамических систем типа (1), которые основаны на построении и изучении некоторых классов матричных уравнений. При этом расширяются классы уравнений, построенные в [1, 2] и имеющие свойства обобщенного уравнения Ляпунова.

2. Правые и левые пары матриц матричной функции. Пусть $F(\lambda)$ — аналитическая в некоторой области Λ матрица-функция размеров $n \times n$. Через $\sigma(F)$ обозначим ее спектр, состоящий из конечного или счетного набора собственных значений с учетом кратностей.

Введем определения, обобщающие понятия блочных собственных значений и блочных собственных векторов матричного полинома [3, 4].

Матрицы $U \in C^{m\times m}$ и $T \neq 0 \in C^{n\times m}$ образуют правую пару (U, T) матрицы-функции $F(\lambda)$, если для некоторой аналитической матричной функции $\Phi(\lambda)$ в окрестности точек $\sigma(U)$ выполнено тождество

$$F(\lambda)\, T \equiv \Phi(\lambda)\,(\lambda I - U). \tag{2}$$

Аналогично определяются левые пары (U, T) матрицы-функции $F(\lambda)$ с помощью тождества

$$T\, F(\lambda) \equiv (\lambda I - U)\,\Phi(\lambda). \tag{3}$$

Если матрица-функция $F(\lambda)$ представлена в виде

$$F(\lambda) = A_0 + a_1(\lambda) A_1 + \ldots + a_s(\lambda) A_s, \tag{4}$$

где $a_j(\lambda)$ — скалярные функции, A_j — постоянные матрицы, то ее правые и левые пары (U, T) удовлетворяют соответственно уравнениям

$$A_0 T + A_1 T a_1(U) + \ldots + A_s T a_s(U) = 0, \tag{5}$$

$$T A_0 + a_1(U) T A_1 + \ldots + a_s(U) T A_s = 0. \tag{6}$$

Данное утверждение непосредственно следует из (2), (3) и интегрального представления аналитических функций от матрицы

$$a_j(U) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\omega} a_j(\lambda)(\lambda I - U)^{-1} d\lambda, \quad j = 1, \ldots, s.$$

Обратно, если матрицы U и $T \neq 0$ удовлетворяют уравнению (5) ((6)), то (U, T) является правой (левой) парой матрицы-функции (4).

Для правых и левых пар матрицы-функции $F(\lambda)$ построим последовательности блочных матриц E_k, имеющих соответственно структуру

$$E_k = \begin{bmatrix} T \\ TU \\ \vdots \\ TU^{k-1} \end{bmatrix}, \quad E_k = \left[T,\ UT, \ldots,\ U^{k-1}T \right], \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Для обейх матричных последовательностей (7) выполняются соотношения

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_h = r_{h+1} = \ldots = r, \tag{8}$$

где $r_k = \operatorname{rang} E_k$, h — наименьшее значение индекса k, при котором $r_k = r_{k+1}$. Максимальное значение $r = r_h$ ранговой последовательности (8) называется индексом наблюдаемости (управляемости) правой (левой) пары (U, T). При этом выполняются оценки

$$\operatorname{rang} T + h - 1 \leq r \leq m, \quad 1 \leq h \leq m_0, \tag{9}$$

где m_0 — степень минимального полинома матрицы U. В случае $r = m$ правая (левая) пара (U, T) является наблюдаемой (управляемой). Свойства наблюдаемости и управляемости пары (U, T) эквивалентны соответственно условиям [5]

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} \lambda I - U \\ T \end{bmatrix} = m, \quad \operatorname{rang}[\lambda I - U,\ T] = m, \quad \lambda \in \sigma(U).$$

Наблюдаемые (управляемые) пары матриц (U, T), удовлетворяющие условию (2) ((3)), будем называть правыми (левыми) собственными парами матрицы-функции $F(\lambda)$. Для таких пар выполнено включение $\sigma(U) \subset \sigma(F)$. Обратное включение $\sigma(F) \subset \sigma(U)$ выполняется при условиях соответственно

$$\operatorname{rang}[F(\lambda),\ \Phi(\lambda)] = n, \quad \lambda \in \sigma(F), \tag{10}$$

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} F(\lambda) \\ \Phi(\lambda) \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \sigma(F). \tag{11}$$

Если $l < \infty$ — количество точек спектра $\sigma(F)$, то при условии (10) ((11)) пара (U, T) имеет максимально возможный индекс наблюдаемости (управляемости) $r = l$.

Лемма 1. *Пусть (U, T) — правая (левая) пара матрицы-функции $F(\lambda)$ индекса наблюдаемости (управляемости) r. Тогда, по крайней мере, r точек спектра $\sigma(U)$ являются собственными значениями матрицы-функции $F(\lambda)$. При условии* (10) ((11)) *каждая точка спектра $\sigma(F)$ является собственным значением матрицы U.*

Доказательство. Пусть выполнено тождество (2). Если r — индекс наблюдаемости пары (U, T), то существует невырожденная матрица $G \in C^{m\times m}$, преобразующая матрицы U и T к виду

$$GUG^{-1} = \begin{bmatrix} U_0 & 0 \\ U_2 & U_1 \end{bmatrix}, \quad TG^{-1} = [T_0,\ 0],$$

где $U_0 \in C^{r\times r}$, $T_0 \in C^{n\times r}$, (U_0, T_0) — наблюдаемая пара [6].

Учитывая данное преобразование, согласно (2) получаем соотношения

$$F(\lambda)\,T_0 \equiv \Phi_0(\lambda)(\lambda I - U_0), \quad \Phi(\lambda) = [\,\Phi_0(\lambda), 0\,]\,G.$$

Если u_0 — правый собственный вектор матрицы U_0, отвечающий собственному значению $\lambda_0 \in \sigma(U_0)$, то в силу наблюдаемости пары (U_0, T_0) выполнено неравенство $v_0 = T_0\, u_0 \neq 0$. Поэтому v_0 — правый собственный вектор матрицы-функции $F(\lambda)$, отвечающий собственному значению $\lambda_0 \in \sigma(F)$. С помощью приведенных соотношений можно установить, что $\det F(\lambda) \equiv \varphi(\lambda)\det(\lambda I - U_0)$, где φ — некоторая функция. Следовательно, $\sigma(U_0)$ совпадает с некоторым подмножеством спектра $\sigma_0(F) \subset \sigma(U)$. Если λ_0 — собственное значение матрицы U_0 кратности n_0, то λ_0 является также собственным значением матрицы-функции $F(\lambda)$ кратности $N_0 \geq n_0$. При условии (10) аналогично устанавливается обратное утверждение.

Доказательство утверждений в случае левой пары (U, T) матрицы-функции $F(\lambda)$ вытекает из соотношений

$$G^{-1}UG = \begin{bmatrix} U_0 & U_2 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix}, \quad G^{-1}T = \begin{bmatrix} T_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T_0\, F(\lambda) \equiv (\lambda I - U_0)\,\Phi_0(\lambda), \quad \Phi(\lambda) = G\begin{bmatrix} \Phi_0(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $U_0 \in C^{r\times r}$, $T_0 \in C^{r\times n}$, (U_0, T_0) — управляемая пара [6].

Лемма доказана.

В случае матричного полинома $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^s A_s$ соотношения, определяющие правые и левые пары (U, T), имеют вид

$$A_0 T + A_1 T U + \ldots + A_s T U^s = 0, \tag{12}$$

$$T A_0 + U T A_1 + \ldots + U^s T A_s = 0. \tag{13}$$

При этом в (2) и (3) $\Phi(\lambda)$ определяется соответственно выражением

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} \lambda^{i-1} \sum_{j=i}^{s} A_j\, T\, U^{j-i}, \quad \Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} \lambda^{i-1} \sum_{j=i}^{s} U^{j-i}\, T A_j.$$

Если в (12) ((13)) T — матрица полного ранга по столбцам (строкам), то пару (U, T) составляют правые (левые) блочные собственное значение и собственный вектор матричного полинома $F(\lambda)$ [3].

Построим блочные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & \ldots & A_{s-1} & A_s \\ I & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & I & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{s-1} & 0 & \ldots & I \\ A_s & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & A_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & A_s & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Лемма 2. *(U, T) — правая пара матричного полинома $F(\lambda)$ индекса наблюдаемости r в том и только в том случае, когда*

$$AE = BEU, \quad E = \begin{bmatrix} T \\ TU \\ \vdots \\ TU^{s-1} \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rang} E = r. \tag{14}$$

Аналогично, (U, T) — левая пара матричного полинома $F(\lambda)$ индекса управляемости r в том и только в том случае, когда

$$EA = UEC, \quad E = \left[T,\ UT, \ldots, U^{s-1}T\right], \quad \operatorname{rang} E = r. \tag{15}$$

Доказательство. Эквивалентность матричных равенств (12) и (14) ((13) и (15)) является следствием структуры приведенных блочных матриц. Тот факт, что ранг матрицы E совпадает с индексом наблюдаемости (управляемости) пары (U, T), устанавливается с помощью канонической формы регулярного пучка матриц:

$$P(A - \lambda B)Q = \begin{bmatrix} J - \lambda I & 0 \\ 0 & I - \lambda N \end{bmatrix}, \tag{16}$$

где $J \in C^{l \times l}$, $\sigma(J) = \sigma(F)$, N — нильпотентная матрица индекса нильпотентности ν, I — единичная матрица подходящих размеров, P и Q — невырожденные матрицы [7].

Из (14) и (16) следует

$$E = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad JR = RU, \quad \operatorname{rang} E = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} E \\ EU \end{bmatrix}.$$

Поэтому строки матрицы EU и, в частности, блока TU^s линейно выражаются через строки матрицы E. Аналогично, в (15) столбцы матрицы UE принадлежат линейной оболочке столбцов E. Следовательно, для матричного полинома наряду с (9) выполняется оценка $h \le s$.

Лемма доказана.

Поскольку $AD = DA$ и $CD = DB$, то из (14) ((15)) вытекают соотношения

$$AZ = CZU, \quad Z = DE \quad (ZA = UZB, \quad Z = ED), \tag{17}$$

которые также определяют связь между правыми (левыми) парами матричного полинома и сопровождающего его пучка.

В [1, 2] построена матричная система, состоящая из s линейных и s квадратичных матричных уравнений

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=p+1}^{s} (A_i T_{i+j-p} A_j - A_j T_{i+j-p} A_i) = 0, \qquad p = \overline{0, s-1}, \\ T_q = \sum_{i=q}^{s} \sum_{j=i}^{s} T_i A_j T_{q+j-i} - \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=-1}^{i-1} T_i A_j T_{q+j-i}, \qquad q = \overline{1, s}, \end{gathered} \tag{18}$$

где $T_0 = A_{-1} = 0$.

Решения этой системы могут быть использованы при нахождении правых и левых пар матричного полинома. Действительно, первая блочная строка (первый блочный столбец) матрицы Z, удовлетворяющей системе

$$AZC = CZA, \quad Z = ZCZ \quad (AZB = BZA, \quad Z = ZBZ), \tag{19}$$

составляет решение $T_1, \ldots, T_s$ системы (18). В то же время равенства (17) вытекают из (19) при $U = AZ$ $(U = ZA)$.

Лемма 3. *Если* $T_1, \dots, T_s$ *— решение системы* (18), *то матрицы*

$$T = [\,T_1, \dots, T_s\,], \quad U = \|U_{pq}\|_1^s, \quad U_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{i=0}^{p-1} A_i T_{q-p+i+1}, & p \le q; \\ \sum\limits_{i=p}^{s} A_i T_{q-p+i+1}, & p > q, \end{cases}$$

образуют правую пару (U, T), *а матрицы*

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_s \end{bmatrix}, \quad U = \|U_{pq}\|_1^s, \quad U_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{i=0}^{q-1} T_{p-q+i+1} A_i, & p \ge q; \\ \sum\limits_{i=q}^{s} T_{p-q+i+1} A_i, & p < q, \end{cases}$$

— левую пару (U, T) *матричного полинома* $F(\lambda)$.

Матричной системе (18) удовлетворяет семейство интегралов [1]

$$T_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\omega} \lambda^{k-1} F(\lambda)^{-1} d\lambda, \quad k = 1, \dots, s.$$

При этом если замкнутый контур ω охватывает весь спектр $\sigma(F)$, то в лемме 3 (U, T) — правая (левая) пара матричного полинома $F(\lambda)$, для которой выполняются условия (10) ((11)) и $\sigma(F) \subset \sigma(U)$. Данное утверждение вытекает из канонической структуры сопровождающих пучков $A - \lambda B$ и $A - \lambda C$ и блочных преобразований матричных выражений в соотношениях

$$\operatorname{rang}[\,A - \lambda B,\ BE\,] = ns, \quad \operatorname{rang}\begin{bmatrix} A - \lambda C \\ EC \end{bmatrix} = ns, \quad \lambda \in \sigma(F),$$

приводящих их соответственно к виду (10) и (11).

При построении правых и левых пар матричного полинома можно использовать лишь линейные уравнения систем (18) и (19). Так, с помощью (16) нетрудно установить, что если $AZB = BZA$, то для некоторой матрицы U пара (U, E), где $E = (ZB)^k$, $k \ge \nu$, удовлетворяет соотношениям (14). Если при этом $\operatorname{rang} Z = \operatorname{rang}(BZ)$, то в качестве E может быть выбрана также матрица Z

3. Теоремы о локализации собственных значений. Рассмотрим в комплексной плоскости множества

$$\Lambda_+ = \{\lambda : f(\lambda, \bar\lambda) > 0\}, \quad \Lambda_- = \{\lambda : f(\lambda, \bar\lambda) < 0\}, \quad \Lambda_0 = \{\lambda : f(\lambda, \bar\lambda) = 0\}, \tag{20}$$

которые описывает некоторая эрмитова функция

$$f(\lambda, \bar\mu) = \sum_{i,j=0}^{k} \gamma_{ij} f_i(\lambda) \overline{f_j(\mu)}, \quad \Gamma = \Gamma^* = \|\gamma_{ij}\|_0^k,$$

и построим линейное матричное уравнение

$$\sum_{i,j=0}^{k} \gamma_{ij} F_i X F_j^* = EYE^*. \tag{21}$$

Здесь матричные коэффициенты определяются в терминах правой или левой пары (U, T) матричной функции $F(\lambda)$. При этом с целью сокращения выкладок в обоих случаях используем одинаковые обозначения. Если (U, T) — правая пара, то

$$F_i = E f_i(U), \quad E = \begin{bmatrix} T \\ TU \\ \vdots \\ TU^{h-1} \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rang} E = r.$$

В случае левой пары (U, T) полагаем

$$F_i = f_i(U)\, E, \quad E = \left[\, T,\ UT, \dots, U^{h-1}T \,\right], \quad \operatorname{rang} E = r.$$

Согласно лемме 1 выделим подмножество спектра $\sigma_0(F) \subset \sigma(U)$, состоящее из r собственных значений с учетом крайностей, и покажем, что его расположение относительно множеств (20) описывается в терминах индексов инерции эрмитовых матриц, определяемых для решения уравнения (21) на множествах

$$\mathcal{K} = \left\{ X : EXE^* \geq 0 \right\}, \quad \mathcal{K}_{pq} = \left\{ X : i_+(EXE^*) = p,\ i_-(EXE^*) = q \right\}.$$

Здесь $i_\pm(.)$ — индексы инерции эрмитовой матрицы, равные количествам ее положительных и отрицательных собственных значений. Для матрицы Y в (21) будем использовать также следующие ограничения:

$$S_\lambda = EYE^* + E(\lambda I - U)(\lambda I - U)^* E^* \geq 0, \quad \operatorname{rang} S_\lambda \equiv r, \tag{22}$$

$$S_\lambda = EYE^* + (\lambda I - U)\, EE^*\, (\lambda I - U)^* \geq 0, \quad \operatorname{rang} S_\lambda \equiv r. \tag{23}$$

Теорема 1. *Пусть* (U, T) *— правая (левая) пара матричной функции* $F(\lambda)$ *индекса наблюдаемости (управляемости)* r. *Тогда если матрицы* $X \in \mathcal{K}$ *и* $Y \in \mathcal{K}$ *удовлетворяют уравнению* (21) *и условиям* (22) ((23)), *то выполнено включение* $\sigma_0(F) \subset \Lambda_+$. *Если к тому же выполнено условие* (10) ((11)), *то* $\sigma(F) \subset \Lambda_+$. *Обратно, если* $\sigma_0(F) \subset \Lambda_+$ *и функция* f *удовлетворяет условиям*

$$\left\| 1 / f(\lambda_i, \bar{\lambda}_j) \right\|_1^r \geq 0 \quad \forall\, \lambda_i \in \Lambda_+, \quad i = 1, \dots, r, \tag{24}$$

то для любой матрицы $Y \in \mathcal{K}$ *уравнение* (21) *имеет решение* $X \in \mathcal{K}$.

Теорема 2. *Пусть* (U, T) *— правая (левая) пара матричной функции* $F(\lambda)$ *индекса наблюдаемости (управляемости)* r. *Тогда если матрицы* $X \in \mathcal{K}_{pq}$ *и* $Y \in \mathcal{K}_{r0}$ *удовлетворяют уравнению* (21), *а функция* f *— условиям*

$$i_\pm\left(\left\| f(\lambda_i, \bar{\lambda}_j) \right\|_1^r \right) \leq 1 \quad \forall\, \lambda_i \notin \Lambda_0, \quad i = 1, \dots, r, \tag{25}$$

то выполнены равенства

$$r_+ = p, \quad r_- = q, \quad r_0 = 0, \tag{26}$$

где r_+, r_- и r_0 *— количества точек подмножества* $\sigma_0(F)$, *принадлежащих соответствующим множествам* (20). *Обратно, если для некоторых* p и q *выполняются равенства* (26), *то существуют матрицы* $X \in \mathcal{K}_{pq}$ *и* $Y \in \mathcal{K}_{r0}$, *удовлетворяющие уравнению* (21).

Теорема 3. *Пусть* (U, T) *— правая (левая) пара матричной функции* $F(\lambda)$ *индекса наблюдаемости (управляемости)* r. *Тогда если матрицы* $X \in \mathcal{K}_{p0}$ *и* $Y \in \mathcal{K}_{00}$ *удовлетворяют уравнению* (21), *то выполнена оценка* $r_0 \geq p$. *В частности, при* $p = r$ *выполняется включение* $\sigma_0(F) \subset \Lambda_0$. *Обратно, если* $r_0 \neq 0$, $Y \in \mathcal{K}_{00}$, $0 < p \leq \xi$, *где* ξ *— сумма геометрических крайностей* *собственных значений матрицы* U, *принадлежащих множеству* $\sigma_0(F)\bigcap\Lambda_0$, *то уравнение* (21) *имеет решение* $X \in \mathcal{H}_{p0}$.

Доказательство теорем **1 – 3.** Пусть (U, T) — правая (левая) пара матричной функции $F(\lambda)$ индекса наблюдаемости (управляемости) r. Тогда из доказательства леммы 1 вытекают соотношения

$$E = E_0 G_0, \quad E_0 = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_0 U_0 \\ \vdots \\ T_0 U_0{}^{h-1} \end{bmatrix}, \quad G_0 = [\, I, 0\,]\, G, \quad F_i = E_0 f_i(U_0) G_0,$$

где (U_0, T_0) — правая собственная пара матрицы-функции $F(\lambda)$, E_0 и G_0 — матрицы полного ранга соответственно по столбцам и по строкам.

Поэтому уравнение (21) эквивалентно соотношению

$$\sum_{i,j=0}^{k} \gamma_{ij}\, f_i(U_0)\, X_0\, f_j(U_0)^* \;=\; Y_0, \tag{27}$$

где $X_0 = G_0 X G_0^*$, $Y_0 = G_0 Y G_0^*$.

Матрица S_λ в (22) представляется в виде

$$S_\lambda \;=\; E_0\big(\,Y_0 + (\lambda I - U_0)\, G_0 G_0^* (\lambda I - U_0)^* \big)\, E_0^*.$$

Поэтому условия (22) эквивалентны управляемости пары (U_0, Y_0).

Рассматривая случай левой пары (U, T) матрицы-функции $F(\lambda)$ и используя доказательство леммы 1, получаем соотношения

$$E = G_0 E_0, \quad E_0 = \big[\, T_0, U_0 T_0, \ldots, U_0^{h-1} T_0 \,\big], \quad G_0 = G \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F_i = G_0 f_i(U_0) E_0, \quad X_0 = E_0 X E_0^*, \quad Y_0 = E_0 Y E_0^*,$$

$$S_\lambda = G_0\big(\,Y_0 + (\lambda I - U_0)\, E_0 E_0^* (\lambda I - U_0)^* \big)\, G_0^*,$$

где (U_0, T_0) — левая собственная пара матрицы-функции $F(\lambda)$, E_0 и G_0 — матрицы полного ранга соответственно по строкам и по столбцам.

При этом уравнение (21) также приводится к виду (27), а условия (23) эквивалентны управляемости пары (U_0, Y_0).

В обоих рассмотренных случаях условие $X \in \mathcal{H}_{pq}$ означает, что $i_+(X_0) = p$ и $i_-(X_0) = q$. Аналогично, условие $Y \in \mathcal{H}_{pq}$ эквивалентно равенствам $i_+(Y_0) = p$, $i_-(Y_0) = q$.

Следовательно, утверждения теорем 1 – 3 вытекают из леммы 1, изложенных построений и результатов работ [1, 2] для уравнения (27).

Теоремы 1 – 3 доказаны.

Замечание **1.** Условия (10) и (22) теоремы 1 выполняются одновременно, если при любом $\lambda \in \Lambda$

$$F(\lambda)\, F(\lambda)^* + \Phi(\lambda)\, Y\, \Phi(\lambda)^* > 0. \tag{28}$$

Условия (23) вытекают из аналогичного матричного неравенства

$$F(\lambda)\, F(\lambda)^* + \theta(\lambda)\, Y\, \theta(\lambda)^* > 0, \tag{29}$$

где $\theta(\lambda) = \big[\, I, \lambda I, \ldots, \lambda^{h-1} I \,\big]$. Все соотношения (10), (11), (22), (23), (28), (29) в соответствующих утверждениях теоремы 1 должны выполняться лишь в некоторой окрестности точек $\lambda \in \sigma_0(F)$, $\lambda \notin \Lambda_+$. Если $Y > 0$, то условия (22), (23) и (29) выполняются при любых λ. Для выполнения ограничения (24) достаточно положить $i_+(\Gamma) = 1$ [2].

***Замечание* 2.** Ограничения (25) для функции f выполняются, если $i_\pm(\Gamma) \leq 1$, в частности, $f(\lambda, \overline{\mu}) = f_0(\lambda)\,\overline{f_0(\lambda)} - f_1(\lambda)\,\overline{f_1(\lambda)}$. В этом случае множество матриц $Y \in \mathcal{K}_{r0}$ в теореме 2 можно расширить, полагая $Y \in \mathcal{K}_{p0}$, $p \leq r$ и используя специальные ограничения на f и U, установленные в [8, 9].

Отметим, что теорема Ляпунова и ее известные обобщения [1, 2] могут быть сформулированы в виде следствий теоремы 1. Теорема 2 является обобщением теоремы Островского – Шнайдера об инерции решений уравнения Ляпунова [8].

Все утверждения теорем $1-3$, связанные с применением правых (левых) пар матричной функции $F(\lambda)$, сохраняют силу, если в уравнении (21) и при определении множеств $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_{pq}$ вместо матрицы E использовать произведение WE (EW), где W — произвольная матрица подходящих размеров такая, что $\operatorname{rang}(WE) = \operatorname{rang} E$ $(\operatorname{rang}(EW) = \operatorname{rang} E)$. Это позволяет понизить порядок системы алгебраических уравнений, к которой сводится матричное уравнение (21). Если подмножество спектра $\sigma_0(F)$, отвечающее заданной паре (U, T), не совпадает с $\sigma(F)$, то при повторном применении теорем $1-3$ могут быть использованы методы, подобные процедурам исчерпывания блочных спектральных характеристик матричного полинома [4].

4. Представление решений дифференциальных и разностных систем. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений s-го порядка

$$A_0\, x(t) + A_1\, x^{(1)}(t) + \ldots + A_s\, x^{(s)}(t) = g(t), \tag{30}$$

где $x^{(i)}(t)$ — производная i-го порядка вектор-функции $x(t)$, $x^{(i)}(0) = x_0^{(i)}$, $i = 0, \ldots, s-1$. Пусть известны правые пары (U, T) и (V, K) матричных полиномов $F(\lambda)$ и $\lambda^s F(1/\lambda)$ соответственно, т. е.

$$\begin{gathered} A_0 T + A_1 T U + \ldots + A_s T U^s = 0, \quad T \neq 0, \\ A_s K + A_{s-1} K V + \ldots + A_0 K V^s = 0, \quad K \neq 0. \end{gathered} \tag{31}$$

Систему (30) и равенства (31) представим в виде

$$B\,\dot{z}(t) = A\, z(t) + y(t), \quad z(0) = z_0, \tag{32}$$

$$AE = BEU, \quad BH = AHV, \tag{33}$$

где A и B — блочные матрицы, определенные в п. 1,

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x^{(s-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} g(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} T \\ TU \\ \vdots \\ TU^{s-1} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} KV^{s-1} \\ KV^{s-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix}.$$

Векторы $z(t)$ и $y(t)$ в системе (32) построим в виде

$$z(t) = E\, u(t) + H\, v(t), \quad y(t) = B\, E\, p(t) - A\, H\, q(t). \tag{34}$$

Тогда, учитывая равенства (33), получаем

$$B\, E\,(\dot{u}(t) - U\, u(t) - p(t)) + A\, H\,(V\,\dot{v}(t) - v(t) + q(t)) = 0.$$

Следовательно, если при некотором k выполняется условие

$$A\, H\, V^k\, q^{(k)}(t) \equiv 0, \tag{35}$$

то система (32) разрешима в виде (34), где

$$u(t) = e^{Ut} u_0 + \int_0^t e^{U(t-\tau)} p(\tau)\, d\tau, \quad v(t) = \sum_{i=0}^{k-1} V^i q^i(t). \tag{36}$$

Для выполнения тождества (35) достаточно одного из условий

$$q^{(k)}(t) \equiv 0, \quad V^k = 0, \quad \det(I - \lambda V) \neq 0, \quad \lambda \in \sigma(F).$$

При этом из (16) и последнего условия вытекают соотношения

$$H = Q \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix}, \quad NL = LV, \quad HV^k = 0, \quad k \geq \nu.$$

Возвращаясь к исходной системе (30), согласно (33)–(36), имеем

$$x(t) = Tu(t) + KV^{s-1} v(t), \quad x_0^{(j)} = TU^j u_0 + KV^{s-j-1} v_0,$$

$$g(t) = \sum_{i=1}^{s} A_i T U^{i-1} p(t) + A_0 K V^{s-1} q(t), \quad TU^i p(t) \equiv K V^{s-i-2} q(t), \tag{37}$$

$$A_0 K V^{s+k-1} q^{(k)}(t) \equiv 0, \quad K V^{k+i} q^{(k)}(t) \equiv 0,$$

где $j = 0, \ldots, s-1$; $i = 0, \ldots, s-2$.

Выражения для производных $x^{(i)}(t)$ в (32) являются следствием приведенных соотношений.

Таким образом, для произвольных решений матричных уравнений (31) соотношения (36) и (37) описывают некоторый класс векторных функций $x(t)$ и $g(t)$, удовлетворяющих системе (30). Обратно, если векторы $x(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют системе (30), то существуют такие решения матричных уравнений (31) и векторы $u(t)$, $v(t)$, $p(t)$ и $q(t)$, для которых выполняются все соотношения (36), (37). Для установления последнего утверждения достаточно положить [9]

$$E = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\omega} (A - \lambda B)^{-1} d\lambda = Q \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P,$$

$$H = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\kappa} (B - \lambda A)^{-1} d\lambda = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P,$$

$$U = AE = P^{-1} \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P, \quad V = BH = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P,$$

где ω и κ — замкнутые контуры, охватывающие соответственно спектр $\sigma(F)$ и точку 0. Очевидно, $V^{\nu} = 0$ и выполнено условие (35), а матрицы EB и HA (BE и AH) являются ортогональными проекторами, причем $EB + HA = I$ ($BE + AH = I$). В этом случае можно положить $u(t) = BEB\, z(t)$, $v(t) = AHA\, z(t)$, $p(t) = BE\, y(t)$, $q(t) = -AH\, y(t)$.

Аналогичная методика применима для решения разностных систем

$$A_0 x_t + A_1 x_{t+1} + \ldots + A_s x_{t+s} = g_t, \quad t = 0, 1, \ldots . \tag{38}$$

Представляя систему (38) в виде разностной системы первого порядка

$$B z_{t+1} = A z_t + y_t, \quad t = 0, 1, \ldots \tag{39}$$

и используя матричные равенства (31), получаем соотношения

$$x_t = Tu_t + KV^{s-1}v_t, \quad g_t = \sum_{i=1}^{s} A_i TU^{i-1} p_t + A_0 KV^{s-1} q_t,$$

$$u_{t+1} = U^{t+1}u_0 + \sum_{i=0}^{t} U^{t-i} p_i, \quad v_t = \sum_{i=0}^{k-1} V^i q_{t+i}, \tag{40}$$

$$TU^j p_t \equiv KV^{s-j-2} q_t, \quad A_0 KV^{s+k-1} q_{t+k} = KV^{k+j} q_{t+k} = 0,$$

где $j = 0, \ldots, s-2$, $t = 0, 1, \ldots$. Выражения для всех компонент вектора z_t вида $x_{t+i} = TU^i u_t + KV^{s-i-1}v_t$, $i = 0, \ldots, s-1$, вытекают из соотношения (40). Если x_t и g_t удовлетворяют системе (38), то существуют такие решения (U, T) и (V, K) матричных уравнений (31), для которых выполняются соотношения (40).

Можно вывести формулы для решений систем (30) и (38), не используя их представления (32) и (39). Рассматривая формальное обобщение таких систем вида $F(\mathcal{D})x = g$, полагаем

$$x = Tu + Kv, \quad g = \Phi(\mathcal{D})p + \Psi(\mathcal{D})q, \quad \Psi(\mathcal{D})V^k\mathcal{D}^k q \equiv 0, \tag{41}$$

$$F(\lambda)T \equiv \Phi(\lambda)(\lambda I - U), \quad F(\lambda)K \equiv \Psi(\lambda)(I - \lambda V), \quad \lambda \in \Lambda, \tag{42}$$

где векторы u и v определены в (36) или (40). В случае матричного полинома $F(\lambda)$ тождества (42) эквивалентны равенствам (31). При этом

$$\Phi(\lambda) = \Phi_0 + \lambda\Phi_1 + \ldots + \lambda^{s-1}\Phi_{s-1}, \quad \Psi(\lambda) = \Psi_0 + \lambda\Psi_1 + \ldots + \lambda^{s-1}\Psi_{s-1},$$

где

$$\Phi_i = \sum_{j=i+1}^{s} A_j TU^{j-i-1}, \quad \Psi_i = \sum_{j=0}^{i} A_j KV^{i-j}, \quad i = \overline{0, s-1},$$

и с учетом (41) устанавливается следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть пары матриц (U, T) и (V, K) удовлетворяют равенствам* (31) *и выполнены соотношения*

$$\det(I - \lambda V) \neq 0, \quad \lambda \in \sigma(F), \tag{43}$$

$$x_0 = Tu_0 + Kv_0, \quad \sum_{j=i}^{s} A_j x_0^{(j-i)} = \Phi_{i-1}u_0 - \Psi_{i-1}Vv_0, \quad i = \overline{1, s-1}, \tag{44}$$

$$g(t) = \Phi_0 p(t) + \Psi_0 q(t), \quad \Phi_i p(t) + \Psi_i q(t) \equiv 0, \quad i = \overline{1, s-1}, \tag{45}$$

где u_0, v_0, $p(t)$ и $q(t)$ — некоторые векторы.

Тогда система (30) *разрешима в виде*

$$x(t) = Tu(t) + Kv(t), \tag{46}$$

где $u(t)$ и $v(t)$ — вектор-функции, определенные в (36).

Обратно, если $x(t)$ является решением системы (30), *то существуют матрицы U, T, V и K, для которых выполняются соотношения* (31), (43) – (46).

В заключение отметим, что с помощью теорем 1 и 2 устанавливаются условия устойчивости систем (30) и (38) при предположениях соответственно $f(\lambda, \overline{\mu}) = -\lambda - \overline{\mu}$ и $f(\lambda, \overline{\mu}) = 1 - \lambda\overline{\mu}$. В частности, система (32) асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда существуют эрмитовы матрицы X и Y, удовлетворяющие соотношениям

$$-AXB^* - BXA^* = Y, \tag{47}$$

$$B X B^* \geq 0, \quad Y + (A - \lambda B)(A - \lambda B)^* > 0, \quad \forall \lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq 0.$$

Аналогично система соотношений

$$B X B^* - A X A^* = Y, \tag{48}$$

$$B X B^* \geq 0, \quad Y + (A - \lambda B)(A - \lambda B)^* > 0, \quad \forall \lambda : |\lambda| \geq 1$$

представляет критерий асимптотической устойчивости разностной системы (39). Если система (32) ((39)) асимптотически устойчива, то для любой матрицы $Y = B E \hat{Y} E^* B^* \geq 0$ матричное уравнение (47) ((48)) имеет решение $X = E \hat{X} E^* \geq 0$, где матрица E определяется соотношением $\operatorname{rang}[AE, BE] = \operatorname{rang}(BE)$ [10, 11].

1. *Мазко А. Г.* Отщепление и локализация спектра матричного полинома // Докл. НАН Украины. – 1994. – № 10. – С. 15 – 19.
2. *Мазко А. Г.* Построение аналогов уравнения Ляпунова для матричного полинома // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 3. – С. 337 – 343.
3. *Хазанов В. Б.* О некоторых спектральных характеристиках λ-матриц // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1984. – **139**. – С. 111 – 124.
4. *Кублановская В. Н., Хазанов В. Б.* Исчерпывание в спектральных задачах для пучков матриц // Вычислит. процессы и системы. – 1987.– Вып. 5. – С. 138 – 147.
5. *Crossley T. R., Porter B.* Simple proof of the Simon – Mitter controllebility theorem // Electron. Lett. – 1973. – **9**, № 3. – P. 51 – 52.
6. *Бублик Б. Н., Кириченко Н. Ф.* Основы теории управления. – Киев.: Выща шк., 1975. – 328 с.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 532 с.
8. *Carlson D., Hill R. D.* Controllebility and inertia theory for functions of a matrix // J. Math.Anal. and Appl. – 1977. – **59**. – P. 260 – 266.
9. *Мазко А. Г.* К задаче распределения спектра регулярного пучка матриц // Прямые методы в задачах динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 99 – 110.
10. *Мазко А. Г.* Локализация спектра и устойчивость некоторых классов динамических систем // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 8. – С. 1074 – 1079.
11. *Мазко А. Г.* Распределение спектра и представление решений вырожденных динамических систем // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 7. – С. 930 – 936.

Получено 01.04.97