УДК 517.9

О. Ю. Теплінський (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧ ІЗ ШВИДКО ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ: ВИПАДОК КРАТНОГО СПЕКТРА

We suggest the method of construction of complete asymptotic expansions for eigenvalues and eigenfunctions of boundary-value spectral problems for differential equations with rapidly varying coefficients for the case of multiple spectrum of homogenizated problem. We demonstrate the effect of splitting of the multiple eigenvalues by using the concrete fourth-order problem.

Запропоновано метод побудови повних асимптотичних розкладів для власних значень і власних функцій крайових спектральних задач для звичайних диференціальних рівнянь із швидко змінними коефіцієнтами для випадку кратного спектра усередненої задачі. Ефект розщеплення кратних власних значень показано на прикладі конкретної задачі четвертого порядку.

У зв'язку з поширенням композитних матеріалів виникає необхідність розв'язувати асимптотично при $\varepsilon \to 0$ крайові спектральні задачі для рівнянь вигляду

$$\sum_{i=0}^{P} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}\left(a_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^i}{dx^i} y_\varepsilon(x)\right) = \lambda_\varepsilon \sum_{i=0}^{P-1} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}\left(b_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^i}{dx^i} y_\varepsilon(x)\right), \qquad x \in (0;\,1), \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$\mathrm{B}_j(y_\varepsilon) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2P, \tag{2}$$

де $P \in \mathbf{N}$; $\varepsilon^{-1} \in \mathbf{N}$; a_i, $0 \le i \le P$, та b_i, $0 \le i < P$, — гладкі 1-періодичні функції, причому $a_P > 0$, $a_i \ge 0$, $0 \le i < P$.

За задачею (1), (2) можна побудувати усереднену задачу із сталими коефіцієнтами [1], розв'язки якої $y_0(x)$, λ_0 є першими наближеннями до $y_\varepsilon(x)$, λ_ε. В роботі [2] описано метод знаходження повних асимптотичних розкладів для $y_\varepsilon(x)$, λ_ε за степенями ε при $\varepsilon \to 0$ *для випадку простого спектра усередненої задачі*. Випадок кратного спектра виявився значно складнішим і не був досліджений у загальному вигляді. В роботі [3] на коефіцієнти рівняння накладались умови симетрії, що призводило до нерозщеплення кратних власних значень. При підході, викладеному в [4] (див. також [5]), припускалось, навпаки, що розщеплення відбувається одразу (n-кратному λ_0 відповідають $\lambda_\varepsilon^{(i)} = \lambda_0 + \varepsilon\mu_i + O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$, всі μ_i різні, $1 \le i \le n$).

У даній статті пропонується спосіб побудови шуканих розкладів без накладання будь-яких додаткових умов, що поєднує в собі описані вище підходи. На конкретній задачі при $P = 2$ прослідковуються різні можливості щодо розщеплення кратних власних значень. Основне допоміжне твердження доводиться для загальної задачі (1), (2).

Використаємо підстановку

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \sum_{n=0}^{k} \sum_{s=0}^{k-n} N_{k-n,s}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_n^{(s)}(x) \quad \text{для} \quad y_\varepsilon(x), \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \lambda_k \quad \text{для} \quad \lambda_\varepsilon, \tag{4}$$

де $N_{p,s}$, $0 \le s \le p$, — 1-періодичні гладкі функції *швидкої* змінної $\xi = (x/\varepsilon) \in$

* Виконана при частковій фінансовій підтримці міжнародного фонду „Відродження" (програма ISSEP, грант GSU051186).

$\in \mathbf{R}$; v_i, $i \ge 0$, — гладкі функції *повільної* змінної $x \in [0; 1]$; λ_i, $i \ge 0$, — дійсні числа (всі вони визначатимуться нижче). Правий верхній індекс у дужках біля функцій означає диференціювання, без дужок — власне індекс.

Підставивши формально ряди (3), (4) в рівняння (1), одержимо

$$\sum_{k=-2P}^{+\infty} \varepsilon^k \sum_{n=0}^{k+2P} \sum_{s=0}^{k+2P-n} \left(\mathbf{M}_{2P}^P N_{k-n+2P,s}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + h_{k-n+2P,s}^*\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) v_n^{(s)}(x) = 0, \quad x \in (0; 1), \tag{5}$$

де

$$h_{p,s}^* = \sum_{l=0}^{2P-1} \mathbf{M}_l^P N_{p-2P+l,s-2P+l} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{2i} \left(\mathbf{M}_l^i N_{P-2P+l,s-2i+l} - \sum_{t=s-2i}^{p-2P} \lambda_{p-2P-t} \mathbf{W}_l^i N_{t+l,s-2i+l} \right), \qquad 0 \le s \le p, \tag{6}$$

$$\mathbf{M}_l^i N = \sum_{t=\max\{0,i-l\}}^{\min\{i,2i-l\}} (-1)^i C_i^{l-i+t} C_i^{i-t} \left(a_i N^{(l-i+t)} \right)^{(i-t)}, \qquad 0 \le i \le N, \quad 0 \le l \le 2i, \tag{7}$$

$$\mathbf{W}_l^i N = \sum_{t=\max\{0,i-l\}}^{\min\{i,2i-l\}} (-1)^i C_i^{l-i+t} C_i^{i-t} \left(b_i N^{(l-i+t)} \right)^{(i-t)}, \qquad 0 \le i < N, \quad 0 \le l \le 2i, \tag{8}$$

$C_m^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ — біноміальні коефіцієнти. Тут і далі в сумах доданки, що не були означені чи не мають сенсу (як $N_{p,s}$ при $p < s$ чи $\sum_{n=n_1}^{n_2}$ при $n_1 > n_2$), вважаються нулями. Будемо використовувати позначення $\langle f \rangle = \int_0^1 f(\xi)\, d\xi$.

Визначимо 1-періодичні функції $N_{p,s}$ за рекурентною формулою

$$\mathbf{M}_{2P}^P N_{p,s}(\xi) \equiv (-1)^P \left(a_P N_{p,s}^{(P)}(\xi) \right)^{(P)} = h_{p,s} - h_{p,s}^*(\xi), \qquad \xi \in \mathbf{R}, \tag{9}$$

$$h_{p,s} = \langle h_{p,s}^* \rangle, \qquad 0 \le s \le p.$$

Легко переконатись, що рівняння вигляду (9) має 1-періодичний розв'язок, що визначається з точністю до сталого доданка. Ці сталі оберемо таким чином, щоб $\langle N_{p,s} \rangle = 0$ при $p > 0$, $0 \le s \le p$, і $\langle N_{0,0} \rangle = 1$. Зауважимо, що $N_{p,s}$ і $h_{p,s}$ містять невідомі λ_i, $i \ge 0$.

Твердження 1.

1.1. $N_{0,0}(\xi) = 1$, $\xi \in \mathbf{R}$.

1.2. $N_{p,s}(\xi) = 0$, $\xi \in \mathbf{R}$, *при* $p < P$ *та при* $s < P, p = P$.

1.3. $h_{p,s} = 0$ *при* $0 \le p < 2P$.

1.4. $h_{2P,s} = 0$ *при непарному* s, $h_{2P,2i} = (-1)^i \left(\hat{a}_i - \lambda_0 \hat{b}_i \right)$, *де* $\hat{a}_i = \langle a_i \rangle$, $\hat{b}_i = \langle b_i \rangle$, $0 \le i < P$, $h_{2P,2P} = (-1)^P \hat{a}_P$, *де* $\hat{a}_P = \left\langle a_P^{-1} \right\rangle^{-1}$.

1.5. *Для довільного* $p \ge 0$ *можна записати* $h_{p+2P,2i} = h_{p+2P,2i}^0 - (-1)^i \lambda_p \hat{b}_i$ *для* $0 \le i < P$, *та* $h_{p+2P,s} = h_{p+2P,s}^0$ *для* $s \notin \{0, 2, \ldots, 2P-2\}$, *де* $h_{p+2P,s}^0$ *не залежить від* $\lambda_k, k \ge p$, *для всіх* $0 \le s \le p + 2P$.

При доведенні використовуються означення (6), (9): твердження 1.1 очевидне; твердження 1.2 випливає з 1.1 і того, що $\mathbf{M}_l^i 1 = \mathbf{W}_l^i 1 = 0$ при $l > i$; твердження 1.3 випливає з 1.2 і того, що $\left\langle \mathbf{M}_l^i N \right\rangle = \left\langle \mathbf{W}_l^i N \right\rangle = 0$ при $l > i$ для довільної гладкої 1-періодичної функції N; твердження 1.4 та 1.5 доводяться аналогічно твердженню 1.3, для $\hat{a}_P$ враховується, що $a_P\left(N^{(P)}_{P,P}+1\right) = \mathrm{const}$, як це випливає з (6), (9) при $p = s = P$.

Прирівнявши до нуля члени степеневого ряду (5), одержимо систему рівнянь із сталими коефіцієнтами

$$\sum_{n=0}^{k} \mathbf{H}^P_{k-n} v_n = 0, \qquad k \ge 0, \tag{10}$$

де $\mathbf{H}^P_p u = \sum_{s=0}^{p+2P} h_{p+2P,s} u^{(s)}$, $p \ge 0$. Аналогічно з умов (2) отримуємо систему крайових умов

$$\mathbf{B}_{jk}(v_0, \ldots, v_k) = 0, \qquad j = 1, \ldots, 2P, \quad k \ge 0. \tag{11}$$

Перша з задач (10), (11) (для $k = 0$) і є усередненою.

Основна лема. *Коефіцієнти $h_{p,s} = 0$ при непарному s, $0 \le s \le p$.*

Занумеруємо елементи чотирикутної таблиці

$$A_{p,s} = \{ (m,n) \,|\, 0 \le n \le s,\ n \le m \le n + p - s \}$$

лінійно від 1 до $S = (s+1)(p-s+1)$ так, щоб

$$A_{p,s} = \{ (m_r, n_r) |\, 1 \le r \le S \},$$

причому $m_r + n_r \le m_{r+1} + n_{r+1}$ для всіх $1 \le r < S$ і $m_r + m_{\bar{r}} = p$, $n_r + n_{\bar{r}} = s$ для всіх $1 \le r \le S$, де $\bar{r} = S + 1 - r$ (зокрема, $(m_1, n_1) = (0, 0)$, $(m_S, n_S) = (p, s)$). Тепер одні й ті ж самі літери зможемо писати як з подвійним індексом (m_r, n_r) так і з одинарним індексом r (наприклад, $N_r = N_{m_r, n_r}$). Зараз опишемо процес із $S - 1$ кроків, на кожному з яких (на $(S-j)$-му, $S > j \ge 1$) буде отримано рівність вигляду

$$h_{p,s} = \sum_{r=1}^{j} \left\langle N_r f^r_j \right\rangle, \tag{12}$$

де f^r_j — 1-періодичні гладкі функції, причому

$$f^j_j = (-1)^{n_{\bar{j}}} h^*_{\bar{j}}. \tag{13}$$

На кожному кроці, $S - 1 \ge j \ge 2$, старший член у сумі (12) (мається на увазі $\left\langle N_j f^j_j \right\rangle$) буде розкладатись у суму, додаючи дещо до молодших. Так, при $j = 1$ в (12) залишиться лише один доданок, і ми за співвідношенням (13) отримаємо $h_{p,s} = (-1)^s h_{p,s}$, що й доведе лему. Формули

$$\left\langle N^1 \mathbf{M}^i_l N^2 \right\rangle = (-1)^l \left\langle N^2 \mathbf{M}^i_l N^1 \right\rangle; \qquad \left\langle N^1 \mathbf{W}^i_l N^2 \right\rangle = (-1)^l \left\langle N^2 \mathbf{W}^i_l N^1 \right\rangle,$$

виводяться з (7), (8) інтегруванням частинами для довільних гладких 1-періодичних функцій N^1, N^2, $0 \le i \le P$, $0 \le l \le 2i$. За ними

$$(-1)^{n_{\bar{j}}} \left\langle h^*_j N_{\bar{j}} \right\rangle = (-1)^{n_{\bar{j}}} \left\langle \sum_{l=0}^{2P-1} N_{m_j-2P+l,\, n_j-2P+l} (-1)^l \mathbf{M}^P_l N_{\bar{j}} + \right.$$

$$+ \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{2i} \left(N_{m_j-2P+l,\, n_j-2P+l} (-1)^l \mathbf{M}^P_l N_{\bar{j}} - \right.$$

$$\left. \left. - \sum_{t=n_j-2i}^{m_j-2P} N_{t+l,\, n_j-2i+l} (-1)^l \lambda_{m_j-2P-t} \mathbf{W}^i_l N_{\bar{j}} \right) \right\rangle \equiv \sum_{r=1}^{j-1} \left\langle N_r g^r_j \right\rangle, \qquad S \ge j \ge 1. \tag{14}$$

Цією рівністю ми означили набір гладких 1-періодичних функцій g^r_j, зібравши коефіцієнти при N_{m_r,n_r}, $1 \le r \le j-1$. Зокрема,

$$h_{p,s} = \left\langle h_S^* N_1 \right\rangle = \sum_{r=1}^{S-1} \left\langle N_r g_S^r \right\rangle,$$

тому (12) має місце на першому кроці, $f_{S-1}^r = g_S^r$. Якщо рівності (12) і (13) виконуються на $(S-j)$-му кроці, $S-1 \ge j \ge 2$, то

$$\left\langle N_j f_j^j \right\rangle = (-1)^{n_{\bar{j}}} \left\langle N_j h_{\bar{j}}^* \right\rangle = (-1)^{n_{\bar{j}}} \left\langle -N_j \mathbf{M}_{2P}^P N_{\bar{j}} \right\rangle =$$

$$= (-1)^{n_{\bar{j}}} \left\langle -N_{\bar{j}} \mathbf{M}_{2P}^P N_j \right\rangle = (-1)^{n_{\bar{j}}} \left\langle h_j^* N_{\bar{j}} \right\rangle = \sum_{r=1}^{j-1} \left\langle N_r g_j^r \right\rangle,$$

і ми одержуємо (12) для $j-1$, а саме

$$f_{j-1}^r = f_j^r + g_j^r, \qquad S-1 \ge j \ge 2, \quad 1 \le r \le j-1. \tag{15}$$

Як бачимо, g_j^r — це те, що додається в r-й член суми (12) при розкладі j-го члена (коли j-й член стає старшим).

Доведення буде завершено, коли ми покажемо, що

$$\sum_{i=j+1}^{S} g_i^j = (-1)^{n_{\bar{j}}} h_{\bar{j}}^*, \qquad S-1 \ge j \ge 1$$

(зліва стоїть f_j^j, як це випливає з (15)).

Функції g_i^j визначені рівністю (14), і з неї ми бачимо, що $g_i^j = 0$ при $n_j > n_i$, чи $m_j - n_j > m_i - n_i$, чи $m_j - n_j = m_i - n_i - 1$ (в ньому просто немає відповідних доданків з N_{m_j,n_j}), тому в іншій нумерації

$$f_j^j = \sum_{i=j+1}^{S} g_i^j = \sum_{n=1}^{n_{\bar{j}}} g_{m_j+n,n_{j+n}}^{m_j,n_j} + \sum_{n=0}^{n_{\bar{j}}} \sum_{m=2}^{m_{\bar{j}}-n_{\bar{j}}} g_{m_j+m+n,n_j+n}^{m_j,n_j}. \tag{16}$$

З рівності (14) знаходимо

$$g_{m_j+n,n_j+n}^{m_j,n_j} = (-1)^{n_{\bar{j}}} \mathbf{M}_{2P-n}^P N_{m_{\bar{j}}-n,n_{\bar{j}}-n},$$

$$g_{m_j+m+n,n_j+n}^{m_j,n_j} = -(-1)^{n_{\bar{j}}} \sum_{i=0}^{P-1} \lambda_{m+2i-2P} \mathbf{W}_{2i-n}^i N_{m_{\bar{j}}-m-n,n_{\bar{j}}-n} +$$

$$+ (-1)^{n_{\bar{j}}} \mathbf{M}_{2P-m-n}^{P-m/2} N_{m_{\bar{j}}-m-n,n_{\bar{j}}-n} \tag{17}$$

(звичайно ж, при $m/2 \notin \mathbf{N}$ останній доданок вважаємо нулем).

Підставивши формули (17) в (16), одержимо

$$f_j^j = (-1)^{n_{\bar{j}}} \left(\sum_{n=1}^{n_{\bar{j}}} \mathbf{M}_{2P-n}^P N_{m_{\bar{j}}-n,n_{\bar{j}}-n} + \sum_{n=0}^{n_{\bar{j}}} \sum_{m=2}^{m_{\bar{j}}-n_{\bar{j}}} \mathbf{M}_{2P-m-n}^{P-m/2} N_{m_{\bar{j}}-m-n,n_{\bar{j}}-n} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{n_{\bar{j}}} \sum_{m=2}^{m_{\bar{j}}-n_{\bar{j}}} \sum_{i=0}^{P-1} \lambda_{m+2i-2P} \mathbf{W}_{2i-n}^i N_{m_{\bar{j}}-m-n,n_{\bar{j}}-n} \right). \tag{18}$$

Замінимо в рівності (18) індекси підсумовування: в першій сумі введемо $l = 2P-n$; у другій — $i = P - m/2$, $l = 2P - m - n$; в третій — $l = 2i - n$, $t = m_{\bar{j}} - m - 2i$. Тоді будемо мати

$$f_j^j = (-1)^{n_{\bar{j}}} \Bigg(\sum_{l=2P-n_{\bar{j}}}^{2P-1} \mathbf{M}_l^P N_{m_{\bar{j}}-2P+l,\, n_{\bar{j}}-2P+l} +$$

$$+ \sum_{i=P-\left(m_{\bar{j}}-n_{\bar{j}}\right)/2}^{P-1} \; \sum_{l=2i-n_{\bar{j}}}^{2i} \mathbf{M}_l^i N_{m_{\bar{j}}-2P+l,\, n_{\bar{j}}-2i+l} -$$

$$- \sum_{i=0}^{P-1} \; \sum_{l=2i-n_{\bar{j}}}^{2i} \; \sum_{t=n_{\bar{j}}-2i}^{m_{\bar{j}}-2(i+1)} \lambda_{m_{\bar{j}}-2P-t}\, \mathbf{W}_l^i N_{t+l,\, n_{\bar{j}}-2i+l} \Bigg). \tag{19}$$

Залишається лише згадати формулу (6), щоб переконатись, що у правій частині (19) дійсно стоїть $(-1)^{n_{\bar{j}}} h^*_{m_{\bar{j}}, n_{\bar{j}}}$ (всі доданки, якими ці вирази нібито відрізняються, насправді дорівнюють нулю, бо $N_{m_{\bar{j}}-2P+l,\, n_{\bar{j}}-2P+l}$ при $l < 2P - n_{\bar{j}}$, $N_{m_{\bar{j}}-2P+l,\, n_{\bar{j}}-2i+l}$ при $l < 2i - n_{\bar{j}}$ чи $2i < 2P - \left(m_{\bar{j}} - n_{\bar{j}}\right)$, $N_{t+l,\, n_{\bar{j}}-2i+l}$ при $l < 2i - n_{\bar{j}}$, $\lambda_{m_{\bar{j}}-2P-t}$ при $t > m_{\bar{j}} - 2P$ не визначені). Лему доведено.

Наслідок. $\mathbf{H}_p^P u = \sum_{s=0}^{[p/2]+P} h_{p+2P,2s} u^{(2s)}$.

Розглянемо конкретну задачу:

$$\left(c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) y_\varepsilon''(x)\right)'' - \left(b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) y_\varepsilon'(x)\right)' + a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) y_\varepsilon(x) +$$

$$+ \lambda_\varepsilon \left(\left(\sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) y_\varepsilon'(x)\right)' - \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) y_\varepsilon(x) \right) = 0, \qquad x \in (0; 1), \tag{20}$$

$$y_\varepsilon(0) = y_\varepsilon(1) = y_\varepsilon'(0) = y_\varepsilon'(1) = 0, \tag{21}$$

де $c(\xi) > 0$, $b(\xi) \geq 0$, $a(\xi) \geq 0$ для всіх $\xi \in \mathbf{R}$; σ і ρ не рівні тотожно нулю одночасно. (Так описується амплітуда власних поперечних коливань балки з умовами жорсткого закріплення кінців [6].) Усереднена задача ((10), (11), $k = 0$) записується у вигляді

$$\mathbf{L} v_0 \equiv \hat{c} v_0'''' - \hat{b} v_0'' + \hat{a} v_0 + \lambda_0 \left(\hat{\sigma} v_0'' - \hat{\rho} v_0\right) = 0, \tag{22}$$

$$v_0(0) = v_0(1) = v_0'(0) = v_0'(1) = 0, \tag{23}$$

а k-та задача з системи (10), (11), $k \geq 1$, — у вигляді

$$\mathbf{L} v_k + \lambda_0 \left(\hat{\sigma} v_0'' - \hat{\rho} v_0\right) + \sum_{s=0}^{k+4} h_{k+4,s}^0 v_0^{(s)} + \sum_{n=1}^{k-1} \mathbf{H}_{k-n}^2 v_n \Big) = 0, \tag{24}$$

$$v_k(\theta) = -\sum_{n=0}^{k-1} \sum_{s=0}^{k-n} N_{k-n,s}(0) v_n^{(S)}(\theta),$$

$$v_k'(\theta) = -\sum_{n=0}^{k-1} \sum_{s=0}^{k-n+1} \left(N_{k-n,s-1}(0) + N'_{k-n+1,s}(0)\right) v_n^{(S)}(\theta), \qquad \theta = 0, 1. \tag{25}$$

Твердження 2. *При* $\hat{\sigma} = \hat{\rho} = 0$ *задача* (22), (23) *має лише тривіальний розв'язок. В інших випадках вона має зліченну кількість власних значень* λ_0 *одного знаку з* $\hat{\sigma}$ *(а якщо* $\hat{\sigma} = 0$, *то одного знаку з* $\hat{\rho}$*) і скінченну (чи нульову) кількість — протилежного знаку. При цьому відповідними власними функціями є лінійні комбінації функцій*

$$\cos a_1 x, \quad \sin a_1 x, \quad e^{a_2 x}, \quad e^{-a_2 x} \quad при \quad \lambda_0 \hat{\rho} > \hat{a},$$

$$\cos a_1 x, \quad \sin a_1 x, \quad x, \quad 1 \quad при \quad \lambda_0 \hat{\rho} = \hat{a},$$

$$\cos a_1 x, \quad \sin a_1 x, \quad \cos a_2 x, \quad \sin a_2 x \quad при \quad \lambda_0 \hat{\rho} < \hat{a},$$

де

$$a_1 = \sqrt{\left(\sqrt{D} + \lambda_0 \hat{\sigma} - \hat{b}\right)/2\hat{c}}; \quad a_2 = \sqrt{\left|\sqrt{D} - \lambda_0 \hat{\sigma} + \hat{b}\right|/2\hat{c}};$$

$$D = \left(\lambda_0 \hat{\sigma} - \hat{b}\right)^2 + 4\hat{c}\left(\lambda_0 \hat{\rho} - \hat{a}\right).$$

Всі власні значення однократні, можливо за виключенням скінченної кількості двократних, які з'являються, коли

$$\hat{\rho}\left(\hat{b} + \left(k_1^2 + k_2^2\right)\pi^2 \hat{c}\right) = \hat{\sigma}\left(\hat{a} - k_1^2 k_2^2 \pi^4 \hat{c}\right) \tag{26}$$

для деяких $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$, $(k_1 - k_2)/2 \in \mathbf{N}$. *При цьому двократним є* $\lambda_0 = \left(\hat{b} + \left(k_1^2 + k_2^2\right)\pi^2 \hat{c}\right)/\hat{\sigma}$, *йому відповідають власні функції* $\varphi_1(x) = k_2 \sin k_1 \pi x - k_1 \sin k_2 \pi x$, $\varphi_2(x) = \varphi_1'(x)$, $x \in [0; 1]$.

Теорема 1. *Нехай* $\lambda_0, v_0 \neq 0$ *— розв'язок задачі* (22), (23), *причому* λ_0 *— однократне. Тоді* (10), (11) *має розв'язок* $\{\lambda_k, k \geq 0\}$, $\{v_k, k \geq 0\}$.

Доведення. Розв'язуємо ці задачі послідовно. При вже визначених λ_i, v_i, $0 \leq i < k$, задача під номером $k \geq 1$ має вигляд

$$\mathbf{L} v_k + \lambda_k \left(\hat{\sigma} v_0'' - \hat{\rho} v_0\right) + f_k = 0, \tag{27}$$

$$v_k(0) = \alpha_k, \quad v_k(1) = \beta_k, \quad v_k'(0) = \gamma_k, \quad v_k'(1) = \delta_k, \tag{28}$$

де f_k — вже визначена функція; $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ — вже визначені дійсні числа.

Домножуючи (27) на v_0 та інтегруючи по $[0; 1]$ частинами з урахуванням (22) і (28), одержуємо

$$\lambda_k = \frac{\lambda_0 \left(\hat{c}\left(v_0''(1)\delta_k - v_0''(0)\gamma_k - v_0'''(1)\beta_k + v_0'''(0)\alpha_k\right) + \int_0^1 f_k v_0 \, dx\right)}{\int_0^1 \left(\hat{c}\left(v_0''\right)^2 + \hat{b}\left(v_0'\right)^2 + \hat{a} v_0^2\right) dx}, \tag{29}$$

що за теоремами Фредгольма є критерієм розв'язності задачі (27), (28); v_k визначається з точністю до доданка $C v_0$, $C \in \mathbf{R}$. Теорему доведено. Зауважимо, що $\lambda_1 = 0$ за формулою (29).

Перейдемо до кратного випадку (26). Для $k \geq 0$, $i \in \{1; 2\}$ покладемо $\overset{(i)}{\mu}_k = \lambda_0 \left\langle \varphi_i \overset{(i)}{\psi}_k \right\rangle / \left\langle \varphi_i \overset{(i)}{\psi}_0 \right\rangle$, де $\overset{(i)}{\psi}_k = \sum_{s=0}^{k+2} \overset{(i)}{h}{}^0_{2k+4,2s} \varphi_i^{(2s)}$, а $\overset{(i)}{h}{}^0_{2k+4,2s}$ — це $h^0_{2k+4,2s}$, обчислене при $\lambda_{2j} = \overset{(i)}{\mu}_j$, $\lambda_{2j+1} = 0$, $0 \leq j < k$.

Нехай $U = \{u \in C^\infty([0; 1]),\ \mathbf{L}u = 0\}$. Базисом в U є $\{\sin k_1 \pi x, \sin k_2 \pi x, \cos k_1 \pi x, \cos k_2 \pi x\}$.

Лема 1. *Якщо для деякого* $k \geq 0$ *маємо* $\lambda_{2j} = \overset{(1)}{\mu}_j = \overset{(2)}{\mu}_j$, $\lambda_{2j+1} = 0$ *для всіх* $0 \leq j \leq k$, *то* $\mathbf{H}_{2k}^2 u = \mathbf{H}_{2k+1}^2 u = 0$ *для довільного* $u \in U$.

Досить довести це для $u = \varphi_1$, оскільки набір $\left\{\varphi_1^{(s)},\ 0 \le s \le 3\right\}$ є базисом в U і $\mathbf{H}_p^2 u^{(s)} = \left(\mathbf{H}_p^2 u\right)^{(s)}$, $p \ge 0$, $s \ge 0$. Індукцією за p з (6) і (9) виводимо, що $N_{p,s} = 0$ при непарному $p+s$, $0 \le s \le p \le 2k+3$, тому $h_{2k+5,2s} = 0$ для всіх $0 \le$ $\le s \le k+2$ і $\mathbf{H}_{2k+1}^2 \varphi_1 = 0$, $\mathbf{H}_{2k}^2 \varphi_1 = \lambda_{2k}\left(\hat\sigma\varphi_1'' - \hat\rho\varphi_1\right) + \overset{(1)}{\psi}_k$ — лінійна комбінація φ_1 і φ_1''. Маємо

$$\left\langle\left(\mathbf{H}_{2k}^2 \varphi_1\right)\varphi_1\right\rangle = \left\langle\left(-\overset{(1)}{\psi}_0 \left\langle\varphi_1 \overset{(1)}{\psi}_k\right\rangle \Big/ \left\langle\varphi_1 \overset{(1)}{\psi}_0\right\rangle + \overset{(1)}{\psi}_k\right)\varphi_1\right\rangle = 0,$$

$$\left\langle\left(\mathbf{H}_{2k}^2 \varphi_1\right)\varphi_1''\right\rangle = -\left\langle\left(\mathbf{H}_{2k}^2 \varphi_1'\right)\varphi_1'\right\rangle = \left\langle\left(-\overset{(2)}{\psi}_0 \left\langle\varphi_2 \overset{(2)}{\psi}_k\right\rangle \Big/ \left\langle\varphi_2 \overset{(2)}{\psi}_0\right\rangle + \overset{(2)}{\psi}_k\right)\varphi_2\right\rangle = 0,$$

звідки і $\mathbf{H}_{2k}^2 \varphi_1 = 0$. Лему доведено.

Теорема 2. *Нехай має місце кратний випадок* (26).

1. *Якщо* $\overset{(1)}{\mu}_k = \overset{(2)}{\mu}_k$ *при всіх* $k \ge 0$, *то система* (10), (11) *має при* $\lambda_{2k} = \overset{(1)}{\mu}_k = \overset{(2)}{\mu}_k$, $\lambda_{2k+1} = 0$, $k \ge 0$, *розв'язки* $\{v_k,\ k \ge 0\}$, *де* $v_0 = \beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2$ *для довільних* $\beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R}$.

2. *Якщо* $\overset{(1)}{\mu}_K \ne \overset{(2)}{\mu}_K$ *і* $\overset{(1)}{\mu}_k = \overset{(2)}{\mu}_k$ *при* $0 \le k < K$, *то система* (10), (11) *при двох різних послідовностях* $\left\{\overset{(l)}{\lambda}_k,\ k \ge 0\right\}$, $l = 1, 2$, *де* $\overset{(1)}{\lambda}_{2k} = \overset{(2)}{\lambda}_{2k} = \overset{(1)}{\mu}_k = \overset{(2)}{\mu}_k$, $\overset{(1)}{\lambda}_{2k+1} = \overset{(2)}{\lambda}_{2k+1} = 0$ *при* $0 \le k < K$, $\overset{(l)}{\lambda}_{2K} = \overset{(l)}{\mu}_K$, *має розв'язки* $\left\{\overset{(l)}{v}_k,\ k \ge 0\right\}$, *де* $\overset{(l)}{v}_0 = \beta_l\varphi_l$, $\beta_l \in \mathbf{R}$ *довільне*, $l = 1, 2$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок 1. Нехай $\overset{(0)}{\omega}_j = \varphi_j$, а $\overset{(k)}{\omega}_j$ — функція з U, яка задовольняє крайові умови

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{\omega}_j(\theta) &= -\sum_{n=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{k-n} N_{k-n,s}(0)\,\overset{(n)}{\omega}{}_j^{(s)}(\theta), \\ \overset{(k)}{\omega}{}'_j(\theta) &= -\sum_{n=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{k-n+1}\left(N_{k-n,s-1}(0) + N'_{k-n+1,s}(0)\right)\overset{(k)}{\omega}{}_j^{(s)}(\theta), \qquad \theta = 0, 1 \end{aligned} \tag{30}$$

(вона існує, бо $\left\{\overset{(n)}{\omega}_j,\ 0 \le n < k\right\} \subset U$ і умови (30) мають вигляд $\overset{(n)}{\omega}_j(0) = \overset{(k)}{\omega}_j(1) =$ $= (-1)^{k_1} a$, $\overset{(k)}{\omega}{}'_j(0) = b$, $\overset{(k)}{\omega}{}'_j(1) = (-1)^{k_1} b$ для деяких $a, b \in \mathbf{R}$, звідки $\overset{(k)}{\omega}_j(x) =$ $= a\cos k_1\pi x + (b/k_1\pi)\sin k_1\pi x$, $x \in [0; 1]$). Тоді набір

$$v_k = \sum_{m=0}^{k}\sum_{j=1}^{2} \overset{(m)}{\beta}_j\, \overset{(k-m)}{\omega}_j, \qquad k \ge 0, \tag{31}$$

де $\left\{\overset{(m)}{\beta}_j,\ m \ge 0,\ 1 \le j \le 2\right\} \subset \mathbf{R}$ довільні, задовольняє (10), (11) (щоб у цьому переконатись, досить підставити (31) в (24), (25), врахувавши те, що $\mathbf{H}_p^2 v_k = 0$ для всіх $p \ge 0$, $k \ge 0$ за лемою 1).

Нехай має місце випадок 2. Визначимо $\left\{\overset{(k)}{\omega}_j,\ 0 \le k < 2K,\ 1 \le j \le 2\right\}$ так само, як і вище, тоді формула (31) дасть нам загальний вигляд розв'язку задач (10), (11) для $0 \le k < 2K$. За лемою 1 $\mathbf{H}_p^2 u = 0$ для всіх $u \in U$, $0 \le p < 2K$. Критерій розв'язності $2K$-ї задачі одержимо аналогічно до (29) в теоремі 1, домноживши (24) окремо на φ_1 і окремо на φ_2 та проінтегрувавши по $[0; 1]$ частинами з урахуванням (25):

$$\overset{(0)}{\beta}_j\left(\lambda_{2K}\left\langle\varphi_j \overset{(0)}{\psi}_j\right\rangle / \lambda_0 - \left\langle\varphi_j \overset{(k)}{\psi}_j\right\rangle\right) = 0, \quad j = 1, 2 \tag{32}$$

(ми врахували, що $uv|_0^1 = 0$ для довільних $u, v \in U$).

Система двох алгебраїчних рівнянь (32) має два варіанти розв'язку: $\lambda_{2K} = \overset{(j)}{\mu}_k$, $\overset{(0)}{\beta}_j \ne 0$ довільне, $\overset{(0)}{\beta}_{3-j} = 0$ (для $j = 1$ та $j = 2$). Залишається розв'язати решту задач (24), (25).

Припустимо, що для деякого $p \ge 0$ вдалося розв'язати їх до $(2K + p)$-ї у вигляді

$$v_k = \sum_{m=p+1}^{k} \sum_{j=1}^{2} \overset{(m)}{\beta}_j \overset{(k-m)}{\omega}_j + u_{k,p}, \quad 0 \le k \le 2K + p,$$

де $\{u_{k,p},\ 0 \le k \le 2K + p\}$ — визначені функції; $\{\overset{(m)}{\beta}_j,\ 1 + p \le m \le 2K + p,\ 1 \le j \le 2\}$ — довільні сталі. (Для $p = 0$ це припущення виконується: в j-му варіанті розв'язок $2K$-ї задачі при $\{\overset{(m)}{\beta}_j,\ 1 \le m < 2K,\ 1 \le j \le 2 = \{0\}\}$.)

Розглянемо задачу (24), (25), $k = 2K + p + 1$. Вона має вигляд

$$\mathbf{L}v_{2K+p+1} + \lambda_{2K+p+1}\left(\hat{\sigma}v_0'' - \hat{\rho}v_0\right) + \\ + \sum_{j=1}^{2} \overset{(p+1)}{\beta}_j\left(\lambda_{2K}\left(\hat{\sigma}\varphi_j'' - \hat{\rho}\varphi_j\right) + \overset{(j)}{\psi}_k\right) + g_{2K+p+1} = 0, \tag{33}$$

$$v_{2K+p+1}(\theta) = \sum_{m=1+p}^{2K+p} \sum_{j=1}^{2} \overset{(m)}{\beta}_j\left(-\sum_{n=m}^{2K+p} \sum_{s=0}^{2K+p+1-n} N_{2K+p+1-n,s}(0) \overset{(n-m)}{\omega}_j(\theta)\right) + \alpha^0_{2K+p+1}(\theta), \tag{34}$$

$$v'_{2K+p+1}(\theta) = \\ = \sum_{m=1+p}^{2K+p} \sum_{j=1}^{2} \overset{(m)}{\beta}_j\left(-\sum_{n=m}^{2K+p} \sum_{s=0}^{2K+p+2-n} \left(N_{2K+p+1-n,s-1}(0) + N'_{2K+p+2-n,s}(0)\right) \overset{(n-m)}{\omega}_j(\theta)\right) + \\ + \alpha^1_{2K+p+1}(\theta), \quad \theta = 0, 1,$$

де функція g_{2K+p+1} і числа $\alpha^\delta_{2K+p+1}(\theta)$ вже визначені, $\delta, \theta \in \{0; 1\}$.

Критерій розв'язності задачі такий:

$$\overset{(0)}{\beta}_j\left(\hat{c}\left(\alpha^1_{2K+p+1}\varphi_j''\Big|_0^1 - \alpha^0_{2K+p+1}\varphi_j'''\Big|_0^1\right) - \frac{\lambda_{2K+p+1}}{\lambda_0}\left\langle\varphi_j \overset{(j)}{\psi}_0\right\rangle\right) + \\ + \overset{(p+1)}{\beta}_j\left(-\frac{\lambda_{2K}}{\lambda_0}\left\langle\varphi_j \overset{(j)}{\psi}_0\right\rangle + \left\langle\varphi_j \overset{(j)}{\psi}_k\right\rangle\right) + \left\langle\varphi_j g_{2K+p+1}\right\rangle = 0, \quad j = 1, 2.$$

З цього критерію в j-му випадку ($j = 1$ чи $j = 2$) знаходимо

$$\lambda_{2K+p+1} = \lambda_0\left(\hat{c}\left(\alpha^1_{2K+p+1}\varphi_j''\Big|_0^1 - \alpha^0_{2K+p+1}\varphi_j'''\Big|_0^1\right) + \left\langle\varphi_j g_{2K+p+1}\right\rangle / \overset{(0)}{\beta}_j\right)\left\langle\varphi_j \overset{(j)}{\psi}_0\right\rangle,$$

де $\overset{(p+1)}{\beta}_j$ — довільне, $\overset{(p+1)}{\beta}_{3-j}$ — точно визначене.

Бачимо, що наше припущення виконується і для $p+1$ (маємо $u_{k,p+1} = u_{k,p}$ для $0 \le k \le p$; $u_{k,p+1} = u_{k,p} + \sum_{j=1}^{2} \overset{(p+1)}{\beta}_j \overset{(k-p-1)}{\omega_j}$ для $p < k \le 2K+p$; $u_{2K+p+1,p+1}$ — це розв'язок (33), (34) при $\{ \overset{(m)}{\beta}_j, p+2 \le m \le 2K+p, 1 \le j \le 2\} = \{0\}$).

Таким чином, система (10), (11) розв'язана за індукцією у кожному з двох варіантів. Теорему доведено.

***Приклад* 1.** При $c(\xi) = \mathrm{const}$, $b(\xi) - \lambda_0\sigma(\xi) = \mathrm{const}$, $\lambda_0\rho(\xi) - a(\xi) = \mathrm{const}$ має місце випадок 1 теореми 2.

***Приклад* 2.** При $c(\xi) = \mathrm{const}$, $b(\xi) - \lambda_0\sigma(\xi) \ne \mathrm{const}$ має місце випадок 2 теореми 2, $K = 1$.

Для обгрунтування розкладів запишемо задачу (20), (21) у вигляді $y_\varepsilon = \lambda_\varepsilon A_\varepsilon y_\varepsilon$. Тут A_ε — компактний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathring{W}_2^2$ [7], заданий рівністю

$$(A_\varepsilon u, v)_\varepsilon = \int_0^1 \left(\sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u'(x)v'(x) + \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u(x)v(x)\right)dx, \qquad u, v \in \mathring{W}_2^2,$$

де скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_\varepsilon$ в $\mathring{W}_2^2$:

$$(u, v)_\varepsilon = \int_0^1 \left(c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u''(x)v''(x) + b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u'(x)v'(x) + c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u(x)v(x)\right)dx.$$

Всі власні значення задачі (характеристичні числа оператора) з урахуванням кратності можна виписати в рядок:

$$\ldots \le \lambda_\varepsilon^{(-n)} \le \ldots \le \lambda_\varepsilon^{(-2)} \le \lambda_\varepsilon^{(-1)} < \lambda_\varepsilon^{(+1)} \le \lambda_\varepsilon^{(+2)} \le \ldots \le \lambda_\varepsilon^{(+n)} \le \ldots,$$

де $\lambda_\varepsilon^{(-1)} < 0 < \lambda_\varepsilon^{(+1)}$, всі вони скінченнократні та ізольовані в $\mathbf{R}$, кожного знаку не більш ніж зліченна кількість. Можна також довести, що їхня загальна кількість зліченна.

Для усередненої задачі можна все записати аналогічно, замінивши в індексах ε на 0, опустивши аргументи (x/ε) і поставивши знак $\hat{}$ над літерами c, b, a, σ, ρ.

Лема 2. *Власні значення* $\lambda_\varepsilon^{(k)} \to \lambda_0^{(k)}$ *при* $\varepsilon \to 0$ *для всіх* $|k| \in \mathbf{N}$, *для яких існує* $\lambda_0^{(k)}$.

Доведення цього твердження не наводимо (див. аналогічне в [3]).

Теорема 3. *Ряди* (3), (4), *побудовані відповідно до теорем* 1, 2, *дійсно є асимптотичними рядами для розв'язків задачі* (20), (21), *тобто для довільного* $m \ge 0$ *можна записати*

$$\left|\lambda_\varepsilon - \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \lambda_k\right| = O(\varepsilon^{m+1}), \qquad \varepsilon \to 0, \tag{35}$$

$$\max_{x\in[0;1]}\left|u_{\varepsilon,m} - \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \sum_{n=0}^{k} \sum_{s=0}^{k-n} N_{k-n,s}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_n^{(s)}\right| = O(\varepsilon^{m+1}), \qquad \varepsilon \to 0, \tag{36}$$

для різних випадків:

а) $\lambda_0 = \lambda_0^{(l)}$ *однократне:* $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^{(l)}$, $u_{\varepsilon,m}$ — *відповідна до* $\lambda_\varepsilon^{(l)}$ *власна функція задачі* (20), (21);

б) $\lambda_0 = \lambda_0^{(l)} = \lambda_\varepsilon^{(l+1)}$, *випадок* 1 *теореми* 2: $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^{(l)}$ *чи* $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^{(l+1)}$, $v_0 =$

$= C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$ *для довільних* $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$, $u_{\varepsilon,m}$ *— деяка лінійна комбінація власних функцій задачі* (20), (21), *що відповідають* $\lambda_\varepsilon^{(l)}$ *і* $\lambda_\varepsilon^{(l+1)}$;

в) $\lambda_0 = \lambda_0^{(l)} = \lambda_\varepsilon^{(l+1)}$, *випадок* 2 *теореми* 2, $l \in \{1, 2\}$: *в оцінці* (35) $\lambda_k = \overset{(l)}{\lambda}_k$, $k = 0, 1, \ldots$, $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^{(l)}$ *при* $\lambda_k = \min\left\{\overset{(1)}{\lambda}_k, \overset{(2)}{\lambda}_k\right\}$ *і* $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^{(l+1)}$ *при* $\lambda_k = \max\left\{\overset{(1)}{\lambda}_k, \overset{(2)}{\lambda}_k\right\}$, $v_0 = \overset{(l)}{v}_0$, $u_{\varepsilon,m}$ *— власна функція* (20), (21), *що відповідає* λ_ε.

Доведення. Позначимо через $\Lambda_{\varepsilon,m}$ суму в (35); через $R_{\varepsilon,m}$ суму в (36), де замість v_m стоїть довільна гладка функція (наприклад, многочлен) u_m, що задовольняє крайові умови

$$u_m(\theta) = -\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{m-n} N_{m-n,s}(0)v_n^{(S)}(\theta),$$

$$u_m'(\theta) = -\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{m-n} N_{m-n,s}(0)v_n^{(S+1)}(\theta), \qquad \theta = 0, 1.$$

За визначенням $N_{p,s}$ та v_k маємо $R_{\varepsilon,m} \in \mathring{W}_2^2$ для довільного $m \geq 0$ і

$$\left(c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)R''_{\varepsilon,m+4}(x)\right)'' - \left(b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)R'_{\varepsilon,m+4}(x)\right)' + a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)R_{\varepsilon,m+4}(x) +$$

$$+ \Lambda_{\varepsilon,m}\left(\left(\sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)R'_{\varepsilon,m+4}(x)\right)' - \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)R_{\varepsilon,m+4}(x)\right) = \varepsilon^{m+1}f_m(x,\varepsilon),$$

де функція f обмежена. Звідси $\|R_{\varepsilon,m+4} - \Lambda_{\varepsilon,m}A_\varepsilon R_{\varepsilon,m+4}\| = O(\varepsilon^{m+1})$, $\varepsilon \to 0$.

З останньої рівності твердження теореми виводиться за лемою Вішика – Люстерніка [8] з урахуванням леми 2 і теорем 1, 2.

Наслідок 1. *Якщо* $\lambda_0^{(l)} = \lambda_\varepsilon^{(l+1)}$ *і має місце умова* 1 *теореми* 2, *то* $\left|\lambda_\varepsilon^{(k)} - \lambda_\varepsilon^{(k+1)}\right| = O(\varepsilon^p)$, $\varepsilon \to 0$, *для довільного* $p \in \mathbf{N}$. *Якщо* $\lambda_0^{(k)}$ *однократне чи* $\lambda_0^{(l)} = \lambda_0^{(l+1)}$ *і має місце умова* 2 *теореми* 2, *то* $\lambda_\varepsilon^{(k)}$ *однократне при досить малих* ε.

Наслідок 2. *Має місце асимптотична оцінка* $\left|\lambda_\varepsilon^{(k)} - \lambda_0^{(k)}\right| = O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$, *для всіх* $|k| \in \mathbf{N}$, *для яких існує* $\lambda_0^{(k)}$.

Автор висловлює подяку Т. А. Мельнику за постановку задачі та постійну увагу до роботи.

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1981. – 352 с.
2. *Иосифьян Г. А., Олейник О. А., Шамаев А. С.* Асимптотические разложения собственных значений и собственных функций задачи Штурма – Лиувилля с быстро осциллирующими коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат.-мех. – 1985. – № 6. – С. 22–35.
3. *Мельник Т. А.* Спектральные задачи теории усреднения // Математика сегодня. – 1992. – Вып. 7. – С. 86–115.
4. *Назаров С. А.* Асимптотические разложения собственных чисел: Учеб. пособие. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 109 с.
5. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных операторов. 1 // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 3–80.
6. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 504 с.
7. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
8. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – **52**, № 5. – С. 3–122.

Одержано 08.04.96