УДК 531.36.534.1

К. С. Матвийчук (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

By using the theory of differential inequalities and the Lagrange multipliers, we develop the method for investigating conditions of the technical stability of continuously controlled processes with lumped parameters.

Розвинуто метод дослідження умов технічної стійкості неперервно керованих процесів із зосередженими параметрами на основі теорії диференціальних нерівностей і множників Лагранжа.

В настоящей работе получены достаточные условия технической устойчивости на заданном конечном и бесконечном промежутках времени, асимптотической технической устойчивости непрерывно управляемых динамических систем с сосредоточенными параметрами. При доказательстве соответствующих теорем формирование управлений процессов систем основывается на методе определяющих уравнений или неравенств с использованием соотношений, содержащих в качестве множителя типа Лагранжа неизвестную функцию времени и фазовых координат. Полученные результаты опираются на исследования, приведенные в [1 – 12], применяется прямой метод Ляпунова в комбинации с методом сравнения [13 – 17].

1. Формулировка основной задачи. Рассмотрим управляемый динамический процесс, возмущенные состояния которого описываются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) + B(t,x)u, \qquad t \in I, \tag{1}$$

при заданных начальных условиях

$$x(t_0) = x_0, \qquad t_0 \in I, \tag{2}$$

где $B(t,x)$ — матрица размерности $n \times m$ с непрерывными коэффициентами; x — вектор состояний рассматриваемого процесса в евклидовом n-мерном пространстве R^n; u — m-мерный вектор управления процесса, $u \in R^m$; $I = [t_0, L]$ — заданный ограниченный интервал времени, $I \subset T$, $T = [t_0, +\infty)$, $t_0 \geq 0$, $L = \text{const} > 0$. Правые части системы (1) считаем определенными и непрерывными в заданной области:

$$D = \{ t, x \colon t \in I, \ \|x\| < A, \ A = \text{const} > 0 \},$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора; символом $(\cdot\,,\cdot)$ обозначается скалярное произведение в евклидовом пространстве.

Для процесса (1), (2) допустимым считается любое непрерывное управление $u = u(t,x)$, множество которых обозначим через U.

Наряду с начальной задачей (1), (2) рассмотрим в той же области D систему вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \qquad t \in I, \tag{3}$$

порождающую для (1) [15], при тех же начальных условиях (2) и при заданных в (1) условиях регулярности для вектор-функции $X(t,x)$.

Введем обозначения: $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ — решения начальной задачи (1), (2); $\bar{x}(t) = \{\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n(t)\}$ — решения задачи (3), (2); вдоль решений задач (1), (2) и (3), (2) соответственно обозначим векторы

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, x(t), u) &= X(t, x(t)) + B(t, x(t))\, u(t, x(t)), \\ \Phi_2(t, \bar{x}(t), u) &= X(t, \bar{x}(t)) + B(t, \bar{x}(t)) u(t, \bar{x}(t)). \end{aligned} \tag{4}$$

Предположим, что область возможных начальных состояний Ω_0 и область допустимых текущих состояний $\Omega(t)$ системы (1) заданы, при этом имеет место включение $\Omega_0 \subset \Omega(t_0)$. Ставится задача: определить подмножество $\Lambda \subset U$ управлений, обеспечивающих выполнение условия

$$x(t) \in \Omega(t), \qquad t \in I, \tag{5}$$

для решений задачи (1), (2) с начальными значениями

$$x(t_0) = x_0 \in \Omega_0, \tag{6}$$

т. е. найти достаточные условия, обеспечивающие техническую устойчивость процесса (1), (2) при любых допустимых начальных значениях $x_0 \in \Omega_0$ и управлениях u из множества $\Lambda \subset U$.

Считаем, что в области D задана определенно-положительная функция $V(t, x)$, являющаяся непрерывно дифференцируемой относительно своих аргументов.

Пусть в области $D \times (-\infty, +\infty)$ определена непрерывная функция $\Phi(t, x, V)$, обращающаяся в нуль при $V = 0$, т. е. $\Phi(t, x, 0) = 0$; в области $K = \{t, V: t \in I, |V| < +\infty\}$ — непрерывная функция $F(t, V)$, удовлетворяющая при $V = 0$ условию $F(t, 0) = 0$. Пусть $\operatorname{grad}^* V = \left\{\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right\}$. Символ $*$ будет обозначать транспонирование.

Задача определения подмножества $\Lambda \subset U$ решается сформулированными ниже критериями технической устойчивости динамических состояний процесса (1), (2).

2. Условия технической устойчивости управляемого процесса. Здесь на основе метода сравнений и прямого метода Ляпунова доказана теорема о технической устойчивости управляемого процесса (1), (2), в котором управление формируется с помощью заданной системы двух уравнений и соотношений, содержащих в качестве множителя, типа множителя Лагранжа [9], скалярную функцию времени t и координат x [3].

Теорема 1. *Пусть при заданных выше свойствах регулярности правых частей систем* (1), (2) *и* (3), (2) *функции* $V(t, x)$, $\Phi(t, x, V)$, $F(t, x)$ *удовлетворяют условиям*:

1) *в области* I *существует и определена непрерывная функция* $P(t) > 0$ *такая, при которой выполняются свойства*

$$C_{P(t)} \subset \Omega(t), \qquad C_{P(t)} = \{x : V(t, x) \le P(t)\}; \tag{7}$$

2) *при любых допустимых начальных значениях* $x_0 \in \Omega_0$ *на решениях исходного процесса* (1), (2) *имеет место уравнение* [4]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\operatorname{grad} V, X + Bu) = \Phi(t, x, V), \tag{8}$$

определяющее на множестве

$$\Gamma = \{ t, x \colon t \in I, \ \| B^* \operatorname{grad} V \| \neq 0 \}$$

семейство управлений u, *заданных формулой*

$$u = \lambda B^* \operatorname{grad} V + \Delta u(t, x), \tag{9}$$

где $\Delta u(t, x) \in U$ — m*-мерная произвольная вектор-функция, удовлетворяющая уравнению*

$$(B^* \operatorname{grad} V, \Delta u) = \eta(t, x), \qquad \eta(t, x), \geq 0, \tag{10}$$

при наперед заданной скалярной непрерывной функции $\eta(t, x)$, *в области* D, $\lambda = \lambda(t, x) > 0$ — *скалярная функция, заданная формулой* [3, 9]

$$\lambda = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial t} + (\operatorname{grad} V, X) - \Phi(t, x, V) + \eta(t, x)}{\| B^* \operatorname{grad} V \|^2}; \tag{11}$$

3) *вдоль решений систем* (1), (2) *и* (3), (2) *при управлениях* (9)–(11) *выполняются неравенства*

$$\frac{\partial V(t, \bar{x}(t))}{\partial t} + (\operatorname{grad} V(t, \bar{x}(t)), \Phi_2(t, \bar{x}(t), u)) \leq$$

$$\leq F(t, V(t, \bar{x}(t))), \qquad t \in I; \tag{12}$$

$$\left| \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} - \frac{\partial V(t, \bar{x}(t))}{\partial t} \right| +$$

$$+ \left| (\operatorname{grad} V(t, x(t)), \Phi_1(t, x(t), u)) - (\operatorname{grad} V(t, \bar{x}(t)), \Phi_2(t, \bar{x}(t), u)) \right| \leq$$

$$\leq M f(t), \qquad t \in I, \tag{13}$$

где $M = \text{const} > 0$, $f(t)$ — *наперед заданные соответственно постоянная величина и вещественная неотрицательная ограниченная функция, для которой существует в области* I *интеграл*

$$\sigma(t) = M \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau, \qquad t_0, \ t \in I; \tag{14}$$

4) *существует* z — *верхнее* [13–16] *решение* $\bar{z}(t) = \bar{z}(t, t_0, z_0)$ *задачи Коши сравнения вида*

$$\frac{dz}{dt} = F(t, z + \sigma(t)), \qquad t \in I; \tag{15}$$

$$z(t_0) = z_0, \qquad t_0 \in I, \tag{16}$$

при заданных функции $\sigma(t)$ *вида* (14) *и условиях*

$$V_0 \leq z_0, \quad \text{где} \quad V = V(t_0, x_0), \quad t_0 \in I; \tag{17}$$

$$0 < z_0 = \text{const} \leq b \quad \text{при} \quad b \leq P(t_0), \quad b = \text{const} > 0, \tag{18}$$

удовлетворяющее в области I *неравенству*

$$\bar{z}(t) + \sigma(t) \leq P(t), \qquad t \in I; \tag{19}$$

5) *множества* Ω_0, $C_{z_0} = \{x: V(t,x) \le z_0\}$ *удовлетворяют свойству* $\Omega_0 \subset C_{z_0}$ *при* $t = t_0$.

Тогда справедливы утверждения:

1. *При любом управлении u вида* (9), *удовлетворяющем условиям* (8), (10), (11), *исходный динамический процесс* (1), (2) *при любых допустимых начальных данных* $x_0 \in \Omega_0$ *является технически устойчивым на заданном конечном промежутке времени* I.

2. *Если процессы* (1), (2) *и* (3), (2) *определены с указанными выше свойствами их правых частей в любом промежутке времени* $I \subseteq T$, *то исходный процесс* (1), (2) *при любых допустимых начальных значениях* $x_0 \in \Omega_0$ *является технически устойчивым на бесконечном промежутке времени* T, *если условия* 1 – 5 *теоремы* 1 *являются справедливыми на любом интервале* $I \subseteq T$.

3. *Если дополнительно выполняется условие*

$$\lim_{t \to +\infty} [\bar{z}(t) + \sigma(t)] = 0, \tag{20}$$

то процесс (1), (2) *является асимптотически технически устойчивым.*

Доказательство. Вычислим полную производную $\dfrac{dV}{dt}$ в силу системы (1), (2). Вдоль любого допустимого решения $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ задачи (1), (2) положим $V(t) = V(t, x(t))$. Используя условия 1 – 3 теоремы 1, получаем оценку для $\dfrac{dV(t)}{dt}$ в области $I \subset T$ вдоль решений задачи (1), (2) при управлениях u, подчиненных условиям (8) – (11):

$$\frac{dV(t)}{dt} \le F(t, V(t)) + Mf(t). \tag{21}$$

Положим $k(t) = V(t) - \sigma(t)$, воспользовавшись (14). Тогда вместо (21) имеем

$$\frac{dk(t)}{dt} \le F(t, k(t) + \sigma(t)), \qquad t \in I. \tag{22}$$

Из неравенства (22) следует задача Коши сравнения (15), (16) с наперед заданной и аддитивно входящей в уравнение (15) функцией (14). Следовательно, применяя теорему 9.5 о дифференциальных неравенствах из [16] при условиях (17), вдоль решений исходного управляемого процесса (1), (2) при управлениях u, удовлетворяющих свойствам (8) – (11), получаем неравенство

$$V(t, x(t)) \le \bar{z}(t) + \sigma(t), \qquad t \in I. \tag{23}$$

Отсюда и из условий (18), (19) находим оценки

$$V(t, x(t)) \le P(t), \qquad t \in I;$$

$$V(t_0, x_0) \le b, \qquad t_0 \in I, \quad x_0 \in \Omega_0, \tag{24}$$

вдоль решений процесса (1), (2) при управлениях u со свойствами (8) – (11).

Из неравенств (24) и заданных в теореме 1 условий 5 следует утверждение 1 данной теоремы.

Аналогично на любом временном интервале $I \subseteq T$ получаем утверждение 2, а с учетом условия (20) — утверждение 3 теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Таким образом, совокупность управлений $u \in U$, обеспечивающих выполнение условий теоремы 1 при заданных функциях $V(t, x)$, $\Phi(t, x, V)$, $F(t, V)$, $\eta(t, x)$, определяет искомое подмножество $\Lambda \subset U$.

Вычислим норму $\| u \|$ векторов из множества Λ:

$$\| u \| = \{ \lambda^2 \| B^* \operatorname{grad} V \|^2 + 2\lambda (B^* \operatorname{grad} V, \Delta u) + \| \Delta u \|^2 \}^{1/2}. \tag{25}$$

Из условий (10) и равенства (25) находим, что $\min \| u \|$ достигается при условиях

$$\Delta u = 0, \quad \eta(t, x), = 0, \tag{26}$$

при этом второе условие в (26) выполняется по необходимости. Отсюда оптимальное управление $u_0 \in \Lambda$, доставляющее наименьшее значение норме $\| u \|$,

$$u_0 = \lambda B^* \operatorname{grad} V, \tag{27}$$

где для λ в этом случае имеем выражение

$$\lambda = - \frac{\dfrac{\partial V}{\partial t} + (\operatorname{grad} V, X) - \Phi(t, x, V)}{\| B^* \operatorname{grad} V \|^2}. \tag{28}$$

На оптимальном управлении u_0 (27) уравнение (8) переходит в уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\operatorname{grad} V, X) + \lambda (\operatorname{grad} V, BB^* \operatorname{grad} V) = \Phi(t, x, V), \tag{29}$$

не зависящее от функции $\eta(t, x)$. Следовательно, при условиях теоремы 1 управление u_0 (27) обеспечивает техническую устойчивость процесса (1), (2) с наименьшим значением нормы $\| u \|$, заданной на множестве управлений $\Lambda \subset \subset U$.

3. Достаточные условия технической устойчивости управляемого процесса на основе определяющих неравенств. Ниже получен критерий технической устойчивости управляемого процесса (1), (2), когда в основу построения оптимальных управлений исходного процесса положен метод определяющих неравенств, предложенный в работе [3]. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что*:

1) *выполнены заданные выше условия регулярности правых частей процессов* (1), (2) *и* (3), (2);

2) *справедливо условие* 1 *теоремы* 1;

3) *при любых допустимых начальных значениях* $x_0 \in \Omega_0$ *на решениях исходного процесса* (1), (2) *при заданной в области* D *непрерывной функции* $W(t, x)$ *выполняется неравенство*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\operatorname{grad} V, X + Bu) \le W(t, x), \tag{30}$$

определяющее на множестве Γ *семейство управлений и согласно равенству* [3, 4]

$$u = -\lambda B^* \operatorname{grad} V + \Delta u(t, x), \tag{31}$$

где $\Delta u(t, x) \in U$ *— m-мерная произвольная вектор-функция, подчиненная условию*

$$(B^* \operatorname{grad} V, \Delta u) \le 0, \tag{32}$$

$\lambda = \lambda(t, x)$ *— скалярная функция, заданная формулой*

$$\lambda = \frac{\dfrac{\partial V}{\partial t} + (\operatorname{grad} V, X) - W(t, x)}{\|B^* \operatorname{grad} V\|^2}; \tag{33}$$

4) *выполняются условия* 3 – 5 *теоремы* 1 *при управлениях и со свойствами* (30) – (33), *когда имеет место неравенство* [3]

$$W(t, x) \le F(t, V) \quad при \quad t \in I, \quad x \in \Omega(t), \quad V \in K. \tag{34}$$

Тогда при управлениях (30) – (33) *справедливы утверждения о технической устойчивости исходного процесса* (1), (2), *аналогичные утверждениям* 1 – 3 *теоремы* 1.

***Доказательство теоремы* 2** аналогично доказательству теоремы 1. Таким образом, множество управлений $u \in U$, обеспечивающих выполнение условий теоремы 2 при заданных функциях $V(t, x)$, $F(t, V)$, $W(t, x)$, определяет подмножество $\Lambda \subset U$, существенно отличающееся от аналогичного подмножества $\Lambda \subset U$ в случае условий теоремы 1.

В случае управлений (31) – (33) норма $\| u \|$ векторов из Λ имеет представление [3]

$$\| u \| = \{ \lambda^2 \| B^* \operatorname{grad} V\|^2 - 2\lambda (B^* \operatorname{grad} V, \Delta u) + \| \Delta u \|^2 \}^{1/2}. \tag{35}$$

Из (32) следует, что $\min \| u \|$ достигается при условии

$$\Delta u = 0. \tag{36}$$

Оптимальное управление

$$u_0 = -\lambda B^* \operatorname{grad} V. \tag{37}$$

На управлении (37) неравенство (30) принимает вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\operatorname{grad} V, X) - \lambda(\operatorname{grad} V, BB^* \operatorname{grad} V) \le W(t, x). \tag{38}$$

Следовательно, при условиях теоремы 2 оптимальное управление u_0 (37) обеспечивает техническую устойчивость исходного управляемого динамического процесса (1), (2) на заданном ограниченном и бесконечном промежутках времени, асимптотическую техническую устойчивость с наименьшим значением величины $\| u \|$ (35), заданной на множестве управлений Λ. Если оптимальное управление u_0 типа (37) вместо (38) порождает равенство, тогда таким образом полученное уравнение может быть использовано для построения функции Ляпунова $V(t, x)$ при заданных λ, W подобно уравнению (29) при заданных λ, Φ.

Итак, получаем следующий вывод. Из полученных теорем следует, что для построения управлений типа (27) или типа (37) достаточно использовать любую функцию типа Ляпунова V, поставленную в соответствие порождающей системе (3) и удовлетворяющую условию любой из доказанных выше теорем. Последнее замечание, очевидно, является существенно важным на практике.

1. *Абгарян К. А.* Устойчивость движения на конечном интервале времени // Итоги науки и техники. Общая механика. – М.: ВИНИТИ, 1976. – **3**. – С. 43 – 127.
2. *Абдуллин Р. З.* Практическая устойчивость в задачах автоматического регулирования // Динамика нелинейных систем. – Новосибирск: Наука, 1983. – С. 35 – 49.
3. *Байрамов Ф. Д.* Обеспечение технической устойчивости управляемых систем // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. – Новосибирск: Наука, 1991. – С. 134 – 139.

4. *Васюков В. И., Горбатенко С. А.* Построение закона управления нелинейной системой на основе решения обратной задачи динамики // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. – Новосибирск: Наука, 1991. – С. 140–144.
5. *Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф.* Исследование задач по практической устойчивости и стабилизации движения // Механика твердого тела. – 1975. – № 6. – С. 15–24.
6. *Зубов В. И.* Динамика управляемых систем. – М.: Высш. шк., 1982. – 288 с.
7. *Каменков Г. В.* Об устойчивости на конечном интервале времени // Прикладная математика и механика. – 1953. – **27**, вып. 5. – С. 529–540.
8. *Кириченко Н. Ф.* Введение в теорию стабилизации движения. – Киев: Выща шк., 1978. – 184 с.
9. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1977. – Т. 1. – 480 с.
10. *Летов А. М.* Математическая теория процессов управления. – М.: Наука, 1981. – 256 с.
11. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация управляемых процессов // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1974. – № 4. – С. 96–102.
12. *Кунцевич В. М., Лычак М. М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
13. *Матвийчук К. С.* О технической устойчивости динамических состояний твердого тела, колеблющегося на нелинейных упругих амортизаторах // Прикл. механика. – 1993. – **29**, № 7. – С. 90–96.
14. *Матвийчук К. С.* Техническая устойчивость процесса движения двух связанных платформ, несущих перемещающиеся маховики // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1993. – № 6. – С. 3–10.
15. *Матвийчук К. С.* О технической устойчивости системы автоматического управления с переменной структурой // Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 10. – С. 74–78.
16. *Szarski J.* Differential inequalities. – Warszawa: PWN, 1967. – 256 p.
17. *Skalmierski B., Tylikowski A.* Stabilnosc ukladow dynamicznych. – Warszawa: PWN, 1973. – 176 p.

Получено 25.09.96