УДК 519.21

І. К. Мацак (Держ. акад. лег. пром-сті України, Київ)

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ НОРМИ ЕКСТРЕМУМУ ПОСЛІДОВНОСТІ НОРМАЛЬНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

Under additional conditions on a bounded normally distributed random function $\{X = X(t),\ t \in T\}$, we establish a relation of the form $\lim_{n\to\infty} P(b_n(\|Z_n\| - a_n) \le x) = \exp(-e^{-x})\ \forall x \in R^1$, where $Z_n = Z_n(t) = \max_{1\le k\le n} X_k(t)$, (X_n) are independent copies of X, $\|x(t)\| = \sup_{t\in T}|x(t)|$, and $(a_n), (b_n)$ are numerical sequences.

При додаткових умовах на обмежену нормально розподілену випадкову функцію $\{X = X(t),\ t \in T\}$ встановлено співвідношення вигляду $\lim_{n\to\infty} P(b_n(\|Z_n\| - a_n) \le x) = \exp(-e^{-x})\ \forall x \in R^1$, де $Z_n = Z_n(t) = \max_{1\le k\le n} X_k(t)$, (X_n) – незалежні копії X, $\|x(t)\| = \sup_{t\in T}|x(t)|$, $(a_n), (b_n)$ – числові послідовності.

Вступ. Нехай $\{X = X(t),\ t \in T\}$ — нормально розподілена випадкова функція (в. ф.), визначена на параметричній множині T, $MX(t) = 0$. Будемо припускати, що X — обмежена в. ф., тобто майже напевно (м. н.) $\sup_{t\in T} X(t) < \infty$. Через $R(t,s)$ та $\sigma(t)$ позначимо відповідно кореляційну функцію та середнє квадратичне відхилення в. ф. $X(t)$,

$$R(t,s) = MX(t)X(s), \quad \sigma = \sigma(t) = (R(t,t))^{1/2},$$
$$\sigma_0 = \|\sigma\|, \text{ де } \|x(t)\| = \sup_{t\in T}|x(t)|.$$

Нехай $X_n(t)$, $n \ge 1$, — незалежні копії в. ф. $X(t)$,

$$Z_n = Z_n(t) = \max_{1\le k\le n} X_k(t).$$

В [1] для неперервних нормальних випадкових процесів вивчалась асимптотична поведінка величини $\|Z_n\|$ м.н. . У даній роботі досліджується слабка збіжність $\|Z_n\|$, а саме при деяких умовах на кореляційну функцію $R(t,s)$ встановлюється співвідношення вигляду

$$\lim_{n\to\infty} P\big(b_n(\|Z_n\| - a_n) \le x\big) = G_1(x) \qquad \forall x \in R^1, \tag{1}$$

де $G_1(x) = \exp(-e^{-x})$ — функція розподілу екстремальних значень типу 1[2], (a_n), (b_n) – числові послідовності. Послідовність (b_n) має вигляд

$$b_n = \begin{cases} (2\ln(n)^{1/2}, & n > 1; \\ 1, & n = 1, \end{cases}$$

а (a_n) буде визначатися умовами на кореляційну функцію.

Основні результати стосовно екстремумів випадкових послідовностей і процесів можна знайти в [2 – 5].

Відзначимо також роботу [6], в якій вивчається слабка збіжність екстремальних значень у банахових просторах із безумовним базисом. Зауважимо, що одержати аналогічні результати для функціональних просторів у загальному випадку мабуть неможливо. Це пов'язано з тим, що граничним буде процес з незалежними в кожній точці значеннями, який у багатьох функціональних просторах (наприклад, $C[0, 1]$) не існує.

Основні результати. Спочатку розглянемо неперервний нормально розподілений випадковий процес $\{X = X(t),\ t \in T = [0, h]\}$. Покладемо (див. [3], гл.13)

$$\rho(t, s) = \frac{R(t,s)}{\sigma(t)\,\sigma(s)}, \quad \gamma^2(t) = R_{11}(t, t) = \left[\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\,\partial s}\right]_{t=s},$$

$$\mu(t) = \frac{R_{01}(t,t)}{\gamma(t)\,\sigma(t)}, \quad R_{01}(t, s) = \left[\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}\right],$$

$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{\gamma(s)}{\sigma(s)}\left(1 - |\mu(s)|^2\right)^{1/2} ds,$$

$$\rho_{11}(t, s) = \left[\frac{\partial^2 \rho(t,s)}{\partial t\,\partial s}\right].$$

Для функції $\Lambda(t)$ виконується рівність [3] $\pi^{-1}\exp\left(-u^2/2\right)\Lambda(h) = MN_u(h)$, де $N_u(h)$ — число перетинів фіксованого рівня u траєкторією нормованого процесу $X(t)/\sigma(t)$ на інтервалі $[0, h]$.

Будемо говорити, що процес $X(t)$ задовольняє умову (J), якщо $R(t, s)$ має неперервну мішану частинну похідну другого порядку $R_{11}(t, s)$, сумісний нормальний розподіл $X(t)$ і його похідної в середньому квадратичному $X'(t)$ не вироджений для будь-якого $t \geq 0$ і

а) $MX(t) = 0, \quad \sigma(t) > 0, \quad |\mu(t)| < 1;$

б) $\sup\limits_{t\in[0,\, h-s]} \rho(t, t+s) < 1, \quad s > 0;$

в) $\sup\limits_{|t-s|\leq\delta} \left| 1 - \dfrac{\rho_{11}(t, s)}{[\rho_{11}(t, t)\ \rho_{11}(s, s)]^{1/2}} \right| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.$

Якщо $X(t)$ — стаціонарний нормальний процес із спектральною функцією $F(\lambda)$ і $\lambda_2 = \int \lambda^2\, dF(\lambda) < \infty$, то умова (J) виконується.

Теорема 1. *Нехай $\{X = X(t),\ t \in T = [0, h]\}$ — нормальний випадковий процес, який задовольняє умову (J). Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(b_n\left(\|Z_n(t)/\sigma(t)\| - a_n\right) \leq x\right) = G_1(x), \tag{2}$$

де $a_n = b_n + \dfrac{\ln(\Lambda(h)/2\pi)}{b_n}$.

У наступному твердженні досліджується випадок нормальної послідовності $X(t)$, $t = 1, 2, \ldots$. Покладемо $r_{ij} = R(i, j)/\sigma(i)\sigma(j)$ і припустимо, що

$$\sigma_0 = \sigma(1) = \sigma(2) = \ldots = \sigma(m) > \max_{t>m} \sigma(t), \tag{3}$$

$$\max_{1\leq i<j\leq m} \left|r_{ij}\right| < 1. \tag{4}$$

Теорема 2. *Нехай $\{X = X(t),\ t \in T = N\}$ — центрована обмежена нормальна послідовність, яка задовольняє умови* (3), (4). *Тоді виконується рівність типу* (1):

$$\lim_{n\to\infty} P\left(b_n\left(\left\|Z_n(t)/\sigma_0\right\| - a_n\right) \le x\right) = G_1(x),$$

де $a_n = b_n + \dfrac{\ln(m) - (\ln(4\pi) + \ln\ln(n))/2}{b_n}$.

Позначимо через $|\ |_m$ евклідову норму в R^m, μ — міра Лебега в R^m, T— вимірна обмежена замкнена множина в R^m.

Теорема 3. *Нехай* $\{X = X(t),\ t \in T\}$ — *центроване стаціонарне нормальне поле з неперервною кореляційною функцією* $R(t, s) = R(t - s)$, *яка задовольняє умови : для деякого* α, $0 < \alpha \le 2$,

$$R(t) = 1 - |t|_m^{\alpha} + o\left(|t|_m^{\alpha}\right), \tag{5}$$

і для $t \ne 0$

$$R(t) < 1. \tag{6}$$

Тоді виконується рівність (1), *в якій*

$$a_n = b_n + \frac{(m/\alpha - 1/2)(\ln 2 + \ln\ln(n)) + \ln\left(\mu(T) H_\alpha (2\pi)^{-1/2}\right)}{b_n},$$

H_α — *константа, яку в загальному випадку досить легко обчислити,* $H_2 = \pi^{-m/2}$ (*див.* [7, 8, 5, с. 160 – 163]).

***Зауваження* 1.** В умовах теореми 3 рівність (1) залишається справедливою при заміні $\|Z_n\|$ на $\sup\limits_{t\in T} Z_n(t)$ з тими ж константами a_n та b_n. При заміні $Z_n(t)$ на $\hat{Z}_n(t) = \max\limits_{1\le k\le n} |X_k(t)|$ для справедливості теореми 3 необхідно покласти

$$a_n = b_n + \frac{(m/\alpha - 1/2)(\ln 2 + \ln\ln(n)) + \ln\left(2\mu(T) H_\alpha (2\pi)^{-1/2}\right)}{b_n}.$$

Для доведення теореми необхідні наступні леми.

Лема 1. *Нехай для* $n \ge 1$ $\left\{A_{kn}\right\}_{k=1}^{n}$ — *послідовність незалежних випадкових подій,* $P(A_{kn}) = p_n$, $0 \le \tau \le \infty$. *Припустимо, що*

$$n(1 - p_n) \to \tau \quad \text{при } n \to \infty. \tag{7}$$

Тоді

$$P\left(\bigcap_{k=1} A_{kn}\right) \to \exp(-\tau) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{8}$$

Навпаки, якщо (8) *виконується для деякого* τ, $0 \le \tau \le \infty$, *то виконується і* (7).
Справедливість леми випливає з теореми 1.5.1 із [2].
Далі будемо користуватись такими позначеннями:

$$F(x) = R\left(\sup_{t\in T} X(t) < x\right),$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy, \quad \varphi(y) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-y^2/2),$$

$$\Psi(x) = \Phi^{-1}(F(x)).$$

Відомо [5, с. 113], що для обмеженої нормальної в. ф. існує скінченна границя

$$d = \lim_{x\to\infty}(\sigma_0\Psi(x) - x). \tag{9}$$

Лема 2. *Нехай* $\{X = X(t),\ t\in T\}$ *— обмежена нормально розподілена в. ф.,* $\sigma_0 = 1$, $\theta(x) = \exp(x^2/2)\ (1 - F(x-d))$. *Тоді при* $x\to\infty$ $\theta'(x)/\theta(x) = O(1)$.

Доведення леми 2. Диференціюючи рівність

$$\theta(x+d) = \exp((x+d)^2/2)\ (1-F(x)),$$

неважко перевірити, що

$$x + d - F'(x)/(1-F(x)) = \theta'(x+d)/\theta(x+d).$$

Тому для доведення леми досить показати, що

$$F'(x)/(1-F(x)) = x + O(1). \tag{10}$$

У роботі [5, с. 123] наведено оцінку, яка у випадку $\sigma_0 = 1$ має вигляд

$$\frac{\Psi(x)(1-F(x))}{S(\Psi(x))} \le F'(x) \le \frac{(x+d)^2\,(1-F(x))}{(x - m(\hat{X}))\,S(\Psi(x))}, \tag{11}$$

де $m(\hat{X})$ — медіана випадкової величини $\hat{X} = \sup\limits_{t\in T} X(t)$,

$$S(u) = \int_0^\infty \exp(-x - x^2/2u^2)\,dx.$$

Враховуючи рівність (9) та співвідношення $S(x) = 1 + O(1/x^2)$ (див. [5, с. 13]), із (11) одержуємо

$$\frac{x+O(1)}{1+O(1/x^2)} \le \frac{F'(x)}{1-F(x)} \le \frac{x+O(1)}{1+O(1/x)}.$$

Звідси відразу випливає оцінка (10).

Лема 3. *Нехай* $\{X = X(t),\ t\in T\}$ *— обмежена нормально розподілена в. ф.,* $\sigma_0 = 1$. *Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(b_n\left(\sup_{t\in T} Z_n(t) - a_n\right) \le x\right) = G_1(x), \tag{12}$$

де $a_n = b_n + \ln(\theta(b_n))/b_n - d$, *функція* $\theta(x)$ *і величина* d *означені в лемі* 2.

Доведення леми 3. Покладемо $u_n(x) = a_n + x/b_n$. Очевидно, що рівність (12) еквівалентна такій:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{t\in T} Z_n(t) \le u_n(x)\right) = G_1(x).$$

За лемою 1 при $n\to\infty$

$$P\left(\sup_{t\in T} Z_n(t) \le u_n(x)\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{kn}\right) \to G_1(x),$$

якщо $n(1 - P(A_{kn})) \to \exp(-x)$, де $A_{kn} = \left(\sup\limits_{t\in T} X_k(t) \le u_n(x)\right)$.

Таким чином, щоб отримати рівність (12), залишається встановити співвідношення:

$$n \exp(x)\, P\left(\sup_{t\in T} X(t) > u_n(x)\right) \to 1, \quad n \to \infty. \tag{13}$$

В умовах леми

$$P\left(\sup_{t\in T} X(t) > u_n(x)\right) = \theta(u_n(x)+d) \exp(-(u_n(x)+d)^2/2).$$

Тому співвідношення (13) еквівалентне рівності

$$(u_n(x)+d)^2/2 - \ln(\theta(u_n(x)+d)) - \ln(n) - x = o(1). \tag{14}$$

Рівність (14) одержимо, якщо скористаємось асимптотичними оцінками

$$(u_n(x)+d)^2/2 = \ln(\theta(b_n)) + \ln(n) + x + o(1), \tag{15}$$

$$u_n(x)+d = b_n + o(1), \tag{16}$$

$$\ln(\theta(b_n)) = \ln(\theta(b_n + o(1))) + o(1). \tag{17}$$

В [5, с. 113] встановлено асимптотичне співвідношення

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}\left(\ln(1-F(x)) + (x+d)^2/2\right) = 0. \tag{18}$$

Тому при $x \to \infty$ $\ln(\theta(x)) = o(x)$. З цієї рівності випливають оцінки (15), (16). Рівність (17) випливає із леми 2, згідно з якою функція $\ln(\theta(x))$ має обмежену похідну при великих значеннях x.

***Доведення теореми* 1.** Якщо $X(t)$ — нормальний випадковий процес, для якого виконується умова (J), то (див.[9])

$$\lim_{x\to\infty} \exp(x^2/2)\, P\left(\sup_{t\in[0,h]} X(t)/\sigma(t) > x\right) = \Lambda(h)/2\pi.$$

Оскільки процес $X(t)$ неперервний, то $d = 0$ [5, с. 118]. Згідно з лемою 3 при $\theta(x) \sim \Lambda(h)/2\pi$ одержуємо

$$\lim_{n\to\infty} P\left(b_n(\sup_{t\in[0,h]} Z_n(t)/\sigma(t) - a_n) \le x\right) = G_1(x), \tag{19}$$

де a_n задається в рівності (2).

Далі скористаємось оцінками

$$P\left(\sup_{t\in[0,h]} Z_n(t)/\sigma(t) > u_n(x)\right) \le P(\|Z_n(t)/\sigma(t)\| > u_n(x)) \le$$

$$\le P\left(\sup_{t\in[0,h]} Z_n(t)/\sigma(t) > u_n(x)\right) + P\left(\inf_{t\in[0,h]} Z_n(t)/\sigma(t) < -u_n(x)\right), \tag{20}$$

$$P\left(\inf_{t\in[0,h]} Z_n(t)/\sigma(t) < -u_n(x)\right) \le P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\left(\inf_{t\in[0,h]} X_k(t)/\sigma(t) < -u_n(x)\right)\right) =$$

$$= P\left(\sup_{t\in[0,h]} X(t)/\sigma(t) > -u_n(x)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{21}$$

$u_n(x)$ було означено у лемі 3. Отже, з (19), (20), (21) випливає рівність (2).

Доведення теореми 2. Не обмежуючи загальності будемо вважати $\sigma_0 = 1$. Тоді із умови (3) та рівності (18) одержуємо

$$P\left(\sup_{t\in N} X(t) > x\right) \sim P\left(\sup_{1\le t\le m} X(t) > x\right), \quad x \to \infty. \tag{22}$$

Якщо стандартні нормальні величини $Y(t)$, $t = 1, 2, \ldots, m$, незалежні, то легко обчислюється асимптотика:

$$P\left(\sup_{1\le t\le m} Y(t) > x\right) \sim m\,(2\pi)^{-1/2}\, x^{-1} \exp\left(-x^2/2\right). \tag{23}$$

При виконанні умови (4) можна використати лему порівняння [20, с. 106]

$$\left|P\left(\sup_{1\le t\le m} X(t) > x\right) - P\left(\sup_{1\le t\le m} Y(t) > x\right)\right| \le$$

$$\le K \sum_{1\le i<j\le m} |r_{ij}| \exp\left(-x^2/\left(1+|r_{ij}|\right)\right). \tag{24}$$

Із (22) – (24) маємо

$$P\left(\sup_{t\in N} X(t) > x\right) \sim m\,(2\pi)^{-1/2}\, x^{-1} \exp\left(-x^2/2\right), \qquad x \to \infty.$$

Звідси і з рівності (18) випливає $d = 0$. Залишається знову застосувати лему 3 з $d = 0$, $\theta(x) = m\,(2\pi)^{-1/2}\, x^{-1}$ і повторити міркування із доведення теореми 1.

Доведення теореми 3. Якщо для випадкового поля $X(t)$ справедливі оцінки (5), (6), то (див. [7, 8]) виконується наступне асимптотичне співвідношення:

$$P\left(\sup_{t\in T} X(t) > x\right) \sim (2\pi)^{-1/2} \mu(T)\, H_\alpha\, x^{(2m/\alpha)-1} \exp\left(-x^2/2\right), \quad x \to \infty.$$

Оскільки поле $X(t)$ неперервне, то, поклавши в лемі 3 $d = 0$, $\theta(x) \sim$ $\sim (2\pi)^{-1/2} \mu(T)\, H_\alpha\, x^{(2m/\alpha)-1}$, одержимо рівність (12), в якій

$$a_n = b_n + \frac{(m/\alpha - 1/2)(\ln 2 + \ln\ln(n)) + \ln\left(\mu(T)\, H_\alpha (2\pi)^{-1/2}\right)}{b_n}.$$

Перехід (12) $\Rightarrow$ (1) аналогічний переходу (19) $\Rightarrow$ (2) із доведення теореми 1.

Відзначимо ще один клас випадкових процесів, для яких відома асимптотика функції $\theta(x)$. Це стаціонарні нормальні процеси з кореляційною функцією $R(t)$, яка задовольняє умову

$$R(t) = 1 - C(-\ln|t|)^{-\alpha} + o\left((\ln|t|)^{-\alpha}\right)$$

при $1 < \alpha < \infty$. Для таких процесів [5, с. 145, 156] $\theta(x) \sim C_1 \exp(C_2 x)^{2/(\alpha+1)}$ при $x \to \infty$ і для них можна одержати рівність (1).

Зауваження 2. Для загального випадку обмеженої нормально розподіленої випадкової функції $X(t)$ з $\sigma_0 > 0$, $MX(t) = 0$ справедлива рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left(b_n(\|Z_n(t)/\sigma_0\| - a_n) \le x\right) = G_1(x),$$

в якій

$$a_n = b_n + \frac{\ln\left(\hat{\theta}(b_n)\right)}{b_n} - d/\sigma_0, \quad \hat{\theta}(x) = \exp(x^2/2)(1 - F(\sigma_0 x - d)).$$

1. *Мацак І. К.* Асимптотичні властивості норми екстремальних значень нормальних випадкових елементів у просторі $C[0,1]$ // Укр. мат. журн. – 1998. – **50,** № 9. – С. 1227 – 1235.
2. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. – М.: Мир, 1989. – 392 с.
3. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. – М.: Мир, 1969. – 394 с.
4. *Галамбош Я.* О развитии математической теории экстремумов за последние полвека // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – **39,** № 2. – С. 272 – 293.
5. *Лифшиц М. А.* Гауссовские случайные функции. – Киев: ТВіМС, 1995. – 246 с.
6. *Мацак І. К.* Слабка збіжність екстремальних значень незалежних випадкових елементів у банахових просторах з безумовним базисом // Укр. мат. журн. – 1996. – **48,** № 6. – С. 805 – 812.
7. *Беляев Ю. К., Питербарг В. И.* Асимптотика среднего числа *А*-точек выбросов гауссовского поля за высокий уровень // Докл. АН СССР. – 1972. – **203**. – С. 9 – 12.
8. *Qualls C., Watanabe H.* Asymptotic properties of Gaussian random fields // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – **177**. – P. 155 – 171.
9. *Мацак И. К.* Асимптотические свойства гауссовских процессов // Укр. мат. журн. – 1980. – **32,** № 3. – С. 332 – 339.

Одержано 16.09.96