УДК 517.5

П. М. Тамразов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

МОДУЛИ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ МЕТРИКИ В НЕОРИЕНТИРУЕМЫХ И СКРУЧЕННЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ *

The results on moduli and extremal metrics of families of curves in some non-orientable or twisted Riemannian manifolds are presented. Weighted l-moduli of the families of curves and corresponding extremal metrics are introduced and investigated too.

Наведені результати про модулі та екстремальні метрики сімей кривих в деяких неорієнтовних або скручених ріманових многовидах. Введено та досліджено також вагові l-модулі сімей кривих та відповідні екстремальні метрики.

Введение. В настоящей работе приведены результаты о модулях и экстремальных метриках семейств кривых в некоторых неориентируемых или „скрученных" римановых многообразиях. При этом исправлены погрешности, имевшиеся в некоторых формулировках предшествующих публикаций. В п. 1 рассматриваются задачи на римановом листе Мебиуса, в том числе известная задача Пью [1], впервые решенная в [2, 3]. В п. 2 вводятся весовые l-модули семейств кривых и для них решаются задачи на листе Мебиуса. В п. 3 рассматриваются задачи на некоторых „скрученных" пространственных римановых многообразиях, в том числе задача, исследовавшаяся в [4], и ее обобщения.

Предположим, что $\mathcal{D}$ есть риманово многообразие размерности $n \geq 2$.

Для любой измеримой в $\mathcal{D}$ функции $f \geq 0$ введем обозначение

$$V(f, \mathcal{D}) := \int_{\mathcal{D}} f\, dv,$$

где dv — элемент объема в $\mathcal{D}$.

Метрикой в $\mathcal{D}$ будем называть определенную в $\mathcal{D}$ борелевскую, неотрицательную функцию. Класс всех определенных в $\mathcal{D}$ метрик будем обозначать через $P(\mathcal{D})$.

Для $\rho \in P(\mathcal{D})$ и локально спрямляемой кривой $\gamma \subset \mathcal{D}$ введем обозначение

$$|\gamma|_\rho := \int_\gamma \rho\, ds,$$

где ds — элемент длины в $\mathcal{D}$.

Для любого семейства Γ локально спрямляемых кривых $\gamma \subset \mathcal{D}$ через $P(\mathcal{D}, \Gamma)$ обозначим класс всех $\rho \in P(\mathcal{D})$, для которых

$$|\gamma|_\rho \geq 1 \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma.$$

Метрики $\rho \in P(\mathcal{D}, \Gamma)$ называются *допустимыми для* Γ.

Величина

$$M(\Gamma) := \inf_{\rho \in P(\mathcal{D}, \Gamma)} V(\rho^n, \mathcal{D})$$

называется *(конформным) модулем семейства* Γ.

Метрика $\rho \in P(\mathcal{D}, \Gamma)$ называется *экстремальной для* Γ, если

$$V(\rho^n, \mathcal{D}) = M(\Gamma) < +\infty.$$

---

* Выполнена при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований при Министерстве Украины по делам науки и технологий (проект 1.4 / 263) и INTAS (грант 94-1474).

© П. М. ТАМРАЗОВ, 1998

Условимся говорить, что метрика $\rho \in P(\mathcal{D}, \Gamma)$ *минимальна для* Γ, если $V(\rho'', \mathcal{D}) \le M(\Gamma)$.

1. Экстремальные метрики и модули в римановом листе Мебиуса. Проблема нахождения конформных модулей и экстремальных метрик в абстрактном римановом листе Мебиуса в силу конформной инвариантности сводится к случаю, когда риманов лист Мебиуса канонически вложен со склейкой в евклидову плоскость. Именно в таком виде и будем рассматривать эту проблему.

Пусть $0 < \alpha \le +\infty$, $0 < \beta < +\infty$. В евклидовой плоскости R^2 с декартовыми координатами x, y рассмотрим множество

$$\Pi_{0,\alpha} := \{(x, y): -\alpha < x < \alpha,\ -\beta \le y < \beta\}.$$

Каждую точку из $\Pi_{0,\alpha}$ с координатами $(-x, -\beta)$ отождествим с соответствующей точкой (x, β) и в склеенном множестве введем естественную структуру гладкого топологического многообразия (будем пользоваться лишь тем, что оно принадлежит классу гладкости C_2). Полученное многообразие обозначим через Π_α. Определим в Π_α элемент длины ds с помощью формулы $ds^2 = dx^2 + dy^2$. В результате получим неориентируемое риманово многообразие, для которого сохраним обозначение Π_α (топологически это лист Мебиуса). С теоретико-множественной (но не с топологической) точки зрения Π_α в дальнейшем будем отождествлять с $\Pi_{0,\alpha}$.

Обозначим через γ^1 жорданову петлю в Π_α с уравнением $x \equiv 0$, а через γ^{-1} — обратную ей петлю.

Введем следующие семейства кривых: $\Gamma_{0,\alpha}$ — семейство всех локально спрямляемых, замкнутых, нестягиваемых в точку кривых $\gamma \subset \Pi_\alpha$; $\Gamma_{1,\alpha}$ — семейство всех $\gamma \in \Gamma_{0,\alpha}$, гомотопных γ^1 или γ^{-1} на Π_α; $\Gamma_{2,\alpha}$ — семейство всех $\gamma \in \Gamma_{0,\alpha}$, для которых $\gamma \cap \gamma^1 \ne \varnothing$; $\Gamma_{3,\alpha}$ — семейство всех $\gamma \in \Gamma_{0,\alpha}$, содержащих точку $(0, 0)$. Имеем $\Gamma_{1,\alpha} \cup \Gamma_{3,\alpha} \subset \Gamma_{2,\alpha}$.

Рассмотрим универсальное накрывающее $\hat{\Pi}_\alpha$ многообразия Π_α, имеющее вид бесконечной полосы $\hat{\Pi}_\alpha := \{(x, y): -\alpha < x < \alpha\}$ с фундаментальной областью $\Pi_{0,\alpha}$ и группой скольжений G, элементами которой являются отображения $\sigma_n : (x, y) \mapsto (x', y')$ вида $x' = (-1)^n x$, $y' = y + 2\beta n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Обозначим через q проектирование $\hat{\Pi}_\alpha \to \Pi_\alpha$.

Если f — заданная в Π_α функция, то суперпозиция $f \circ q$ инвариантна относительно преобразований σ_n.

Если η — заданная в $\hat{\Pi}_\alpha$ функция, инвариантная относительно преобразования σ_1, то в Π_α существует (единственная) функция $\eta^\#$ такая, что $\eta^\# \circ q = \eta$. Это соотношение будем считать определением операции $^\#$.

Для измеримой в Π_α функции $f \ge 0$ функция $\tilde{f} : \hat{\Pi}_\alpha \to \mathrm{R}$, определяемая формулой

$$\tilde{f}(x, y) := \frac{1}{4\beta} \int_{-2\beta}^{2\beta} f \circ q(x, t)\, dt,$$

не зависит от y, четна относительно x и удовлетворяет соотношению

$$V(\tilde{f}, \Pi_{0,\alpha}) \le V(f, \Pi_{0,\alpha}), \tag{1}$$

в котором при конечной левой или правой части знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $f \circ q$ почти всюду в $\hat{\Pi}_\alpha$ равна $\tilde{f}$. При этом в Π_α существует функция $\tilde{f}^{\#} := (\tilde{f})^{\#} \geq 0$, и для нее $\tilde{f}^{\#} \circ q = \tilde{f}$, а (1) можно представить в равносильной форме

$$V(\tilde{f}^{\#}, \Pi_\alpha) \leq V(f, \Pi_\alpha), \tag{2}$$

где при конечной левой или правой части знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\tilde{f}^{\#}$ почти всюду в Π_α равна f.

Для каждого $t \in \mathrm{R}$ определим отображение $\psi_t : \hat{\Pi}_\alpha \to \hat{\Pi}_\alpha$ с помощью соотношения

$$\psi_t : (x, y) \mapsto (x, y+t) \quad \forall\, (x, y) \in \hat{\Pi}_\alpha .$$

Для каждого $t \in \mathrm{R}$ существует (единственный) автоморфизм $\varphi_t : \Pi_\alpha \to \Pi_\alpha$, для которого в $\hat{\Pi}_\alpha$ выполняется соотношение $\varphi_t \circ q = q \circ \psi_t$.

Предложение. *Пусть в Π_α задано семейство Γ кривых, которое при каждом $t \in \mathrm{R}$ инвариантно относительно автоморфизма φ_t. Если $\rho \in P(\Pi_\alpha, \Gamma)$, то $\tilde{\rho}^{\#} \in P(\Pi_\alpha, \Gamma)$.*

В [2, 3] такое утверждение доказано для $\Gamma_{i,\alpha}$, $i = 0, 1, 2$, но при этом использовано лишь свойство инвариантности семейств относительно φ_t (и никакие другие специфические свойства семейств не используются). Таким образом, при замене $\Gamma_{i,\alpha}$ на Γ приведенное в [2, 3] доказательство сохраняется и предложение справедливо.

В частности, если в качестве Γ взять произвольное из рассмотренных в [2, 3] семейств $\Gamma_{1,\alpha}^{k}$ и $T_{s,m}$ (определения см. ниже), то оно заведомо удовлетворяет условию инвариантности из приведенного предложения, и потому из соотношения $\rho \in P(\Pi_\alpha, \Gamma)$ следует, что $\tilde{\rho}^{\#} \in P(\Pi_\alpha, \Gamma)$ (и это неявно использовано в [2, 3]).

Для $\rho \in P(\Pi_\alpha)$ обозначим

$$A_\alpha(\rho) := V(\rho^2, \Pi_{0,\alpha}).$$

Если метрика $\rho \in P(\Pi_\alpha, \Gamma_{i,\alpha})$ экстремальна для $\Gamma_{i,\alpha}$, то $\tilde{\rho}^{\#}$ также экстремальна для $\Gamma_{i,\alpha}$ и ρ почти всюду в Π_α равна $\tilde{\rho}^{\#}$.

Как показано в [2, 3], в R^2 существует (единственная) функция ρ, не зависящая от y и четная по x, сужение h которой на промежуток $[0, +\infty)$ оси x удовлетворяет условиям $h \in C_1$, $h > 0$, $h' \leq 0$, $h(0) = (2\beta)^{-1}$ и уравнению

$$\int_0^x \frac{h^2(t)\, dt}{\sqrt{h^2(t) - h^2(x)}} = \frac{1}{2} \quad (x > 0),$$

причем $h'(x) < 0 \;\forall\, x > 0$, $h(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. До конца данного пункта под ρ понимается именно эта функция, а ее сужение на Π_α обозначается также через ρ_α. В [2, 3] показано, что при конечном α метрика

$$\rho_{\alpha,\beta} := \max\left\{\rho_\alpha, \left.\frac{1}{4\beta}\right|_{\Pi_\alpha}\right\}$$

экстремальна для $\Gamma_{0,\alpha}$, и тем самым впервые была решена проблема, которую поставил и пытался решить Пью в 1952 г. [1]. Как было отмечено в работе [5], в [1] были найдены конформный модуль и экстремальная метрика для семейства

$\Gamma_{1,\alpha}$ (а не для $\Gamma_{0,\alpha}$, как предполагалось в указанной работе). Тот факт, что при $\rho(\alpha)<(4\beta)^{-1}$ метрика $\rho_{\alpha,\beta}$ минимальна для $\Gamma_{0,\alpha}$, был установлен в [2, 3] на основании следующей цепочки соотношений, справедливой для любой метрики g, допустимой для $\Gamma_{0,\alpha}$:

$$A_\alpha(g) \geq A_\alpha(\tilde{g}^\#) = A_\nu(\tilde{g}^\#)+4\beta\int_\nu^\alpha(\tilde{g}^\#)^2\,dx \geq$$

$$\geq A_\nu(\rho)+4\beta\int_\nu^\alpha(4\beta)^{-2}\,dx = A_\alpha(\rho_{\alpha,\beta}),$$

где $\nu>0$ — (единственное) решение уравнения $\rho(\nu)=(4\beta)^{-1}$. (Заметим, что в [2, 3] (соотношения (29)) указанная цепочка соотношений содержит очевидную элементарную погрешность: в качестве числового коэффициента перед интегралами фигурирует 8 вместо 4.)

Для целого k через γ^k обозначим k-ю степень жордановой петли $\gamma^1\subset\Pi_\alpha$, определяемой уравнением $x\equiv 0$, через $\Gamma_{1,\alpha}^k$ — семейство всех петель $\gamma\subset\Pi_\alpha$, гомотопных γ^k или γ^{-k}. Легко видеть, что $\Gamma_{1,\alpha}^1=\Gamma_{1,\alpha}$, $\Gamma_{0,\alpha}=\bigcup_{k=1}^\infty\Gamma_{1,\alpha}^k$. Обозначим $T_{s,m}:=\Gamma_{1,\alpha}^{2s-1}\cup\Gamma_{1,\alpha}^{2m}$ для любых натуральных s и m.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Верна формула*

$$M(\Gamma_{0,\alpha}) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-4\beta^2\rho^2(\nu)}+\frac{\alpha-\nu}{4\beta},$$

где ν *— максимальное из тех* $x\in(0,\alpha]$, *для которых* $\rho(x)\geq(4\beta)^{-1}$, *а при конечном* α *метрика* $\rho_{\alpha,\beta}$ *экстремальна для* $\Gamma_{0,\alpha}$.

Введем обозначения:

$$\rho_{(\alpha,2)}(x,y):=\frac{1}{4\beta}\quad\forall\,(x,y)\in\Pi_\alpha,$$

$$\nu:=\min\left\{\alpha,\ \frac{2\beta}{\pi}\log\left(2+\sqrt{3}\right)\right\},$$

$$\rho_{(\alpha)}(x,y):=\begin{cases}\rho_\alpha(x,y) & \text{при } |x|<\nu,\\ \rho_{(\alpha,2)}(x,y) & \text{при } \nu\leq|x|<\alpha\end{cases}$$

и для натуральных s и m:

$$\rho_{(\alpha,2m)}(x,y):=\frac{1}{4m\beta}\quad\forall\,(x,y)\in\Pi_\alpha,$$

$$\rho_{(\alpha,2s-1)}(x,y):=\frac{1}{2s-1}\rho_\alpha\left(\frac{|x|}{2s-1},y\right)\quad\forall\,(x,y)\in\Pi_\alpha,$$

$$\rho_{\alpha,s,m}:=\max\left\{\rho_{(\alpha,2m)},\ \rho_{(\alpha,2s-1)}\right\},$$

$$\lambda(s,m):=\frac{2\beta(2s-1)}{\pi}\log\left(\frac{2m}{2s-1}+\sqrt{\left(\frac{2m}{2s-1}\right)^2-1}\right).$$

Ниже th и ch обозначают гиперболические тангенс и косинус соответственно.

Теорема 2. *Справедливы формулы*

$$M(\Gamma_{1,\alpha}) = M(\Gamma_{2,\alpha}) = \frac{2}{\pi}\operatorname{th}\frac{\pi\alpha}{2\beta},$$

$$M(\Gamma_{0,\alpha}) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{th}\,\frac{\pi\nu}{2\beta} + \frac{\alpha-\nu}{4\beta}.$$

При натуральных s и m верны соотношения

$$M(\Gamma_{1,\alpha}^{2m}) = \frac{\alpha}{4m^2\beta},$$

$$M(\Gamma_{1,\alpha}^{2s-1}) = \frac{2}{\pi(2s-1)}\,\mathrm{th}\,\frac{\pi\alpha}{2\beta(2s-1)},$$

$$M(\mathrm{T}_{s,m}) = \frac{\alpha}{4m^2\beta} \quad \textit{при } m<s,$$

$$M(\mathrm{T}_{s,m}) = \frac{2}{\pi(2s-1)}\,\mathrm{th}\,\frac{\pi\alpha}{2\beta(2s-1)} \quad \textit{при } m\ge s,\ \alpha\le\lambda(s,m),$$

$$M(\mathrm{T}_{s,m}) = \frac{2}{\pi(2s-1)}\sqrt{1-\left(\frac{2s-1}{2m}\right)^2} + \frac{\alpha-\lambda(s,m)}{4m^2\beta} \quad \textit{при } m\ge s,\ \alpha\ge\lambda(s,m).$$

При этом $\rho_{(\alpha)} = \rho_{\alpha,\beta}$ *и*

$$\rho_\alpha(x,y) = \left(2\beta\, ch\,\frac{\pi|x|}{2\beta}\right)^{-1} \quad \forall\,(x,y)\in\Pi_\alpha.$$

При конечном α следующие метрики экстремальны для соответствующих семейств: метрика ρ_α — для $\Gamma_{1,\alpha}$ и $\Gamma_{2,\alpha}$, метрика $\rho_{(\alpha,2)}$ — для $\Gamma_{1,\alpha}^2$, метрика $\rho_{(\alpha)} = \rho_{\alpha,\beta}$ — для $\Gamma_{0,\alpha}$, а для натуральных s и m метрика $\rho_{(\alpha,2m)}$ экстремальна для $\Gamma_{1,\alpha}^{2m}$ и $\mathrm{T}_{s,m}$ при $m<s$, метрика $\rho_{(\alpha,2s-1)}$ — для $\Gamma_{1,\alpha}^{2s-1}$ и $\mathrm{T}_{s,m}$ при совокупности условий $m\ge s$ и $\rho_{(\alpha,2m)}(\alpha,\cdot)\le$ $\le\rho_{(\alpha,2s-1)}(\alpha,\cdot)$, а метрика $\rho_{\alpha,s,m}$ экстремальна для $\mathrm{T}_{s,m}$ при совокупности условий $m\ge s$ и $\rho_{(\alpha,2m)}(\alpha,\cdot) > \rho_{(\alpha,2s-1)}(\alpha,\cdot)$. Экстремальная метрика и модуль семейства $\mathrm{T}_{s,m}$ не изменятся, если к последнему прибавить любое число семейств $\Gamma_{1,\alpha}^{2k-1}$ и (или) $\Gamma_{1,\alpha}^{2n}$ с $k>s$, $n>m$.

Приведенные формулировки устраняют погрешности в формулах для $M(\Gamma_{0,\alpha})$ и $M(\mathrm{T}_{s,m})$, которые в [2, 3] были допущены в результате механической ошибки в опущенном там элементарном вычислении, основанном на правильно найденных в этих работах экстремальных метриках $\rho_{\alpha,\beta}$ и $\rho_{\alpha,s,m}$. Эти погрешности были обнаружены автором в 1992 г.

2. Весовые l-модули. Введем понятие весового l-модуля семейства Γ, придерживаясь условий, принятых во введении. Пусть $l>0$ и в $\mathcal{D}$ задана измеримая функция $h\ge 0$. Величину

$$M_l(\Gamma,h) := \inf\left\{V(\rho^l h,\ \mathcal{D}) : \rho\in P(\mathcal{D},\Gamma)\right\}$$

условимся называть *весовым (с весом h) l-модулем семейства* Γ, а функцию $\rho_0\in P(\mathcal{D},\Gamma)$, для которой

$$V(\rho_0^l h,\ \mathcal{D}) = M_l(\Gamma,h) < +\infty,$$

— экстремальной метрикой для $M_l(\Gamma,h)$.

С помощью неравенства Гельдера легко проверяется следующее утверждение.

Лемма. *Пусть* $k > 0$, $\rho_0 \geq 0$ — *измеримая в* $\mathcal{D}$ *функция и*

$$M_k(\Gamma, \rho_0^{n-k}) \geq V(\rho_0^n, \mathcal{D}).$$

Тогда при любом $l \geq k$ *верно*

$$M_l(\Gamma, \rho_0^{n-l}) \geq V(\rho_0^n, \mathcal{D}).$$

Если к тому же $\rho_0 \in P(\mathcal{D}, \Gamma)$, *то*

$$M_l(\Gamma, \rho_0^{n-l}) = V(\rho_0^n, \mathcal{D}) \quad \forall\, l \geq k,$$

а при $k \leq n$ *верно также* $M(\Gamma) = V(\rho_0^n, \mathcal{D})$.

Теперь перейдем к условиям и обозначениям п. 1 с функцией $\rho := \rho_\alpha$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* $l \geq 1$. *Тогда*

$$M_l(\Gamma_{1,\alpha}, \rho^{2-l}) = V(\rho^2, \Pi_\alpha) = M(\Gamma_{1,\alpha}), \tag{3}$$

а при конечном α *метрика* ρ *экстремальна для* $M_l(\Gamma_{1,\alpha}, \rho^{2-l})$.

Доказательство. Для любой метрики $g \in P(\Pi_\alpha)$, удовлетворяющей условию $\tilde{g}^{\#} = g$, верно соотношение

$$\int_0^\alpha g\rho\, dx = -\frac{1}{j}\int_0^\alpha \left(\int_0^u \frac{g(x)\,\rho(x)\,dx}{\sqrt{\rho^2(x) - \rho^2(u)}} \right) d_u \sqrt{\rho^2(u) - \rho^2(\alpha)} \tag{4}$$

и потому

$$\int_0^\alpha \rho^2\, dx = \frac{1}{2j}\sqrt{\rho^2(0) - \rho^2(\alpha)} \tag{5}$$

(с постоянной $j = \pi/2$). В [2, 3] эти соотношения доказаны при дополнительном предположении, что g допустима для $\Gamma_{1,\alpha}$, но это дополнительное предположение не используется в упомянутом доказательстве и потому может быть опущено. Как показано в [2, 3], из (4) и (5) выводится оценка

$$\int_0^\alpha g\rho\, dx \geq \int_0^\alpha \rho^2\, dx, \tag{6}$$

откуда следует

$$V(g\rho, \Pi_\alpha) \geq V(\rho^2, \Pi_\alpha). \tag{7}$$

Пусть теперь g — произвольная метрика из $P(\Pi_\alpha, \Gamma_{1,\alpha})$. Тогда на основании (2) и (7) имеем

$$V(g\rho, \Pi_\alpha) \geq V(\tilde{g}^{\#}\rho, \Pi_\alpha) \geq V(\rho^2, \Pi_\alpha).$$

Следовательно,

$$V(g\rho, \Pi_\alpha) \geq V(\rho^2, \Pi_\alpha) \quad \forall\, g \in P(\Pi_\alpha, \Gamma_{1,\alpha}), \tag{8}$$

$$M_1(\Gamma_{1,\alpha}, \rho) \geq V(\rho^2, \Pi_\alpha).$$

А так как $\rho = \rho_\alpha \in P(\Pi_\alpha, \Gamma_{1,\alpha})$, то

$$M_1(\Gamma_{1,\alpha}, \rho) = V(\rho^2, \Pi_\alpha). \tag{9}$$

Теперь, использовав (8), применим лемму при $n = 2$, $k = 1 \leq l$.

В результате получим соотношение (3). Теорема 3 доказана.

Обобщением теорем 1 – 3 является следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $l \geq 1$. *Тогда справедливы соотношения*

$$M_l(\Gamma_{i,\alpha}, \rho_\alpha^{2-l}) = M(\Gamma_{i,\alpha}) \quad \forall\, i = 1, 2,$$

$$M_l(\Gamma_{1,\alpha}^2, \rho_{(\alpha,2)}^{2-l}) = M(\Gamma_{1,\alpha}^2),$$

$$M_l(\Gamma_{0,\alpha}, \rho_{(\alpha)}^{2-l}) = M(\Gamma_{0,\alpha}),$$

$$M_l(\Gamma_{1,\alpha}^k, \rho_{(\alpha,k)}^{2-l}) = M(\Gamma_{1,\alpha}^k) \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots,$$

$$M_l(\mathrm{T}_{s,m}, \rho_{\alpha,s,m}^{2-l}) = M(\mathrm{T}_{s,m}) \quad \forall\, s, m = 1, 2, \ldots,$$

а при конечном α *следующие метрики экстремальны для соответствующих семейств: метрика* ρ_α *— для* $M_l(\Gamma_{1,\alpha}, \rho_\alpha^{2-l})$ *и* $M_l(\Gamma_{2,\alpha}, \rho_\alpha^{2-l})$, *метрика* $\rho_{(\alpha,2)}$ *— для* $M_l(\Gamma_{1,\alpha}^2, \rho_{(\alpha,2)}^{2-l})$, *метрика* $\rho_{(\alpha)}$ *— для* $M_l(\Gamma_{0,\alpha}, \rho_{(\alpha)}^{2-l})$, *метрика* $\rho_{(\alpha,k)}$ *— для* $M_l(\Gamma_{1,\alpha}^k, \rho_{(\alpha,k)}^{2-l})$, $k = 1, 2, \ldots$, *метрика* $\rho_{\alpha,s,m}$ *— для* $M_l(\mathrm{T}_{s,m}, \rho_{\alpha,s,m}^{2-l})$.

Доказательство. Пусть s — натуральное. Тогда метрика $\rho_{(\alpha,\,2s-1)}$ допустима для $\Gamma_{1,\alpha}^{2s-1}$. Поэтому для любой метрики $g \in P(\Pi_\alpha)$, удовлетворяющей условию $\tilde{g}^{\#} = g$, верны соотношения (4) – (7) с $\rho_{(\alpha,\,2s-1)}$ вместо ρ, а если к тому же $g \in P(\Pi_\alpha, \Gamma_{1,\alpha}^{2s-1})$, то аналогично выводу (8) получаем соотношение

$$V(g\rho_{(\alpha,\,2s-1)}, \Pi_\alpha) \geq V(\rho_{(\alpha,\,2s-1)}^2, \Pi_\alpha) \quad \forall\, g \in P(\Pi_\alpha, \Gamma_{1,\alpha}^{2s-1}). \tag{10}$$

Отсюда по аналогии с обоснованием формул (9) и (3) имеем

$$M_1(\Gamma_{1,\alpha}^{2s-1}, \rho_{(\alpha,\,2s-1)}) = V(\rho_{(\alpha,\,2s-1)}^2, \Pi_\alpha),$$

$$M_l(\Gamma_{1,\alpha}^{2s-1}, \rho_{(\alpha,\,2s-1)}^{2-l}) = V(\rho_{(\alpha,\,2s-1)}^2, \Pi_\alpha) = M(\Gamma_{1,\alpha}^{2s-1}) \tag{11}$$

с любым $l \geq 1$.

Пусть m — натуральное. Тогда метрика $\rho_{(\alpha,\,2m)}$ допустима для $\Gamma_{1,\alpha}^{2m}$. Поэтому для любой метрики g, допустимой для $\Gamma_{1,\alpha}^{2m}$, верны соотношения

$$V(g\rho_{(\alpha,\,2m)}, \Pi_\alpha) = \frac{1}{4m\beta} V(g, \Pi_\alpha) =$$

$$= \frac{1}{8m^2\beta} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} dx \int\limits_{-2m\beta}^{2m\beta} g(x,y)\,dy \geq \frac{\alpha}{4m^2\beta} = V(\rho_{(\alpha,\,2s-1)}^2, \Pi_\alpha).$$

Значит,

$$V(g\rho_{(\alpha,\,2m)}, \Pi_\alpha) \geq V(\rho^2(\alpha,\,2m), \Pi_\alpha) \quad \forall\, g \in P(\Pi_\alpha, \Gamma_{1,\alpha}^{2m}). \tag{12}$$

Из (12) по аналогии с выводом соотношений (9) и (3) получаем

$$M_1(\Gamma_{1,\alpha}^{2m}, \rho_{(\alpha,\,2m)}) = V(\rho_{(\alpha,\,2s-1)}^2, \Pi_\alpha),$$

$$M_l(\Gamma_{1,\alpha}^{2m}, \rho_{(\alpha,\,2m)}^{2-l}) = V(\rho_{(\alpha,\,2m)}^2, \Pi_\alpha) = M(\Gamma_{1,\alpha}^{2m}) \tag{13}$$

с любым $l \geq 1$.

Рассмотрим теперь семейство $\mathrm{T}_{s,m}$. Пусть сначала $m \geq s$ и $\rho_{(\alpha,\,2m)}(\alpha) > \rho_{(\alpha,\,2s-1)}(\alpha)$. Метрика $\rho_{\alpha,s,m}$ допустима для $\mathrm{T}_{s,m}$. При этом

$$\rho_{\alpha,s,m}(x,y) = \begin{cases} \rho_{(\alpha,\,2s-1)}(x,y) & \text{при } |x| \le \lambda; \\ \rho_{(\alpha,\,2m)}(x,y) & \text{при } |x| \ge \lambda, \end{cases}$$

где обозначено $\lambda := \lambda(s,m)$.

Пусть $g \in P(\Pi_\alpha, \mathrm{T}_{s,m})$. Тогда $g \in P(\Pi_\alpha, \Gamma_{1,\alpha}^{2s-1})$ и тем более $g\big|_{\Pi_\lambda} \in$ $\in P(\Pi_\lambda, \Gamma_{1,\lambda}^{2s-1})$. Кроме того, $\rho_{\alpha,s,m}\big|_{\Pi_\lambda} = \rho_{(\lambda,\,2s-1)}$. Поэтому из (10) следует

$$V(g\rho_{\alpha,s,m}, \Pi_\lambda) = V(g\rho_{(\lambda,\,2s-1)}, \Pi_\lambda) \ge$$

$$\ge V(\rho^2_{(\lambda,\,2s-1)}, \Pi_\lambda) = V(\rho^2{}_{\alpha,s,m}, \Pi_\lambda) \quad \forall\, g \in P(\Pi_\alpha, \mathrm{T}_{s,m}).$$

Таким образом,

$$V(g\rho_{\alpha,s,m}, \Pi_\lambda) \ge V(\rho^2{}_{\alpha,s,m}, \Pi_\lambda) \quad \forall\, g \in P(\Pi_\alpha, \mathrm{T}_{s,m}). \tag{14}$$

Так как $g \in P(\Pi_\alpha, \Gamma_{1,\alpha}^{2m})$ и $\rho_{\alpha,s,m} = \rho_{(\alpha,\,2m)}$ на $\Pi_\alpha \setminus \Pi_\lambda$, то

$$V(g\rho_{(\alpha,2m)}, \Pi_\alpha \setminus \Pi_\lambda) = \frac{1}{4m\beta} V(g, \Pi_\alpha \setminus \Pi_\lambda) =$$

$$= \frac{1}{8m^2\beta}\left(\int_{-\alpha}^{-\lambda} dx \int_{-2m\beta}^{2m\beta} g(x,y)\,dy + \int_{\lambda}^{\alpha} dx \int_{-2m\beta}^{2m\beta} g(x,y)\,dy \right) \ge$$

$$\ge \frac{\alpha-\lambda}{4m^2\beta} = V(\rho^2_{(\alpha,\,2m)}, \Pi_\alpha \setminus \Pi_\lambda).$$

Значит,

$$V(g\rho_{\alpha,s,m}, \Pi_\alpha \setminus \Pi_\lambda) \ge V(\rho^2{}_{\alpha,s,m}, \Pi_\alpha \setminus \Pi_\lambda) \quad \forall\, g \in P(\Pi_\alpha, \mathrm{T}_{s,m}). \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует

$$V(g\rho_{\alpha,s,m}, \Pi_\alpha) \ge V(\rho^2{}_{\alpha,s,m}, \Pi_\alpha) \quad \forall\, g \in P(\Pi_\alpha, \mathrm{T}_{s,m}). \tag{16}$$

Из (16) по аналогии с выводом соотношений (9) и (3) получаем

$$M_1(\mathrm{T}_{s,m}, \rho_{\alpha,s,m}) = V(\rho^2{}_{\alpha,s,m}, \Pi_\alpha),$$

$$M_l(\mathrm{T}_{s,m}, \rho^{2-l}_{\alpha,s,m}) = V(\rho^2{}_{\alpha,s,m}, \Pi_\alpha) = M(\mathrm{T}_{s,m}) \quad \forall\, l \ge 1. \tag{17}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $m \ge s$ и $\rho_{(\alpha,\,2m)}(\alpha,\cdot) \le \rho_{(\alpha,\,2s-1)}(\alpha,\cdot)$. Тогда в Π_α верно $\rho_{(\alpha,\,2m)} < \rho_{(\alpha,\,2s-1)} = \rho_{\alpha,s,m}$. Поэтому метрика $\rho_{(\alpha,\,2s-1)}$ допустима для $\Gamma_{1,\alpha}^{2m}$ и для $\mathrm{T}_{s,m}$, и следовательно, при $l \ge 1$ имеем

$$M_l(\mathrm{T}_{s,m}, \rho^{2-l}_{\alpha,s,m}) \le V(\rho^2{}_{\alpha,s,m}, \Pi_\alpha) = V(\rho^2_{(\alpha,\,2s-1)}, \Pi_\alpha). \tag{18}$$

С другой стороны, из соотношения $\Gamma_{1,\alpha}^{2s-1} \subset \mathrm{T}_{s,m}$ и (11) при $l \ge 1$ получаем

$$V(\rho^2_{(\alpha,\,2s-1)}, \Pi_\alpha) = M_l(\Gamma_{1,\alpha}^{2s-1}, \rho^{2-l}_{(\alpha,\,2s-1)}) \le$$

$$\le M_l(\mathrm{T}_{s,m}, \rho^{2-l}_{(\alpha,\,2s-1)}) = M_l(\mathrm{T}_{s,m}, \rho^{2-l}_{\alpha,s,m}). \tag{19}$$

Объединяя (18) и (19), снова выводим (17).

Рассмотрим случай, когда $m < s$. Тогда в Π_α верно $\rho_{(\alpha,\,2s-1)} < \rho_{(\alpha,\,2m)} =$ $= \rho_{\alpha,s,m}$. Поэтому метрика $\rho_{(\alpha,\,2m)}$ допустима для $\Gamma_{1,\alpha}^{2s-1}$ и для $\mathrm{T}_{s,m}$, и следовательно, при $l \ge 1$ имеем

$$M_l(\mathrm{T}_{s,m}, \rho^{2-l}_{\alpha,s,m}) \le V(\rho^2_{\alpha,s,m}, \Pi_\alpha) = V(\rho^2_{(\alpha,\,2m)}, \Pi_\alpha). \tag{20}$$

С другой стороны, из соотношения $\Gamma_{1,\alpha}^{2m} \subset \mathrm{T}_{s,m}$ и (13) при $l \geq 1$ получаем

$$V(\rho^2_{(\alpha,\,2m)}, \Pi_\alpha) = M_l(\Gamma^{2m}_{1,\alpha}, \rho^{2-l}_{(\alpha,\,2m)}) \leq$$
$$\leq M_l(\mathrm{T}_{s,m}, \rho^{2-l}_{(\alpha,\,2m)}) = M_l(\mathrm{T}_{s,m}, \rho^{2-l}_{\alpha,s,m}). \tag{21}$$

Объединяя (20) и (21), приходим к (17).

Таким образом, мы доказали, что во всех случаях верно (17).

Поскольку $\rho_{\alpha,s,m} \in P(\Pi_\alpha, \mathrm{T}_{s,m})$, то (17) означает, что при конечном α метрика $\rho_{\alpha,s,m}$ экстремальна для $M_l(\mathrm{T}_{s,m}, \rho^{2-l}_{\alpha,s,m})$, каково бы ни было $l \geq 1$. Теорема 4 доказана.

3. Пространственные задачи. Рассмотрим задачи об определении модулей и экстремальных метрик в трехмерном римановом многообразии, представляющем собой „скрученный" цилиндр.

Пусть r, φ, z — цилиндрические координаты в R^3, h и R — фиксированные числа, $0 < h < \infty$, $0 < R \leq \infty$, а D_0 — множество

$$D_0 := \{(r, \varphi, z) : 0 \leq r < R;\ 0 \leq \varphi < 2\pi;\ -h \leq z < h\}.$$

Отождествим каждую точку $(r, \varphi, -h) \in D_0$ с соответствующей точкой $(r, \varphi + \pi, h)$ и снабдим полученное множество D естественной топологией и локально евклидовой метрикой, унаследованной из R^3. Обозначим через Φ_0 семейство всех замкнутых, гомотопически нетривиальных кривых в D, а через Φ_1 $(\subset \Phi_0)$ — гомотопическое семейство, соответствующее базисному элементу фундаментальной группы риманова многообразия D.

В [4] рассматривалась следующая проблема.

Проблема P_0. *Найти (конформный) модуль $M(\Phi_0)$ семейства Φ_0 и экстремальную метрику ρ_{Φ_0} этого семейства.*

Эта проблема приводит к нелинейной системе, состоящей из нелинейных дифференциальных уравнений Эйлера – Лагранжа и нелинейного интегрального уравнения, которую не удалось проинтегрировать. Тем не менее, в [4] был установлен результат, считавшийся решением проблемы P_0. Это удалось сделать благодаря методу, разработанному вторым из авторов работы [4]. Им же в 1992 году было обнаружено, что результаты работы [4] на самом деле решают не проблему P_0, а аналогичную проблему для семейства Φ_1.

Проблема P_1. *Найти (конформный) модуль $M(\Phi_1)$ семейства Φ_1 и экстремальную метрику ρ_{Φ_1} этого семейства.*

Таким образом, в [4] применительно к семейству Φ_0 была повторена та же ошибка, которая в [1] была допущена относительно семейства $\Gamma_{0,\alpha}$ (см. п. 1 выше).

Положим

$$f(r) := \frac{1}{\sqrt{\pi^2 r^2 + 4h^2}} \quad \forall\, r \in [0, +\infty]$$

и обозначим через ν максимальное из тех $r \in (0, R]$, для которых $f(r) \geq$ $\geq (4h)^{-1}$. Очевидно, $\nu = \min\{R, 2h\sqrt{3}/\pi\}$.

Автором получен следующий результат, который дает решение проблемы P_0.

Теорема 5. *Справедлива формула*

$$M(\Phi_0) = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2h}{f(\nu)}\right) + \frac{\pi(R^2 - \nu^2)}{32h^2},$$

а при конечном R метрика

$$\rho_{\Phi_0}(r,\varphi,z) = \max\left\{f(r), \frac{1}{4h}\right\} \quad \forall\,(r,\varphi,z)\in D$$

экстремальна для семейства Φ_0.

В случае, когда $f(R)<(4h)^{-1}$, экстремальная метрика ρ_{Φ_0} в каждой точке целой поверхности $r\equiv\nu$ не является гладкой функцией класса гладкости C_1.

Автором найдены также модули и экстремальные метрики для каждого гомотопического класса из Φ_0 и для любого объединения таких гомотопических классов.

Аналогичные проблемы решены и для более общего случая, когда, исходя из D_0, вместо D рассматривается риманово многообразие, полученное фиксацией произвольного действительного θ и отождествлением каждой точки $(r,\varphi,-h)\in D_0$ с точкой $(r,\varphi+\theta,h)$. Решены также аналогичные проблемы для случая, когда ось $r\equiv 0$ не включена в указанные многообразия.

Результаты п. 1 и приведенные выше результаты п. 3 докладывались на Международной конференции по комплексному анализу в Тимишоаре (Румыния) 26 августа 1993 года.

Получено решение аналогичных задач для весовых l-модулей.

Для примера сформулируем следующие утверждения.

Теорема 6. *Пусть* $l\geq 1$ *и* $u:(r,\varphi,z)\mapsto t\geq 0$ *— заданная в* D *измеримая функция, не зависящая от* φ *и* z. *Тогда*

$$M_l(\Phi_1,u) = V(uf^l,D),$$

и если $V(uf^l,D)<+\infty$, *то* f *является экстремальной метрикой для* $M_l(\Phi_1,u)$.

Теорема 7. *Пусть* $l\geq 1$ *и* $u:(r,\varphi,z)\mapsto t\geq 0$ *— заданная в* D *измеримая функция, не зависящая от* φ *и* z, *а* ρ_{Φ_0} *— метрика из формулировки теоремы 5. Тогда*

$$M_l(\Phi_0,u) = V(u\rho^l_{\Phi_0},D) \quad \forall\, l\geq 1,$$

и если $V(u\rho^l_{\Phi_0},D)<+\infty$, *то* ρ_{Φ_0} *является экстремальной метрикой для* $M_l(\Phi_0,u)$.

Для примера отметим несколько фактов, на которых основано исследование экстремальных метрик и модулей для семейства Φ_1.

Семейство Φ_1 допустимо для метрики f. Доказательство этого принципиального факта приведено в [2, 3] и основано на методе, найденном автором в 1981 году.

Для любой метрики $\rho\in P(D,\Phi_1)$, не зависящей от φ и z, верно неравенство

$$\rho(r)\geq f(r) \quad \forall\, r\in[0,R). \tag{22}$$

Это видно из следующего простого рассуждения. Пусть γ — произвольная геодезическая из Φ_1, на которой $r=\mathrm{const}\geq 0$. Тогда длина γ равна $f(r)$ и потому

$$1 \leq \int_\gamma \rho\, ds = \rho(r)\int_\gamma ds = \frac{\rho(r)}{f(r)}.$$

При любых фиксированных $\theta, t\in\mathrm{R}$ семейство Φ_1 инвариантно относительно отображения $\varphi: D\to D$, определяемого следующими условиями. Пусть $\hat{D}$ есть универсальное накрывающее многообразия D, реализованное в виде бесконечного цилиндра

$$\{(r, \varphi, z) : 0 \le r < R\}$$

с проектированием $q : \hat{D} \to D$, сужение которого на D_0 определяет D. Определим отображение $\psi_{\theta,t} : \hat{D} \to \hat{D}$ с помощью соотношения

$$\psi_{\theta,t} : (r, \varphi, z) \mapsto (r, \varphi + \theta, z + t) \quad \forall\, (r, \varphi, z) \in \hat{D}.$$

Тогда существует (единственный) автоморфизм $\varphi_{\theta,t} : D \to D$, для которого в $\hat{D}$ выполняется соотношение $\varphi_{\theta,t} \circ q = q \circ \psi_{\theta,t}$.

Для любой измеримой в D функции $w \ge 0$ при любых $\theta, t \in \mathrm{R}$ величина $V(w \circ \varphi_{\theta,t}, D)$ не зависит от θ и t. Поэтому для каждой вероятностной меры μ с носителем на множестве

$$S := \{(\theta, t) : 0 \le \theta < 2\pi,\ -h \le t < h\}$$

в силу теоремы Фубини верно

$$V\Big(\int w \circ \varphi_{\theta,t}\, d\mu(\theta, t), D\Big) = \int V(w \circ \varphi_{\theta,t}, D)\, d\mu(\theta, t) = V(w, D).$$

К тому же

$$\Big(\int w \circ \varphi_{\theta,t}\, d\mu(\theta, t)\Big)^l \le \int \big(w \circ \varphi_{\theta,t}\big)^l\, d\mu(\theta, t) =$$

$$= \int w^l \circ \varphi_{\theta,t}\, d\mu(\theta, t) \quad \forall\, l \ge 1,$$

$$V\Big(\Big(\int w \circ \varphi_{\theta,t}\, d\mu(\theta, t)\Big)^l, D\Big) \le V\Big(\int w^l \circ \varphi_{\theta,t}\, d\mu(\theta, t), D\Big) =$$

$$= V(w^l, D) \quad \forall\, l \ge 1. \tag{23}$$

Пусть теперь мера μ распределена равномерно на S. Тогда функция $\overline{w} : D \to \mathrm{R}$, определяемая условием

$$\overline{w} : (r, \varphi, z) \mapsto \int w \circ \varphi_{\theta,t}(r, \varphi, z)\, d\mu(\theta, t),$$

не зависит от φ и z. Пусть $u : (r, \varphi, z) \mapsto t \ge 0$ — измеримая в D функция, не зависящая от φ и z, а $\rho \in P(D, \Phi_1)$. Тогда функция

$$\overline{\rho} := \int \rho \circ \varphi_{\theta,t}\, d\mu(\theta, t)$$

является допустимой для Φ_1 метрикой и не зависит от φ и z, а потому, применяя оценки вида (23) к функции $w := \rho u^{1/l}$, с учетом (22) получаем

$$V(u\rho^l, D) \ge V(u(\overline{\rho})^l, D) \ge V(uf^l, D) \quad \forall\, l \ge 1.$$

Отсюда следует справедливость теоремы 6.

Результаты данной работы опубликованы в виде препринта [6].

1. *Pu P. M.* Some inequalities in certain non–orientable Riemannian manifolds // Pacif. J. Math. – 1952. – **2.** – P. 55 – 71.
2. *Тамразов П. М.* Методы исследования экстремальных метрик и модулей семейств кривых в скрученном римановом многообразии. – Киев, 1988. – 33 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; №88.43).
3. *Тамразов П. М.* Методы исследования экстремальных метрик и модулей семейств кривых в „скрученном" римановом многообразии // Мат. сб. – 1992. – **183**, №3. – С. 55 – 75.
4. *Навоян В. Х., Тамразов П. М.* Модули семейств нестягиваемых петель в „скрученном" полнотории // Bull. Soc. sci. et lett. Łódź. – 1986. – **36**, №20. – P. 1 – 5.
5. *Blatter C.* Zur Riemannschen Geometrie im Grossen auf dem Mobiusband // Compos. math. – 1960. – **15**, №1. – S. 88 – 107.
6. *Тамразов П. М.* Модули и экстремальные метрики в скрученных римановых многообразиях // Модули неориентируемых и скрученных римановых многообразий. – Киев, 1997. – С. 1 – 25. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 97.9).

Получено 07.07.97