УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ m-ЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

We present the asymptotic method of integration of $2n$-order m-frequency oscillation systems and analyze averaged equations in nonresonance and resonance cases. We also prove the theorem on the preservation of smooth p-dimensional invariant tori under perturbation for arbitrary $0 \le p \le n$ and indicate the types of decomposable m-frequency oscillation systems.

Наведено асимптотичний метод інтегрування m-частотних коливних систем $2n$-го порядку, проведено аналіз усереднених рівнянь у нерезонансному та резонансному випадках, доведено теорему збереження при збуренні гладких p-вимірних інваріантних торів при довільному $0 \le \le p \le n$, вказані види розщеплюваних m-частотних коливних систем.

Будем рассматривать систему уравнений в $\mathbb{R}^{2n}$ вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon X(x), \tag{1}$$

где A — постоянная матрица, $X \in \mathbb{K}[x]$ ($\mathbb{K}[x]$ — кольцо полиномов над $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^{2n}$), ε — малый положительный параметр. Относительно системы (1) будем предполагать, что общее ее решение при $\varepsilon = 0$ является квазипериодическим с частотным базисом $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, где $m \le n$.

К системе (1) применим общий метод асимптотического интегрирования нелинейных систем, изложенный в [1, 2].

Свойства системы (1) позволяют существенно преобразовать алгоритм общего метода, придать ему простую, удобную для реализации форму. Этой задаче, а также анализу усредненных уравнений, полученных асимптотическим методом, посвящена настоящая работа.

В первом пункте приводятся сведения, необходимые для компактного изложения метода; во втором излагается асимптотический метод интегрирования рассматриваемой системы уравнений; третий пункт посвящен расщеплению усредненной системы уравнений; в четвертом приводится анализ усредненных уравнений в нерезонансном случае; в пятом пункте обсуждаются особенности асимптотического метода в резонансном случае; в шестом приводятся расщепляемые m-частотные колебательные системы.

1. Обозначения, предположения и вспомогательные утверждения. ***Кольцо* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.** С целью упрощения ряда выкладок пространство векторов $\mathbb{R}^n$ наделим структурой коммутативного кольца $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, введя помимо аддитивной операции $+$ сложения векторов мультипликативную операцию $\cdot$ их покоординатного умножения. Очевидно, что покоординатное умножение векторов $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ равносильно операции умножения диагональной матрицы, диагональные элементы которой являются координатами одного вектора, на другой вектор:

$$x \cdot y \overset{\text{def}}{=} D(x)y = D(y)x, \tag{1.1}$$

где $D(\cdot) = \operatorname{diag}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n)$. Из (1.1) легко следует, что пара операций $+$ и $\cdot$ наделяет $\mathbb{R}^n$ структурой коммутативного кольца.

Пусть e — вектор $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, удовлетворяющий условию

$$e^2 \overset{\text{def}}{=} e \cdot e = e. \tag{1.2}$$

Очевидно, что координатами вектора e являются лишь значения 0 и 1. Определим

$$\operatorname{rank} e \tag{1.3}$$

числом координат e, равных 1. Объединение всех векторов e

$$\bigcup e \tag{1.4}$$

образует в $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ моноид по умножению порядка 2^n. Последнее является следствием того, что число векторов e ранга p равно C_n^p. Множество

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{e \neq 1} e\mathbb{R}^n, \tag{1.5}$$

состоящее из векторов $\mathbb{R}^n$, не имеющих нулевых координат, образует в $(\mathbb{R}^n$, $+, \cdot)$ группу обратимых по умножению векторов. Следовательно, в $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ возможно деление / на вектор y из (1.5):

$$x / y \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y^{-1}. \tag{1.6}$$

Нам понадобится формула определения якобиевой матрицы от произведения векторных функций

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} + g(x) \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \tag{1.7}$$

где

$$f \in C^1(\mathbb{R}^m), \quad g \in C^1(\mathbb{R}^m), \quad f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n. \tag{1.8}$$

Наконец, определим левое и правое умножение векторов $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^{n_1}$ на $(n \times n_1)$-мерную матрицу A, положив

$$x \cdot A \stackrel{\text{def}}{=} D(x)A, \quad A \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} A\,D(y). \tag{1.9}$$

Очевидны равенства

$$(x \cdot A)y = x \cdot Ay, \quad (A \cdot y)z = A(y \cdot z), \tag{1.10}$$

лишь только $z \in \mathbb{R}^{n_1}$.

Полярные координаты в $\mathbb{R}^{2n}$. Пусть a_ν, b_ν, c_ν, $\nu = \overline{1, n}$, — действительные числа, удовлетворяющие условию

$$a_\nu^2 + b_\nu c_\nu + 1 = 0. \tag{1.11}$$

Матрицы

$$H_\nu = \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & -a_\nu \end{pmatrix}, \quad \nu = \overline{1, n}, \tag{1.12}$$

удовлетворяют условию

$$H_\nu^2 = -E, \quad \nu = \overline{1, n}, \tag{1.13}$$

и имеют собственными числами значения $\pm i$, где $i^2 = -1$. Здесь и в дальнейшем E обозначает единичную матрицу соответствующего порядка.

Определим γ_ν из уравнения

$$a_\nu \cos 2\gamma_\nu = \frac{b_\nu + c_\nu}{2} \sin 2\gamma_\nu, \quad \nu = \overline{1, n}, \tag{1.14}$$

и положим

$$B_\nu = \begin{pmatrix} \sin\gamma_\nu \\ \cos\gamma_\nu \end{pmatrix}, \qquad B_\nu^+ = (\sin\gamma_\nu, \cos\gamma_\nu). \tag{1.15}$$

С учетом обозначений и условий (1.11) – (1.15) имеем

$$B_\nu^+ H_\nu B_\nu = 0, \qquad B_\nu^+ B_\nu = 1, \qquad \nu = \overline{1, n}. \tag{1.16}$$

Рассмотрим матрицу $e^{H_\nu \varphi_\nu}$. Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что для $e^{H_\nu\varphi_\nu}$ интерполяционная формула Лагранжа – Сильвестра [3] имеет вид

$$e^{H_\nu\varphi_\nu} = H_\nu \sin\varphi_\nu + E\cos\varphi_\nu, \qquad \nu = \overline{1, n}. \tag{1.17}$$

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $x_\nu \in \mathbb{R}^2$, $\nu = \overline{1, n}$. В $\mathbb{R}^{2n}$ вместо x_ν можно ввести полярные координаты φ_ν, h_ν, положив

$$x_\nu = e^{H_\nu\varphi_\nu} B_\nu h_\nu, \qquad \nu = \overline{1, n}. \tag{1.18}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered} \Phi(\varphi) = e^{H\varphi} = \operatorname{diag}\{e^{H_1\varphi_1}, \ldots, e^{H_n\varphi_n}\}, \\ B = \operatorname{diag}\{B_1, \ldots, B_n\}, \qquad B^+ = \operatorname{diag}\{B_1^+, \ldots, B_n^+\}, \end{gathered} \tag{1.19}$$

где $e^{H_\nu\varphi_\nu}$, B_ν, B_ν^+ определены выше. С учетом равенств (1.7) и обозначений (1.19) имеем

$$B^+ H B = 0, \qquad B^+ B = E, \qquad H^2 = -E. \tag{1.20}$$

Вместо евклидовых координат x введем в $\mathbb{R}^{2n}$ полярные координаты $(\varphi, h) \in \in \mathcal{T}_n \times \mathbb{R}^{+n}$, положив

$$\begin{gathered} x = \Phi(\varphi) B H = [\sin\varphi H + \cos\varphi E] B h = \\ = \operatorname{diag}\{[\sin\varphi_1 H_1 + \cos\varphi_1 E] B_1 h_1, \ \ldots \ , [\sin\varphi_n H_n + \cos\varphi_n E] B_n h_n\}, \end{gathered} \tag{1.21}$$

где $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}^{+n} = (\mathbb{R}^+)^n$, $\mathcal{T}_n$ — n-мерный тор. Согласно (1.21) любая область $D \subset \mathbb{R}^{2n}$, не содержащая точек гиперплоскостей

$$x_\nu = 0, \tag{1.22}$$

однозначно отображается в область пространства $\mathcal{T}_n \times \mathbb{R}^{+n}$; при этом формулы обращения имеют вид

$$h\cos\varphi = B^+ x, \qquad h\sin\varphi = -B^+ H x \tag{1.23}$$

и вытекают из (1.18) с учетом равенств (1.7), (1.8).

Отметим некоторые свойства матрицы $\Phi(\varphi)$. Согласно определению имеем

$$\begin{gathered} \Phi(\varphi)^{-1} = \Phi(-\varphi), \qquad \det\Phi(\varphi) = 1, \\ \Phi(\varphi) = \prod_{\nu=1}^{n} \Phi(0, \ldots, \varphi_\nu, \ldots, 0), \qquad \Phi(\varphi + \psi) = \Phi(\varphi)\Phi(\psi). \end{gathered} \tag{1.24}$$

Наконец, использовав свойства (1.24), приведем формулу дифференцирования замены (1.21): если в (1.21) x, φ, h — дифференцируемые функции переменного t, то их производные по t связаны формулами

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(\varphi)\, H B \left(h \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) + \Phi(\varphi)\, B \frac{dh}{dt} \tag{1.25}$$

и их обращениями

$$\frac{dh}{dt} = B^{+} \Phi(-\varphi) \frac{dx}{dt}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = - B^{+} H \Phi(-\varphi) \frac{dx}{dt} \Big/ h. \tag{1.26}$$

Предположения, некоторые свойства ядра гомологического оператора метода. Пусть $\lambda_\nu > 0$, $\nu = \overline{1, n}$. Тогда матрица $\lambda_\nu H_\nu$ имеет собственные числа $\pm i\lambda_\nu$, $\nu = \overline{1, n}$. Вещественная матрица A, удовлетворяющая условиям, предполагаемым относительно системы (1), вещественно подобна матрице

$$\mathrm{diag}\,(\lambda_1 H_1, \ldots, \lambda_n H_n), \tag{1.27}$$

где $\pm i\lambda_\nu$, $\nu = \overline{1, n}$, — собственные числа A, H_ν, $\nu = \overline{1, n}$, — матрицы (1.3). Положим $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $I = \mathrm{diag}\,(1_2, \ldots, 1_2)$, где 1_2 — единица $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. Матрицу (1.27) можно записать согласно принятым обозначениям в виде

$$I\lambda \cdot H = H \cdot I\lambda, \tag{1.28}$$

или сокращенно λH или $H\lambda$. Потребуем, чтобы

$$A = \lambda H. \tag{1.29}$$

При $n = m$ положим $\lambda = \omega$. При $m < n$ базис частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$ можно выбрать из чисел $\lambda_1 / d, \ldots, \lambda_n / d$ при некотором целом $d \geq 1$ так, чтобы

$$\lambda = K\omega, \tag{1.30}$$

где K — $(n \times m)$-мерная целочисленная матрица ранга m, совокупность элементов которой не имеет общего делителя. Будем предполагать равенство (1.30) выполненным.

Согласно общей схеме [1] для асимптотического метода важную роль играет ядро гомологического оператора. В случае рассматриваемой системы гомологический оператор $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda H y) - \lambda H \tag{1.31}$$

и его ядро рассматривается в $\mathbb{K}[y]$. Преобразуем оператор $\mathcal{L}$, используя равенства (1.28), (1.30). Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}Y &= \frac{\partial Y}{\partial y}(I\lambda \cdot H) y - I\lambda \cdot HY = \frac{\partial Y}{\partial y} H (I\lambda \cdot y) - H(I\lambda \cdot Y) = \\ &= \frac{\partial Y}{\partial y} H (y \cdot I\lambda) - H(Y \cdot I\lambda) = \left(\frac{\partial Y}{\partial y} H \cdot y \right) I\lambda - (H \cdot Y) I\lambda = \\ &= \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial y} H \cdot y \right) - (H \cdot Y) \right] IK\omega. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Таким образом,

$$\ker \mathcal{L} \bigcup \mathbb{K}[y] \tag{1.33}$$

образовано полиномиальными решениями системы уравнений

$$\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial y} H \cdot y \right) - (H \cdot Y) \right] IK\omega = 0. \tag{1.34}$$

Выделим из (1.33) ту часть, которая не зависит от конкретного выбора частотного базиса. Очевидно, она определяется системой уравнений, получаемой из (1.34) дифференцированием по ω:

$$\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial y} H \cdot y\right) - (H \cdot Y)\right] IK = 0. \tag{1.35}$$

Система (1.35) удовлетворяется, в частности, когда

$$\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial y} H \cdot y\right) - (H \cdot Y)\right] I = 0. \tag{1.36}$$

Более того, (1.35) совпадает с (1.36) при $n = m$. Таким образом, вне зависимости от вида матрицы K множество (1.33) содержит общую часть, определяемую системой уравнений (1.36).

Система (1.36) эквивалентна следующей системе:

$$\frac{\partial Y_\nu}{\partial y_\nu} H_\nu y_\nu - H_\nu Y_\nu = 0, \quad \nu = \overline{1, n}, \tag{1.37}$$

$$\frac{\partial Y_\nu}{\partial y_j} H_j y_j = 0, \quad j \neq \nu. \tag{1.38}$$

Приведем одно из решений системы (1.37), (1.38). Обозначим через $H_\nu^!$ матрицу, коммутирующую с H_ν, и докажем, что

$$H_\nu^! = \alpha E + \beta H_\nu, \tag{1.39}$$

где α и β — произвольные постоянные. Действительно, если матрица

$$H_\nu^! = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

коммутирует с H_ν, то

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & -a_\nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & -a_\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 a_\nu + \alpha_2 c_\nu - (a_\nu \alpha_1 + b_\nu \alpha_3) & \alpha_1 b_4 - \alpha_2 a_\nu - (a_\nu \alpha_2 + b_\nu \alpha_4) \\ \alpha_3 a_\nu + \alpha_4 c_\nu - (c_\nu \alpha_1 - a_\nu \alpha_3) & \alpha_3 b_\nu - \alpha_4 a_\nu - (c_\nu \alpha_2 - a_\nu \alpha_4) \end{pmatrix} = 0,$$

что приводит к равенствам

$$\alpha_2 c_\nu = \alpha_3 b_\nu, \quad (\alpha_1 - \alpha_4) b_\nu = 2\alpha_2 a_\nu,$$
$$2\alpha_3 a_\nu = (\alpha_1 - \alpha_4) c_\nu, \quad \alpha_3 b_\nu = \alpha_2 c_\nu.$$

Последние удовлетворяются лишь при

$$\alpha_3 = \alpha_2 \frac{c_\nu}{b_\nu}, \quad \alpha_4 = \alpha_1 - 2\alpha_2 \frac{a_\nu}{b_\nu}.$$

Поэтому

$$H_\nu^! = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 \dfrac{c_\nu}{b_\nu} & \alpha_1 - 2\alpha_2 \dfrac{a_\nu}{b_\nu} \end{pmatrix} = \left(\alpha_1 - \alpha_2 \frac{a_\nu}{b_\nu}\right) E + \frac{\alpha_2}{b_\nu} H_\nu. \tag{1.40}$$

Определим симметрическую матрицу

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

из условия

$$S H_\nu + H_\nu^{\mathrm{T}} S = 0, \tag{1.41}$$

где H_ν^{T} — транспонированная матрица H_ν.

Имеем

$$\begin{pmatrix} \alpha a_\nu + \beta c_\nu & \alpha b_\nu - \beta a_\nu \\ \beta a_\nu + \gamma c_\nu & \beta b_\nu - \gamma a_\nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_\nu \alpha + c_\nu \beta & a_\nu \beta + c_\nu \gamma \\ b_\nu \alpha - a_\nu \beta & b_\nu \beta - a_\nu \gamma \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(a_\nu \alpha + c_\nu \beta) & b_\nu \alpha + c_\nu \gamma \\ b_\nu \alpha + c_\nu \gamma & 2(-a_\nu \gamma + b_\nu \beta) \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует

$$a_\nu \alpha + c_\nu \beta = 0, \quad b_\nu \alpha + c_\nu \gamma = 0, \quad -a_\nu \gamma + b_\nu \beta = 0,$$

или

$$\alpha = -\frac{c_\nu}{b_\nu}\gamma, \quad \beta = \frac{a_\nu}{b_\nu}\gamma.$$

Итак,

$$S = \gamma \begin{pmatrix} -\dfrac{c_\nu}{b_\nu} & \dfrac{a_\nu}{b_\nu} \\ \dfrac{a_\nu}{b_\nu} & 1 \end{pmatrix} = \frac{\gamma}{b_\nu} \begin{pmatrix} -c_\nu & a_\nu \\ a_\nu & b_\nu \end{pmatrix}.$$

Положим

$$S_\nu = \begin{pmatrix} -c_\nu & a_\nu \\ a_\nu & b_\nu \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

Так как

$$\det S_\nu = 1,$$

то S_ν — единственная симметрическая унимодулярная матрица, удовлетворяющая условию (1.41).

Следует отметить, что рассматриваемая система уравнений при $\varepsilon = 0$ является гамильтоновой и матрицы S_ν, $\nu = \overline{1, n}$, вместе с числами λ_ν, $\nu = \overline{1, n}$, определяют гамильтониан системы

$$2H(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu (S_\nu x_\nu, x_\nu), \tag{1.43}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. С помощью S_ν мы строим одно из решений системы (1.37), (1.38). Именно, пусть

$$Y_\nu = [\, f_\nu((S_1 y_1, y_1), \ldots, (S_n y_n, y_n))\, E +$$
$$+ g_\nu((S_1 y_1, y_1), \ldots, (S_n y_n, y_n))\, H_\nu \,]\, y_\nu, \tag{1.44}$$

где $f_\nu = f_\nu(z)$ и $g_\nu = g_\nu(z)$ — скалярные функции переменной $z \in \mathbb{R}^n$, принадлежащие $\mathbb{K}[z]$. Тогда

$$Y = (Y_1, \ldots, Y_n) \tag{1.45}$$

являются решением системы (1.37), (1.38). Действительно, дифференцируя (1.44) и используя равенство (1.41) для S_ν, получаем

$$\frac{\partial Y_\nu}{\partial y_\nu} H_\nu y_\nu - H_\nu Y_\nu = \left[\frac{\partial f_\nu((S_1 y_1, y_1), \ldots, (S_n y_n, y_n))}{\partial z_\nu} E + \right.$$

$$+ \frac{\partial g_\nu((S_1 y_1, y_1), \ldots, (S_n y_n, y_n))}{\partial z_\nu} H_\nu \Big] [(S_\nu H_\nu y_\nu, y_\nu) + (S_\nu y_\nu, H_\nu y_\nu)] y_\nu +$$

$$+ [f_\nu((S_1 y_1, y_1), \ldots, (S_n y_n, y_n)) E + g_\nu((S_1 y_1, y_1), \ldots, (S_n y_n, y_n)) H_\nu] H_\nu y_\nu -$$

$$- H_\nu [f_\nu((S_1 y_1, y_1), \ldots, (S_n y_n, y_n)) E + g_\nu((S_1 y_1, y_1), \ldots, (S_n y_n, y_n)) H_\nu] y_\nu =$$

$$= [f_\nu((S_1 y_1, y_1), \ldots, (S_n y_n, y_n)) E + g_\nu((S_1 y_1, y_1), \ldots, (S_n y_n, y_n)) H_\nu] y_\nu -$$

$$- H_\nu [f_\nu((S_1 y_1, y_1), \ldots, (S_n y_n, y_n)) E + g_\nu((S_1 y_1, y_1), \ldots, (S_n y_n, y_n)) H_\nu] y_\nu \equiv 0.$$

Далее имеем

$$\frac{\partial Y_j}{\partial y_j} H_j y_j = \Big[\frac{\partial f_\nu((S_1 y_1, y_1), \ldots, (S_n y_n, y_n))}{\partial z_j} E +$$

$$+ \frac{\partial g_\nu((S_1 y_1, y_1), \ldots, (S_n y_n, y_n))}{\partial z_j} H_\nu \Big] [(S_j H_j y_j, y_j) +$$

$$+ (S_j y_j, H_j y_j)] H_\nu y_\nu \equiv 0.$$

Подсчитаем

$$s_\nu = (S_\nu B_\nu, B_\nu) = (-c_\nu \sin\gamma_\nu + a_\nu \cos\gamma_\nu) \sin\gamma_\nu + (a_\nu \sin\gamma_\nu + b_\nu \cos\gamma_\nu) \cos\gamma_\nu =$$

$$= -c_\nu \sin^2\gamma_\nu + a_\nu \sin 2\gamma_\nu + b_\nu \cos^2\gamma_\nu = \frac{b_\nu - c_\nu}{2} + \frac{b_\nu + c_\nu}{2} \cos 2\gamma_\nu + a_\nu \sin 2\gamma_\nu .$$

С учетом (1.31) получаем

$$s_\nu =$$

$$= \begin{cases} b_n + a_n & \text{при } b_n + c_n = 0, \ 2\gamma_n = \dfrac{\pi}{2}; \\ b_n - a_n & \text{при } b_n + c_n = 0, \ 2\gamma_n = \dfrac{3\pi}{2}; \\ \dfrac{b_n - c_n}{2} + \left(\dfrac{b_n + c_n}{2} + \dfrac{2a_n}{b_n + c_n} \right) \cos \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{2a_n}{b_n + c_n} & \text{при } b_n + c_n \neq 0. \end{cases} \tag{1.46}$$

В заключение приведем следующее утверждение.

Пусть

$$F \colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n, \quad F \in \mathbb{K}[y] \tag{1.47}$$

удовлетворяет условию

$$F \in \operatorname{Ker} \mathcal{L}_0, \qquad \mathcal{L}_0 = \frac{\partial}{\partial y} \lambda H y . \tag{1.48}$$

Тогда если $Y \in \mathbb{K}[y]$ и

$$Y \in \operatorname{Ker} \mathcal{L}, \tag{1.49}$$

то

$$IF \cdot Y \in \operatorname{Ker} \mathcal{L}. \tag{1.50}$$

Доказательство утверждения следует из приводимой ниже цепочки равенств

$$\mathcal{L}(IF \cdot Y) = Y \cdot I \frac{\partial F}{\partial y}(\lambda H y) + IF \cdot I \frac{\partial Y}{\partial y}(\lambda H y) - \lambda H(IF \cdot Y) =$$

$$= IF \cdot (\lambda H y) - \lambda H(IF \cdot Y) = \lambda H(IF \cdot Y) - \lambda H(IF \cdot Y) = 0.$$

2. Асимптотический метод. Рассматриваемую систему будем считать приведенной к виду

$$\frac{dx}{dt} = \lambda H x + \varepsilon X(x). \tag{2.1}$$

При $\varepsilon = 0$ фундаментальная матрица решений (2.1) $e^{\lambda H t}$ определяет m-параметрическое семейство предельных при $|t| \to \infty$ матриц. Вид этого семейства матриц зависит от выбора базиса частот ω. В нерезонансном случае, когда

$$\lambda = \omega,$$

предельное семейство определяется матрицей $\Phi(\varphi)$, определенной формулами (1.17), (1.19):

$$\Phi(\varphi) = e^{H\varphi} = \sin\varphi\, H + \cos\varphi\, E. \tag{2.2}$$

При резонансе согласно предположениям, изложенным в п. 1, считаем

$$\lambda = K\omega. \tag{2.3}$$

Это позволяет определить предельное для $e^{\lambda H t}$ при $|t| \to \infty$ семейство матриц $\Phi(K\psi)$, где $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) \in \mathcal{T}_m$, $\Phi(\varphi)$ — матрица (2.2).

Согласно [2] асимптотическое разложение решения $x = x(t, \varepsilon)$ системы (2.1) ищется в виде ряда

$$x = y + \varepsilon u_1(y) + \ldots + \varepsilon^p u_p(y) + \ldots, \tag{2.4}$$

в котором $y = y(t, \varepsilon)$ — решение усредненного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \lambda H y + \varepsilon Y_1(y) + \ldots + \varepsilon^p Y_p(y) + \ldots, \tag{2.5}$$

u_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, — решения гомологического уравнения

$$\mathcal{L} u_\nu = X_\nu(y) - Y_\nu(y), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{2.6}$$

подчиненные условию

$$\mathcal{S} u_\nu(y) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{2.7}$$

Здесь

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial y} \lambda H y - \lambda H$$

— гомологический оператор, $\mathcal{S}$ — усредняющий оператор,

$$X_1(y) = X(y),$$

$$X_2(y) = \frac{\partial X(y)}{\partial y} u_1(y),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_\nu(y) = \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{d\varepsilon^\nu}[\varepsilon X(y + \varepsilon u_1(y) + \ldots + \varepsilon^{\nu-1} u_{\nu-1}(y))]\Big|_{\varepsilon=0}, \tag{2.8}$$

....,

$$Y_\nu(y) = \mathcal{S}X_\nu(y), \qquad \nu = 1, 2, \ldots ,$$

при этом оператор $\mathcal{S}$ определяется соотношением

$$\mathcal{S}X(y) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda Ht} X(e^{\lambda Ht} y)\, dt, \tag{2.9}$$

а обращение оператора $\mathcal{L}$, определяющее решения в $\mathbb{K}[y]$ уравнений (2.6), (2.7), задается равенством

$$\mathcal{L}^{-1}[X(y) - \mathcal{S}X(y)] =$$

$$= -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^t [e^{-\lambda H\tau} X(e^{\lambda H\tau} y) - \mathcal{S}X(y)]\, d\tau\, dt. \tag{2.10}$$

С учетом выражений для предельных значений матрицы $e^{\lambda Ht}$ при $|t| \to \infty$ преобразуем формулы (2.9), (2.10). Для этого используем формулу [4] для среднего значения квазипериодической функции, согласно которой

$$\mathcal{S}X(y) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\Phi(-K\psi)X(\Phi(K\psi)y)\, d\psi_1\ldots d\psi_m. \tag{2.11}$$

Более того, так как

$$e^{-\lambda Ht}X(e^{\lambda Ht}) = \Phi(-K\omega t)X(\Phi(K\omega t)y),$$

то

$$\int_0^t [e^{-\lambda Ht} X(e^{\lambda Ht} y) - \mathcal{S}X(y)]\, dt =$$

$$= \int_0^t [\Phi(-K\omega t)X(\Phi(K\omega t)y) - \mathcal{S}X(y)]\, dt =$$

$$= \int_0^t \sum_{k\neq 0} X_k(y)\, e^{i(k,\omega)t}\, dt = \sum_{k\neq 0}\frac{X_k(y)}{i(k,\omega)}[e^{i(k,\omega)t} - 1], \tag{2.12}$$

где $k \in \mathbb{Z}^m$ и

$$X_k(y) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\Phi(-K\psi)X(\Phi(K\psi)y)\, e^{-i(k,\psi)}\, d\psi_1\ldots d\psi_m. \tag{2.13}$$

В силу равенств (2.12), (2.13) вместо (2.10) имеем равенство

$$\mathcal{L}^{-1}[X(y) - \mathcal{S}X(y)] = \sum_{k\neq 0}\frac{X_k(y)}{i(k,\omega)}, \tag{2.14}$$

определяющее оператор $\mathcal{L}$ через функции (2.13).

Так как функции $\Phi(\varphi)$, $X(x)$ вещественны, то правая часть (2.14) вещественна, что с учетом (2.13) приводит к равенству

$$\mathcal{L}^{-1}[X(y) - \mathcal{S}X(y)] = \sum_{k \neq 0} \frac{X_k^1(y)}{(k, \omega)},$$

где

$$X_k^1(y) = \operatorname{Im} X_k(y) =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \Phi(-K\psi) X(\Phi(K\psi) y) \sin(k, \psi)\, d\psi_1 \ldots d\psi_m. \qquad (2.15)$$

Формулы (2.4), (2.5), (2.8), (2.11), (2.13), (2.15) окончательно определяют асимптотический метод интегрирования системы (2.1).

Важным случаем системы (2.1) является система, у которой

$$X(0) = 0, \qquad \frac{\partial X(0)}{\partial x} = 0.$$

Для этого случая при $\varepsilon = 1$ асимптотическим методом получаем упорядоченное степенями ε разложение нормальной формы [5] рассматриваемой системы и такое же разложение приводящего к нормальной форме преобразования.

3. Расщепление усредненной системы уравнений. Согласно [2] функции Y_ν принадлежат ядру оператора $\mathcal{L}$ и поэтому удовлетворяют соотношению

$$Y_\nu(e^{\lambda H t} y) = e^{\lambda H t} Y_\nu(y), \qquad \nu = 1, 2, \ldots. \qquad (3.1)$$

В пределе при $|t| \to \infty$ соотношение (3.1) переходит в равенство

$$Y_\nu(\Phi(K\psi) y) = \Phi(K\psi) Y_\nu(y), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \qquad (3.2)$$

справедливое для всех $\psi \in \mathcal{T}_m$, $y \in \mathbb{R}^{2n}$.

Равенство (3.2) позволяет расщепить усредненную систему уравнений (2.5), отщепив от нее систему уравнений медленно меняющихся переменных. Для этого введем в (2.5) вместо y полярные координаты $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_n \times \mathbb{R}^{+n}$ согласно формулам (1.18). Дифференцируя (1.18), получаем

$$\frac{dy}{dt} = e^{H\varphi}\left[HB\left(h\frac{d\varphi}{dt}\right) + B\frac{dh}{dt}\right] =$$

$$= e^{H\varphi}\left\{HB\left[h\left(\frac{d\varphi}{dt} - \lambda\right)\right] + B\frac{dh}{dt}\right\} + \lambda H e^{H\varphi} Bh. \qquad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (2.5), получаем уравнение

$$HB\left[h\left(\frac{d\varphi}{dt} - \lambda\right)\right] + B\frac{dh}{dt} = \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu e^{-\varphi H} Y_\nu(e^{H\varphi} Bh). \qquad (3.4)$$

Уравнение (3.4) разрешается с учетом равенств (1.20) в виде системы

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu B^+ e^{-\varphi H} Y_\nu(e^{H\varphi} Bh), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \lambda - \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu B^+ H e^{-\varphi H} Y_\nu(e^{H\varphi} Bh) / h. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

В нерезонансном случае согласно (3.2) имеем

$$e^{-H\varphi} Y_\nu(e^{H\varphi} Bh) = Y_\nu(Bh), \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

так что система (3.5) имеет вид системы

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^{\nu} B^{+} Y_{\nu}(Bh),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda - \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^{\nu} B^{+} H Y_{\nu}(Bh) / h$$

с отщепленной системой уравнений для медленно меняющихся переменных.

При резонансе преобразование системы (3.5) следует продолжить, использовав равенство (2.3). Для этого выберем $n \times (n-m)$-мерную целочисленную матрицу Q ранга $n-m$ из условия ее ортогональности матрице K:

$$K^{\mathrm{T}} Q = 0, \tag{3.6}$$

где K^{T} — транспонированная матрица. Этого легко достичь, взяв в качестве Q матрицу, состоящую из $n-m$ линейно независимых столбцов матрицы

$$d_1 (E - KK^{+}), \tag{3.7}$$

где K^{+} — псевдообратная матрица к матрице K:

$$K^{+} = (K^{\mathrm{T}} K)^{-1} K^{\mathrm{T}},$$

а d_1 — наименьшее число, обеспечивающее целочисленность матрицы (3.7). Действительно, так как

$$K^{+}(E - KK^{+}) = 0,$$

то

$$K^{+} Q = 0.$$

Последнее равносильно равенству (3.6).

Выполним теперь замену переменных, введя в (3.5) вместо φ переменные ψ, θ по формулам

$$\varphi = K\psi + Q\theta, \quad \psi = K^{+}\varphi, \quad \theta = Q^{+}\varphi,$$

в которых Q^{+} — матрица, псевдообратная к Q:

$$Q^{+} = (Q^{\mathrm{T}} Q)^{-1} Q^{\mathrm{T}}.$$

С учетом равенств (1.23), (3.2) имеем

$$e^{-H\varphi} Y_{\nu}(e^{H\varphi} Bh) = \Phi(-Q\theta)\Phi(-K\psi) Y_{\nu}(\Phi(K\psi)\Phi(Q\theta)Bh) =$$

$$= \Phi(-Q\theta) Y_{\nu}(\Phi(Q\theta)Bh),$$

так что система (3.5) в переменных h, θ, ψ принимает вид

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^{\nu} B^{+} \Phi(-Q\theta) Y_{\nu}(\Phi(Q\theta)Bh),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^{\nu} Q^{+} B^{+} H \Phi(-Q\theta) Y_{\nu}(\Phi(Q\theta)Bh) / h, \tag{3.8}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^{\nu} K^{+} B^{+} H \Phi(-Q\theta) Y_{\nu}(\Phi(Q\theta)Bh) / h.$$

В системе (3.8) отщеплены уравнения медленно меняющихся переменных h, θ; более того, правые части уравнений (3.8) не зависят от переменных ψ, что облегчает их интегрирование.

Из (3.8) явно видно, что гиперплоскости (1.22) при замене (1.18) порождают полюса

$$h_\nu = 0$$

системы (3.8). Поэтому при исследовании траекторий усредненной системы уравнений (2.5), начинающихся на гиперплоскостях (1.22):

$$y_\nu = 0, \tag{3.9}$$

полярные координаты следует вводить лишь для тех y, которые не удовлетворяют условиям (3.9).

4. Анализ усредненных уравнений в нерезонансном случае. В нерезонансном случае усредненные уравнения (2.5) удобно записать в виде системы относительно двумерных параметров $y^j = (y_{2j-1}, y_{2j})$:

$$\frac{dy^j}{dt} = \lambda_j H_j y^j + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu Y_\nu^j(y^1, \ldots, y^n), \quad j = \overline{1, n}. \tag{4.1}$$

Равенства (3.2) принимают теперь вид

$$Y_\nu^j(\Phi_1(\varphi_1)y^1, \ldots, \Phi_j(\varphi_j)y^j, \ldots, \Phi_n(\varphi_n)y^n) =$$
$$= \Phi_j(\varphi_j)\, Y_\nu^j(y^1, \ldots, y^j, \ldots, y^n), \quad j = \overline{1, n}, \tag{4.2}$$

и определяют характер симметрии правых частей системы (4.1). Полагая в (4.2) $\varphi_j = \pi$, $\varphi_\nu = 0$ при $\nu \neq j$, из (4.2) имеем

$$Y_\nu^j(y^1, \ldots, -y^j, \ldots, y^n) = -Y_\nu^j(y^1, \ldots, y^j, \ldots, y^n) \tag{4.3}$$

для всех $\nu = 1, 2, \ldots$ и произвольного $j = \overline{1, n}$.

Положим в (4.2) $\varphi_l = \pi$, $\varphi_\nu = 0$ при $l \neq j$, $\nu \neq l$. В результате получим

$$Y_\nu^j(y^1, \ldots, -y^l, \ldots, y^n) = Y_\nu^j(y^1, \ldots, y^l, \ldots, y^n) \tag{4.4}$$

для всех $\nu = 1, 2, \ldots$ и произвольного $1 \leq l \leq n$, $l \neq j$, $j = \overline{1, n}$. Согласно (4.3), (4.4) функции $Y_\nu^j(y^1, \ldots, y^n)$ нечетные относительно переменного y^j и четные относительно остальных переменных y^l при $l \neq j$, $1 \leq j \leq n$.

Дифференцируя (4.2) по φ_j, получаем равенство

$$\frac{\partial Y_\nu^j(\Phi_1(\varphi_1)y^1, \ldots, \Phi_j(\varphi_j)y^j, \ldots, \Phi_n(\varphi_n)y^n)}{\partial y^j} H_j \Phi_j(\varphi_j) y^j =$$
$$= H_j \Phi_j(\varphi_j)\, Y_\nu^j(y^1, \ldots, y^j, \ldots, y^n), \tag{4.5}$$
$$j = \overline{1, n}, \quad \nu = 1, 2, \ldots .$$

Из последнего соотношения при $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = 0$ находим равенство (1.37), из которого следует

$$-H_j \frac{\partial Y_\nu^j(y)}{\partial y^j} H_j y^j = Y_\nu^j(y), \quad j = \overline{1, n}, \quad \nu = 1, 2, \ldots . \tag{4.6}$$

Согласно (4.6) усредненные уравнения (4.1) имеют вид

$$\frac{dy^j}{dt} = \lambda_j H_j y^j - \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu H_j \frac{\partial Y_\nu^j(y)}{\partial y^j} H_j y^j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{4.7}$$

Следовательно, инвариантными для усредненных уравнений в нерезонансном случае являются гиперплоскости

$$y^j = 0 \tag{4.8}$$

при любом $j = \overline{1, n}$ и их пересечения.

Полярные координаты h_j, ψ_j вводятся вместо y^j по формулам

$$y^j = (H_j \sin\varphi_j + E\cos\varphi_j)B_j h_j, \qquad j=\overline{1,n}, \tag{4.9}$$

и преобразуют уравнения (4.7) к виду

$$\begin{aligned} \frac{dh_j}{dt} &= -\sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu B_j^+ H_j \frac{\partial Y_\nu^j(Bh)}{\partial y^j} H_j B_j h_j, \\ \frac{d\varphi_j}{dt} &= \lambda_j + \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu B_j^+ \frac{\partial Y_\nu^j(Bh)}{\partial y^j} H_j B_j, \qquad j=\overline{1,n}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Равенства (4.3) – (4.6) гарантируют четность функций

$$\frac{\partial Y_\nu^j(Bh)}{\partial y^j} H_j B_j, \qquad j=\overline{1,n}, \quad \nu = 1,2,\dots,$$

по любой из переменных $h_1,\dots,h_n$. Но тогда с учетом того, что $Y_\nu^j(Bh)$ принадлежат кольцу полиномов $\mathbb{K}[h]$ при $j=\overline{1,n}$; $\nu=1,2,\dots,$ получаем

$$\frac{\partial Y_\nu^j(Bh)}{\partial y^j} H_j B_j = R_\nu^j(h_1^2,\dots,h_n^2)$$

при $j=\overline{1,n}$; $\nu=1,2,\dots,$ где $R_\nu^j(r_1,\dots,r_n)$ принадлежит $\mathbb{K}[r]$.

Систему уравнений (4.10) в переменных

$$r_j = h_j^2, \qquad j=\overline{1,n},$$

записываем в виде системы

$$\begin{aligned} \frac{dr_j}{dt} &= -2\sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu B_j^+ H_j R_\nu^+(r)\, r_j, \\ \frac{d\varphi_j}{dt} &= \lambda_j + \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu B_j^+ R_\nu^+(r), \qquad j=\overline{1,n}, \end{aligned}$$

или при очевидных обозначениях в виде

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r\sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu F_\nu(r), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \lambda + \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu G_\nu(r), \qquad j=\overline{1,n}. \end{aligned}$$

При замене (4.9) гиперплоскости (4.9) переходят в гиперплоскости

$$h_j = 0,$$

которые являются инвариантными вместе с их пересечениями.

Как видно из уравнений (4.10), их правые части определены и на границе области $\mathbb{R}^{+n}$; иначе говоря, систему (4.10) можно использовать для исследования траекторий во всем подпространстве

$$h_\nu \geq 0, \qquad \nu=\overline{1,n}. \tag{4.11}$$

В связи с изложенным докажем одно важное утверждение.

Преобразуем систему уравнений (4.7) на инвариантной гиперплоскости (4.8), использовав вместо y^ν при $\nu\neq j$ амплитудно-фазовые переменные h_ν, φ_ν.

Из равенств (4.5), взятых при $\varphi_j=0$, имеем новые равенства

$$\frac{\partial Y_\nu^j(\Phi_1(\varphi_1)y^1, \ldots, y^j, \ldots, \Phi_n(\varphi_n)y^n)}{\partial y^j} H_j y^j =$$

$$= H_j Y_\nu^j(y) = \frac{\partial Y_\nu^j(y)}{\partial y^j} H_j y^j, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

благодаря которым в переменных y^j, h_ν, φ_ν; $\nu \neq j$, система уравнений (4.7) принимает вид

$$\frac{dy^j}{dt} = \lambda_j H_j y^j - \sum_{p \geq 1} \varepsilon^p H_j \frac{\partial Y_p^j(B_1 h_1, \ldots, y^j, \ldots, B_n h_n)}{\partial y^j} H_j y^j,$$

$$\frac{dh_\nu}{dt} = -\sum_{p \geq 1} \varepsilon^p B_\nu^+ H_\nu \frac{\partial Y_p^\nu(B_1 h_1, \ldots, y^j, \ldots, B_n h_n)}{\partial y^\nu} H_\nu B_\nu h_\nu, \tag{4.12}$$

$$\frac{d\varphi_\nu}{dt} = \lambda_\nu + \sum_{p \geq 1} \varepsilon^p B_\nu^+ \frac{\partial Y_p^\nu(B_1 h_1, \ldots, y^j, \ldots, B_n h_n)}{\partial y^\nu} H_\nu B_\nu, \quad \nu \neq j.$$

Пусть

$$h_j = 0, \quad h_\nu = h_\nu^0 > 0, \quad \nu \neq j, \tag{4.13}$$

— положение равновесия амплитудных уравнений системы (4.10),

$$y_j = 0, \quad h_\nu = h_\nu^0, \quad \nu \neq j, \tag{4.14}$$

— соответствующее ему положение равновесия амплитудных уравнений системы (4.12). Выясним связь собственных чисел матриц коэффициентов уравнений в вариациях, соответствующих положениям равновесий (4.13), (4.14). Не нарушая строгости можно считать j изменяющимся от 1 до n_1, ν — от $n_1 + {}$ $+ 1$ до n, где $1 \leq n_1 \leq n$.

Обозначим через δh_j, δh_ν, $j = \overline{1, n}$; $\nu = \overline{n_1 + 1, n}$, вариации, соответствующие положениям равновесия (4.13). Из (4.10) следует

$$\frac{d\delta h_j}{dt} = -\sum_{p \geq 1} \varepsilon^p B_j^+ H_j \frac{\partial Y_\nu^j(0, B^1 h_0^1)}{\partial y^j} H_j B_j \delta h_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{4.15}$$

где $B^1 h_0^1 = (B_{n_1} h_{n_1}^0, \ldots, B_n h_n^0)$, так что собственными числами матрицы коэффициентов уравнений в вариациях, соответствующих положениям (4.13), являются числа

$$\sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu B_j^+ H_j \frac{\partial Y_\nu^j(0, B^1 h_0^1)}{\partial y^j} H_j B_j, \quad j = \overline{1, n_1}. \tag{4.16}$$

Уравнения для вариаций δh_ν, $\nu = \overline{n_1 + 1, n}$, имеют вид

$$\frac{d\delta h_\nu}{dt} = -\sum_{p \geq 1} \varepsilon^p \sum_{j=1}^{n_1} a_{\nu j}^p \delta h_j -$$

$$-\sum_{p \geq 1} \varepsilon^p \sum_{j = n_1 + 1}^{n_1} \left[\frac{\partial}{\partial h_j} B_\nu^+ H_\nu \frac{\partial Y_p^\nu(0, B^1 h_0^1)}{\partial y^\nu} H_\nu B_\nu h_\nu \right]_{h_\nu = h_\nu^0} \delta h_j, \tag{4.17}$$

$$\nu = \overline{n_1 + 1, n},$$

где $a_{\nu j}^p$ — соответствующие постоянные.

Согласно (4.15), (4.17) матрица коэффициентов уравнений в вариациях, соответствующих положениям (4.13), является квазитреугольной и недостающие $(n - n_1)$ ее собственных чисел определяются собственными числами матрицы, образованной коэффициентами (4.17) при δh_j, $j = \overline{n_1 + 1, n}$.

Обозначим через δy^j, δh_ν, $j = \overline{1, n}$; $\nu = \overline{n_1 + 1, n}$, вариации, соответствующие положениям равновесия (4.14). Из (4.12) следует

$$\frac{d\delta y^j}{dt} = \left[\lambda_j H_j - \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu H_j \frac{\partial Y_\nu^j (0, B^1 h_0^1)}{\partial y^j}\right] \delta y^j, \quad j = \overline{1, n_1}, \tag{4.18}$$

так что собственными числами матрицы коэффициентов уравнений в вариациях, соответствующих положению (4.14), являются собственные числа матрицы

$$\lambda_j H_j - \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu H_j \frac{\partial Y_\nu^j (0, B^1 h_0^1)}{\partial y^j} H_j, \quad j = \overline{1, n_1}. \tag{4.19}$$

Из (4.6) разложением правой части в ряд Тейлора в точке $y^j = 0$ получаем

$$- H_j \frac{\partial Y_\nu^j (y^1, \ldots, y^{j-1}, 0, y^{j+1}, \ldots, y^n)}{\partial y^j} H_j y^j =$$

$$= \frac{\partial Y_\nu^j (y^1, \ldots, y^{j-1}, 0, y^{j+1}, \ldots, y^n)}{\partial y^j} y^j, \quad j = \overline{1, n_1}. \tag{4.20}$$

Из (4.20) следует, что матрица

$$\frac{\partial Y_\nu^j (y^1, \ldots, y^{j-1}, 0, y^{j+1}, \ldots, y^n)}{\partial y^j} y^j$$

коммутирует с матрицей H_j. Согласно виду (1.40) коммутирующей с H_j матрицы, получаем

$$\frac{\partial Y_\nu^j (0, B^1 h_0^1)}{\partial y^j} H_j = \alpha_\nu^j E + \beta_\nu^j H_j, \tag{4.21}$$

где α_ν^j, β_ν^j — некоторые постоянные. С учетом (4.21) матрицы (4.19) имеют вид

$$\lambda_j H_j + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu (\alpha_\nu^j E + \beta_\nu^j H_j),$$

и их собственными числами являются значения

$$\sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \alpha_\nu^j \pm i \left(\lambda_j + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \beta_\nu^j\right), \quad j = \overline{1, n_1}. \tag{4.22}$$

Если подставить (4.21) в (4.16), то получим, что числа (4.16) равны значениям

$$- \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu B_\nu^+ H_j [\alpha_\nu^j E + \beta_\nu^j H_j] H_j B_j = \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \alpha_\nu^j. \tag{4.23}$$

Равенство (4.23) доказывает, что вещественные части собственных чисел матрицы (4.22) совпадают с числами (4.16).

Уравнения для вариаций δh_ν, $\nu = \overline{n_1 + 1, n}$, имеют согласно (4.12) вид

$$\frac{d\delta h_\nu}{dt} = - \sum_{p \geq 1} \varepsilon^p \sum_{j=1}^{n_1} b_{\nu j}^p \delta y^j -$$

$$-\sum_{p\geq 1}\varepsilon^p \sum_{j=n_1+1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial h_j} B_\nu^+ H_\nu \frac{\partial Y_p^\nu(0, B^1 h_0^1)}{\partial y^\nu} H_\nu B_\nu h_\nu\right]_{h_\nu = h_\nu^0} \delta h_j, \qquad (4.24)$$

$$\nu = \overline{n_1+1, n},$$

где $b_{\nu j}^p$ — соответствующие двумерные строчечные постоянные вектора.

Согласно (4.18), (4.24) матрица коэффициентов уравнений в вариациях, соответствующих положениям (4.14), является квазитреугольной и недостающие $(n-n_1)$ ее собственных чисел определяются собственными числами матрицы, образованной коэффициентами (4.24) при δh_j, $j = \overline{n_1+1, n}$. Из уравнений (4.17), (4.24) видно, что матрицы коэффициентов (4.17) и (4.24) при δh_j, $j = \overline{n_1+1, n}$, совпадают. Отсюда следует, что собственные числа этих матриц также совпадают.

Этим мы доказали, что вещественные части собственных чисел матриц уравнений в вариациях, соответствующих положениям равновесия (4.13) и (4.14) амплитудных уравнений (4.10) и (4.12), совпадают. Этот факт важен при установлении строго математического соответствия между положениями равновесия амплитудных уравнений усредненных уравнений (4.10), принадлежащих подпространству (4.11), и инвариантными торами исходной системы уравнений (2.1).

Приведем результат такого соответствия. Ограничимся уравнениями первого приближения, содержащими лишь слагаемые не выше первой степени ε. Запишем амплитудные уравнения первого приближения в виде

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon F(h). \qquad (4.25)$$

Пусть

$$h = h_0 \geq 0: \quad F(h_0) = 0 \qquad (4.26)$$

— положение равновесия системы (4.25),

$$H = \frac{\partial F(h_0)}{\partial h} \qquad (4.27)$$

— матрица коэффициентов уравнений в вариациях системы (4.25), соответствующих положению равновесия (4.26).

Пусть

$$u_1(y) = \sum_{k\neq 0}\frac{X_k^1(y)}{(k, \lambda)}$$

— функция из асимптотического разложения (2.4) решений системы (2.1). Общая теория возмущения инвариантных торов [4] или ее реализации [6, 7] очевидным образом приводят к следующему утверждению.

Теорема. *Пусть правая часть системы* (2.1) *такова, что*:

1) *для некоторых целых* $2 \leq s \leq l$ *функция* $X(x)$ *является* l *раз непрерывно дифференцируемой в области* $D \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, *а* $u_1(x)$ — s *раз непрерывно дифференцируемой в* D;

2) *уравнение* (4.25) *имеет положение равновесия* (4.26) *такое, что тор*

$$x = e^{H\varphi} B^+ h_0$$

принадлежит области D, *а собственные числа матрицы* (4.27) *не имеют нулевых вещественных частей.*

Тогда можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех* $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ *система уравнений* (2.1) *имеет* $(m-p)$-*мерный инвариантный тор*

$$x = f(\psi, \varepsilon),$$

где p — *количество нулевых координат вектора* h_0, $f \in C^{s-2}_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_{m-p})$, $\psi = (\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_{n-p}})$, j_ν, $\nu = \overline{1, n-p}$, — *индексы ненулевых координат вектора* h_0.

Этот тор удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| f(\psi, \varepsilon) - e^{H\varphi} h_0 \|_{s-2} = 0$$

и является экспоненциально устойчивым, когда вещественные части собственных чисел матрицы H *отрицательны, экспоненциально неустойчивым, когда они положительны, и экспоненциально дихотомичным — в оставшемся случае.*

Здесь $C^{s-2}_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_{m-p})$ — пространство $(s-2)$-дифференцируемых функций на торе $\mathcal{T}_{m-p}$, $(s-2)$-е производные которых удовлетворяют условию Липшица, $\| \cdot \|_p = \max\limits_{0 \le |\rho| \le p} \| D^\rho \cdot \|_0$, $D^\rho = \dfrac{\partial^{|\rho|}}{\partial \psi_1^{\rho_1} \ldots \partial \psi_{n-p}^{\rho_{n-p}}}$, $|\rho| = \sum_{\nu=1}^{n-p} \rho_\nu$, $\| \cdot \|_0 = \max\limits_{\psi \in \mathcal{T}_{m-p}} \| \cdot \|$.

В случае, когда числа λ удовлетворяют условию „сильной несоизмеримости"

$$|(k, \lambda)| \ge \frac{\mathcal{K}}{(1 + |k|)^d}, \qquad k \in \mathbb{Z}^n, \quad k \ne 0,$$

предположение об u_1 выполняется согласно [4] при любых l и s, удовлетворяющих неравенству

$$l - d - \frac{n}{2} > s.$$

Теорема распространяется на случай аналитических правых частей системы (2.1) и принимает в этом случае вид соответствующего утверждения, приведенного в [8].

5. Особенности резонансного случая. Систему (2.1) считаем резонансной, если базис частот ω имеет меньше частот, чем n. В основу характеристики резонансного случая мы положили соотношение (2.3), связывающее частоты λ собственных колебаний невозмущенной системы уравнений с базисом частот ω.

Из (2.3) следует

$$\omega = K^+ \lambda, \tag{5.1}$$

где K^+ — псевдообратная к K матрица. Учитывая соотношения (2.3), (5.1), матрицу K будем называть *матрицей определения базиса частот.*

Очевидно, что выбор пары k, ω, ведущей к равенству (2.3), неоднозначен. Однако эта неоднозначность не влияет на асимптотический алгоритм (2.4), (2.5). Это видно из того, что формулы (2.11)–(2.14), однозначно по λ, а с ними и однозначно по паре k, ω, определяют асимптотические разложения (2.4), (2.5).

При резонансе характер симметрии правых частей усредненных уравнений (2.5) более сложен, чем в нерезонансном случае. Для его выяснения выберем $\psi = \psi^0$ из условия

$$K\psi^0 = 0 \pmod \pi)$$

и положим

$$I = \Phi(K\psi^0).$$

Очевидно, I — диагональная матрица, диагональные элементы которой равны 1 либо -1. Взяв равенство (3.2) при $\psi = \psi^0$, получаем

$$Y_\nu(Iy) = IY_\nu(y), \qquad \nu = 1, 2, \ldots . \tag{5.2}$$

Соотношения (5.2) характеризуют симметрию усредненных уравнений (2.5) при резонансе. Из (5.2), в общем-то, не следует нечетность функций Y_ν^j по y^j, а следовательно, не следует инвариантность гиперплоскостей (4.8) усредненных уравнений.

Определим роль матрицы K в характеристике резонансов.

Вектор $k \in \mathbb{Z}^n$, $k \neq 0$, называют *резонансным*, если

$$(k, \lambda) = 0.$$

Пусть Q — матрица, образованная всеми резонансными векторами. Тогда

$$Q = \{\operatorname{Ker} K^{\mathrm{T}} \cap \mathbb{Z}^n\} \setminus \{0\}. \tag{5.3}$$

Соотношение (5.3) следует из равенства

$$(k, \lambda) = (k, K\omega) = (K^{\mathrm{T}} k, \omega)$$

и несоизмеримости частот ω.

Согласно (5.3)

$$\operatorname{rank} Q = n - m,$$

и величину $(n - m)$ можно определить как *ранг резонансов* системы (2.1). С его помощью можно ввести иерархию резонансов, считая резонанс тем сложнее, чем больше его ранг.

Укажем роль матрицы Q в процессе усреднения функции $X(x)$.

Пусть

$$X_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \Phi(-\varphi) X(\Phi(\varphi)x)\, e^{-i(k,\varphi)}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n$$

для $k \in \mathbb{Z}^n$. Тогда

$$\Phi(-\varphi) X(\Phi(\varphi) y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} X_k(x)\, e^{i(k,\varphi)}, \tag{5.4}$$

и мы имеем

$$\Phi(-\lambda t) X(\Phi(\lambda t) y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} X_k(x)\, e^{i(k,\lambda)t}.$$

Поэтому оператор усреднения S (2.11) определяет по $X(x)$ среднее значение

$$Y_1(y) = \sum_{(k,\lambda)=0} X_k(y) = X_0(y) + \sum_{k \in Q} X_k(y). \tag{5.5}$$

Согласно (5.3), (5.5) усредняющий оператор S для систем (2.1) с матрицами K и K_1 одного и того же ранга, определяющими базис частот системы (2.1), один и тот же, если

$$\operatorname{Ker} K^{\mathrm{T}} = \operatorname{Ker} K_1^{\mathrm{T}}. \tag{5.6}$$

Последнее возможно лишь если

$$K_1 = KR, \quad R = K^{\mathrm{T}} K, \quad \det R \neq 0. \tag{5.7}$$

Действительно, если верно (5.6), то Q одно и то же для матриц K и K_1, следовательно, правая часть (5.5) одна и та же для рассматриваемых систем (2.1). Но если выполняется (5.6), то векторы обеих матриц K и K_1 образуют два базиса — дополнения Q до $\mathbb{R}^n$, следовательно, они связаны первым из соотношений (5.7). Остальные соотношения (5.7) — следствие первого для матриц K и K_1 одного ранга. Если же выполняются первое и последнее соотношения из (5.7), то очевидным образом выполняется и равенство (5.6).

Таким образом, переход от одного базиса частот к другому в системе (2.1) не меняет усредняющего оператора, как не меняет его и переход от одного значения λ к другому λ_1, лишь только матрицы K и K_1, определяющие базисы частот этих значений, удовлетворяют соотношениям (5.7).

Обозначим через Q_l подмножество Q, определенное условием

$$|k| = \sum_{\nu=1}^{n} |k_\nu| \leq l.$$

Пусть $X(x)$ — полином степени N. Тогда $\Phi(-\varphi) X(\Phi(\varphi)x)$ является тригонометрическим полиномом по φ, содержащим гармоники $e^{i(k,\varphi)}$ с $|k| \leq N + 1$. Поэтому функции (5.4) удовлетворяют условию

$$X_k(x) = 0, \quad |k| > N+1,$$

и ряд (5.5) обрывается до суммы

$$Y_1(y) = X_0(y) + \sum_{k \in Q_{N+1}} X_k(y).$$

При рассмотрении конечных приближений асимптотического метода интегрирования системы (2.1) для разных λ следует сравнивать множества Q_l для этих l. Так, в частности, если матрица K такова, что

$$Q_{N+1} = \varnothing, \tag{5.8}$$

в первом приближении имеем

$$Y_1(y) = X_0(y).$$

В этом случае уравнения первого приближения при резонансе совпадают с уравнениями первого приближения нерезонансного случая с вытекающими из этого факта последствиями. Например, в этом случае расщепление усредненных уравнений первого приближения осуществляется введением амплитудно-фазовых координат h, φ, и, более того, относительно свойств и соответствий положений равновесия амплитудных уравнений инвариантным торам системы (2.1) имеют место утверждения, приведенные в предыдущем пункте.

Если условие (5.8) не выполняется, то расщепление усредненных уравнений происходит по общей схеме, изложенной в п. 3. Используя общую теорию возмущения инвариантных торов, легко устанавливаем соответствие между „грубыми" квазистатическими положениями равновесия

$$h = h_0, \quad \theta = \theta_0, \quad h_0 > 0$$

расщепленных уравнений первого приближения и m-мерными инвариантными торами исходной системы уравнений (2.1) при резонансе (2.3).

6. Расщепляемые m-частотные колебательные системы. Среди рассматриваемых систем имеются такие, которые расщепляются при переходе от евклидовых координат к полярным. Асимптотическое интегрирование таких систем существенно упрощается, если сразу перейти в них к полярным координатам. Приведем примеры таких систем. Пусть

$$f_\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, \quad f_\nu \in \mathbb{K}[z], \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

$$q_\nu\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^1, \quad q_\nu \in \mathbb{K}[x],$$

$$(Sx, x) = \big((S_1 x_1, x_1), \ldots, (S_n x_n, x_n)\big),$$

где S_ν, $\nu = \overline{1, n}$, — матрицы (1.42).

Рассмотрим систему уравнений вида (2.1):

$$\frac{dx_\nu}{dt} = [(\lambda_\nu + \varepsilon g_\nu(x)) H_\nu + \varepsilon f_\nu((Sx, x)) E]\, x_\nu, \quad \nu = \overline{1, n}. \tag{6.1}$$

Так как

$$S_\nu H_\nu + H_\nu^{\mathrm{T}} S_\nu = 0,$$

то

$$H_\nu^{\mathrm{T}} S_\nu H_\nu = S_\nu,$$

поэтому

$$(S_\nu e^{H_\nu \varphi_\nu} x_\nu, e^{H_\nu \varphi_\nu} x_\nu) = (e^{H_\nu^{\mathrm{T}} \varphi_\nu} S_\nu e^{H_\nu \varphi_\nu} x_\nu, x_\nu) = (S_\nu x_\nu, x_\nu). \tag{6.2}$$

Введем в (6.1) полярные координаты (φ, h) по формулам

$$x_\nu = e^{H_\nu \varphi_\nu} B_\nu h_\nu. \tag{6.3}$$

В результате с учетом (1.26) и (6.2) получим систему уравнений для h_ν:

$$\frac{dh_\nu}{dt} = B_\nu^+ [\lambda_\nu + \varepsilon g_\nu(e^{H\varphi} Bh) H_\nu + \varepsilon f_\nu((SBh, h)) E]\, B_\nu h_\nu =$$

$$= \varepsilon f_\nu((SBh, h))\, h_\nu = \varepsilon f_\nu(s_1 h_1^2, \ldots, s_n h_n^2)\, h_\nu, \quad \nu = \overline{1, n}, \tag{6.4}$$

где s_ν, $\nu = \overline{1, n}$, — числа (1.46). В переменных

$$r_\nu = h_\nu^2$$

система (6.4) принимает вид

$$\frac{dr_\nu}{dt} = 2\varepsilon f_\nu(s_1 r_1, \ldots, s_n r_n)\, r_\nu, \quad \nu = \overline{1, n}. \tag{6.5}$$

Система уравнений для φ_ν согласно (1.26) такова:

$$\frac{d\varphi_\nu}{dt} = -B_\nu^+ [-(\lambda_\nu + \varepsilon g_\nu(e^{H\varphi} Bh) E + \varepsilon f_\nu((SBh, Bh)) H_\nu]\, B_\nu =$$

$$= \lambda_\nu + \varepsilon g_\nu(e^{H\varphi} Bh), \quad \nu = \overline{1, n}. \tag{6.6}$$

Запишем (6.5), (6.6) в векторном виде

$$\frac{dr}{dt} = 2\varepsilon r F(sr), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \lambda + \varepsilon G(e^{H\varphi} Bh), \tag{6.7}$$

где

$$F = (f_1, \ldots, f_n), \quad G = (g_1, \ldots, g_n), \quad sr = (s_1 r_1, \ldots, s_n r_n).$$

Поскольку уравнения для r не зависят от φ, то асимптотический метод применительно к системе уравнений (6.6) сужается до метода асимптотического интегрирования уравнений угловых переменных. Так, в нерезонансном случае усредненные уравнения для φ имеют вид

$$\frac{d\psi}{dt} = \lambda + \varepsilon G_0(Bh),$$

где

$$G_0(Bh) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} G(e^{H\varphi} Bh)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m .$$

Отметим, что положения равновесия амплитудных уравнений системы (6.7) $r = r_0$, принадлежащие подпространству

$$r \geq 0, \tag{6.8}$$

определяют инвариантные торы

$$x = e^{H\varphi} B\, h_0, \qquad h_\nu^2 = r_0 \tag{6.9}$$

системы (6.1) с траекториями на них, определяемыми системой уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda + \varepsilon G(e^{H\varphi} Bh_0).$$

При этом если среди координат r_0 p ненулевых, то тор (6.9) p-мерный и при $1 \leq p < n$ система уравнений, определяющая траектории на этом торе, сужается до системы

$$\frac{de\varphi}{dt} = e\lambda + \varepsilon e G(e^{H\varphi} Bh_0),$$

где e — вектор моноида (6.1), определяемый условиями

$$h_0 = eh_0, \qquad \operatorname{rank} e = p.$$

В качестве конкретного примера системы вида (6.1) рассмотрим систему с функциями

$$f_\nu((Sx, x)) = \alpha_\nu + \beta_\nu (S_\nu x_\nu, x_\nu), \qquad \nu = \overline{1, n},$$

где α_ν, β_ν — постоянные параметры.

Амплитудное уравнение системы (6.7) при таком выборе f_ν имеет вид

$$\frac{dr}{dt} = 2\varepsilon r(\alpha + \beta s r), \tag{6.10}$$

где

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \qquad s = (s_1, \ldots, s_n).$$

При выборе параметров α, β, удовлетворяющих неравенству

$$\alpha\beta s < 0,$$

уравнение (6.10) в области (6.8) имеет положения равновесия

$$r_0 = e r_0 = -e\alpha/\beta s$$

с произвольным e из моноида (6.1). Таким образом, исходная система уравнений имеет C_n^p p-мерных инвариантных торов вида

$$x = e^{H\varphi} B e h_0, \qquad h_0^2 = r_0$$

при любом $1 \leq p \leq n$.

Рассмотрим теперь систему уравнений вида (6.1):

$$\frac{dx_\nu}{dt} = [(\lambda_\nu + \varepsilon g_\nu(x)) H_\nu + \varepsilon f_\nu(x) E]\, x_\nu, \qquad \nu = \overline{1, n}, \tag{6.11}$$

в которой

$$(f_\nu, g_\nu) \in \operatorname{Ker} \mathcal{L}_0, \qquad \nu = \overline{1, n}. \tag{6.12}$$

Пусть имеет место резонанс

$$\lambda = K\omega.$$

Условия (6.12) приводят к тому, что

$$f_\nu(\Phi(K\psi)x) = f_\nu(x), \quad g_\nu(\Phi(K\psi)x) = g_\nu(x), \quad \nu = \overline{1, n}.$$

Поэтому введение полярных координат по формулам (6.3), (1.48) расщепляет систему (6.11), приводя ее к виду

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \varepsilon h F(\Phi(Q\theta)Bh), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon Q^+ G(\Phi(Q\theta)Bh), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon K^+ G(\Phi(Q\theta)Bh). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Положениям равновесия $h = h_0$, $\theta = \theta_0$ уравнений медленных переменных системы (6.13) соответствуют инвариантные торы исходной системы уравнений вида

$$x = \Phi(K\psi)\Phi(Q\theta_0)Bh_0, \tag{6.14}$$

траектории на которых определяются уравнениями

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon K^+ G(\Phi(Q\theta_0)Bh_0).$$

Определение размера торов (6.14) и сужения потока траекторий на них, когда их размер меньше m, не вызывает затруднений.

Наконец отметим, что рассуждения, изложенные в настоящем пункте, верны при любом значении параметра ε.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* К вопросу об асимптотических разложениях нелинейной механики // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 1. – С. 42–53.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Общие вопросы теории асимптотического интегрирования систем нелинейной механики. – Киев, 1987. – 50 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.41).
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
4. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
5. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1979. – 254 с.
6. *Самойленко А. М.* Аб асимптотических разложениях решений систем нелинейной механики // IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. – Киев: Наук. думка, 1984. – **1**. – С. 323–333.
7. *Самойленко А. М.* О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 12. – С. 1665–1669.
8. *Самойленко А. М.* Н. Н. Боголюбов и нелинейная механика // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, вып. 12. – С. 103–146.

Получено 04.06.98