УДК 517.929.4

Д. Я. Хусаинов, А. Т. Кожаметов (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ДО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА*

Control conditions are obtained for a linear system whose Lyapunov functions satisfy certain constraints.

Одержано умови керування для лінійної системи, функції Ляпунова якої задовольняють певні умови.

Многие прикладные задачи управления системами сводятся к задачам модального управления, т. е. к нахождению вектора параметров $c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ управления $u = c^T x$, при котором система

$$\dot{x} = Ax + bu, \qquad u = c^T x \tag{1}$$

будет иметь характеристическое уравнение с наперед заданным спектром, или, что то же самое, с наперед заданными коэффициентами характеристического уравнения [1–4].

Задача управления спектром полностью определяется условием управляемости Каллмана. Однако в ряде случаев спектр системы не достаточно адекватно определяет требуемое качество функционирования системы. Например, для системы

$$\dot{x} = -\lambda x_1 + a x_2, \quad \dot{x}_2 = -\lambda x_2, \quad \lambda > 0,$$

собственные числа равны $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda < 0$ при любых значениях параметра a. Однако если при $a = 0$ система „монотонно" устойчива, то при $a \neq 0$ монотонность начинает исчезать, а при $|a| > 2\lambda$ появляются „выбросы" абсолютной величины решения. Поэтому в ряде случаев хорошей характеристикой функционирования системы может быть степень монотонности стремления решений к нулевому положению равновесия. Эту характеристику можно оценивать с помощью функции Ляпунова [5–7].

Пусть для линейной системы (1) без управления, т. е. при $u = 0$, имеется функция Ляпунова квадратичного вида $V(x) = x^T H x$ с положительно определенной матрицей H такая, что

$$\dot{V}(x(t)) = -\gamma V(x(t)). \tag{2}$$

В этом случае траектории системы входят в семейство эллипсоидов $x^T H x = \alpha$, $0 < \alpha < +\infty$, причем скалярное произведение векторного поля системы с вектором нормали к поверхности уровня семейства эллипсоидов равно $-\gamma x^T H x$.

Рассмотрим систему управления (1). Требуется найти параметры управления $c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, при которых траектории замкнутой системы

$$\dot{x} = \left(A + bc^T\right)x \tag{3}$$

входят в заданный эллипс $x^T H x = \alpha$ таким образом, что скалярное произведение вектора внешней нормали к эллипсу на вектор скорости системы (1) удовлетворяет условию (2).

Определение 1. *Система* (1) *называется управляемой до заданной функции Ляпунова* $V(x) = x^T H x$ *с показателем* γ, *если существует вектор* c *такой, что полная производная* $V(x)$ *в силу замкнутой системы* (3) *удовлетворяет условию* (2).

Введем следующие обозначения:

* Выполнена при поддержке МНПП (грант № QSU 081217).

$$S = \left(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b\right), \quad H_1 = S^T H S, \quad H = \left\{h_{ij}^1\right\}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$R_1 = -\begin{bmatrix} 2h_{11}^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ h_{12}^1 & h_{11}^1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ h_{13}^1 & 0 & h_{11}^1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{1,n}^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & h_{1,1}^1 \end{bmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R_{n-1} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 2h_{1,n-1}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & h_{1,n}^1 & h_{1,n-1}^1 \end{bmatrix},$$

$$R_n = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2h_{1,n}^1 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\tilde{R}_1 = \begin{bmatrix} 2h_{11}^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -\gamma h_{11}^1 - h_{12}^1 - h_{21}^1 \\ h_{12}^1 & h_{11}^1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -\gamma h_{12}^1 - h_{13}^1 - h_{22}^1 \\ h_{13}^1 & 0 & h_{11}^1 & \ldots & 0 & 0 & -\gamma h_{13}^1 - h_{14}^1 - h_{23}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{1,n}^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & h_{11}^1 & -\gamma h_{1,n}^1 + \left(h_1^1\right)^T p - h_{2,n}^1 \end{bmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tilde{R}_{n-1} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 2h_{1,n-1}^1 & 0 & -\gamma h_{n-1,n-1}^1 - h_{n-1,n}^1 - h_{n,n-1}^1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & h_{1,n}^1 & h_{1,n-1}^1 & -\gamma h_{n-1,n}^1 + \left(h_{n-1}^1\right)^T p - h_{n,n}^1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{R}_n = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2h_{1,n}^1 & -\gamma h_{n,n}^1 + 2\left(h_n^1\right)^T p \end{bmatrix},$$

$$h^1 = \begin{bmatrix} h_{11}^1 \\ h_{12}^1 \\ \vdots \\ h_{1,n}^1 \\ h_{22}^1 \\ \vdots \\ h_{2,n}^1 \\ h_{n-1,n-1}^1 \\ h_{n-1,n}^1 \\ h_{n,n}^1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{h}^1 = \begin{bmatrix} h_{12}^1 + h_{21}^1 \\ \vdots \\ h_{1,n}^1 + h_{2,n-1}^1 \\ -\left(h_1^1\right)^T p + h_{2,n}^1 \\ h_{23}^1 + h_{32}^1 \\ \vdots \\ h_{2,n}^1 + h_{3,n-1}^1 \\ -\left(h_2^1\right)^T p + h_{3,n}^1 \\ \vdots \\ h_{n-1,n}^1 + h_{n,n-1}^1 \\ -\left(h_{n-1}^1\right)^T p + h_{n,n}^1 \\ -2\left(h_n^1\right)^T p \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{R}^T = \left(\tilde{R}_1^T, \tilde{R}_2^T, \ldots, \tilde{R}_n^T\right), \qquad R^T = \left(R_1^T, R_2^T, \ldots, R_n^T\right),$$

$$\left(h_i^1\right)^T = \left(h_{i,1}^1, h_{i,2}^1, \ldots, h_{i,n}^1\right), \qquad p^T = \left(p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1\right), \qquad i = \overline{1, n},$$

ρ_i — коэффициенты характеристического уравнения системы без управления, т. е.

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n.$$

Теорема 1. *Система* (1) *является управляемой до заданной функции Ляпунова* $V(x) = x^T H x$ *с показателем* γ *тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang} S = n, \qquad \operatorname{rang} \tilde{R}^T = n. \tag{5}$$

Доказательство. Если функция Ляпунова имеет фиксированный вид $V(x) = x^T H x$, то выполнение условия (2) означает, что требуется найти вектор $c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, при котором удовлетворяется матричное уравнение

$$\left(A + bc^T\right)^T H + H\left(A + bc^T\right) = -\gamma H. \tag{6}$$

Поскольку матричная система (6) распадается на $n(n+1)/2$ скалярных уравнений, а управлять можно n параметрами $c_1, c_2, \dots, c_n$, система переопределенная и в общем случае задача не решается. Получим ограничения на параметры системы, при которых задача имеет решение.

Пусть задана функция Ляпунова $V(x) = x^T H x$. Выполним замену переменных $x = Sy$, где $S = \left(b, Ab, A^2 b,, \dots, A^{n-1} b\right)$. Система (1) примет вид

$$\dot{y} = A_1 y + b_1 u,$$

где

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -p_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -p_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -p_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -p_1 \end{bmatrix}, \qquad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Функция Ляпунова будет иметь вид $V(y) = y^T H_1 y$, где $H_1 = S^T H S$. Управление ищем в виде $u = d^T y$, $d^T = (d_1, d_2, \dots, d_n)$. Тогда система примет вид

$$\dot{y} = (A_1 + b_1 d^T) y,$$

где

$$b_1 d^T = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Будем искать параметры управления $d_1, d_2, \dots, d_n$ таким образом, чтобы удовлетворялось матричное уравнение

$$(A_1 + b_1 d^T)^T H_1 + H_1 (A_1 + b_1 d^T) = -\gamma H_1,$$

т. е. чтобы выполнялось

$$d b_1^T H_1 + H_1 b_1 d^T = -\left(A_1 + \frac{1}{2}\gamma E\right)^T H_1 - H_1 \left(A_1 + \frac{1}{2}\gamma E\right).$$

Поскольку H_1 — заданная фиксированная матрица, то

$$\left(A_1+\frac{1}{2}\gamma E\right)^T H_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\gamma h^1_{11}+h^1_{12} & \frac{1}{2}\gamma h^1_{12}+h^1_{22} & \dots & \frac{1}{2}\gamma h^1_{1,n}+h^1_{2,n} \\ \frac{1}{2}\gamma h^1_{12}+h^1_{13} & \frac{1}{2}\gamma h^1_{22}+h^1_{23} & \dots & \frac{1}{2}\gamma h^1_{2,n}+h^1_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}\gamma h^1_{1,n-1}+h^1_{1,n} & \frac{1}{2}\gamma h^1_{2,n-1}+h^1_{2,n} & \dots & \frac{1}{2}\gamma h^1_{n-1,n}+h^1_{n,n} \\ \frac{1}{2}\gamma h^1_{1,n}+h^1_{1,n+1} & \frac{1}{2}\gamma h^1_{2,n}+h^1_{2,n+1} & \dots & \frac{1}{2}\gamma h^1_{n,n}+h^1_{n,n+1} \end{bmatrix},$$

где

$$h^1_{i,n+1} = -\left(h^1_i\right)^T p, \quad p^T = (p_n, p_{n-1}, \dots, p_1), \quad \left(h^1_i\right)^T = \left(h^1_{i,1}, h^1_{i,2}, \dots, h^1_{i,n}\right), \ i=\overline{1,n}.$$

Далее получаем

$$\left(A_1+\frac{1}{2}\gamma E\right)^T H_1 + H_1\left(A_1+\frac{1}{2}\gamma E\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma h^1_{11}+h^1_{12}+h^1_{21} & \gamma h^1_{12}+h^1_{13}+h^1_{22} & \dots & \gamma h^1_{1,n}+h^1_{1,n+1}+h^1_{2,n} \\ \gamma h^1_{21}+h^1_{22}+h^1_{31} & \gamma h^1_{22}+h^1_{23}+h^1_{32} & \dots & \gamma h^1_{2,n}+h^1_{2,n+1}+h^1_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma h^1_{n-1,1}+h^1_{n-1,2}+h^1_{n,1} & \gamma h^1_{n-1,2}+h^1_{n-1,3}+h^1_{n,2} & \dots & \gamma h^1_{n-1,n}+h^1_{n-1,n+1}+h^1_{n,n} \\ \gamma h^1_{n,1}+h^1_{n,2}+h^1_{n+1,1} & \gamma h^1_{n,2}+h^1_{n,3}+h^1_{n+1,2} & \dots & \gamma h^1_{n,n}+h^1_{n,n+1}+h^1_{n+1,n} \end{bmatrix},$$

или, вводя матрицу

$$H_2 = \left\{h^2_{i,j}\right\}, \quad i,j=\overline{1,n}, \quad h^2_{i,j} = h^1_{i+1,j}+h^1_{i,j+1}, \quad i,j=\overline{1,n},$$

где $h^1_{i,n+1} = -\left(h^1_i\right)^T p$, имеем

$$\left(A_1+\frac{1}{2}\gamma E\right)^T H_1 + H_1\left(A_1+\frac{1}{2}\gamma E\right) = \gamma H_1 + H_2.$$

Рассмотрим левую часть равенства

$$H_1 b_1 d^T = \begin{bmatrix} d_1 h^1_{11} & d_2 h^1_{11} & \dots & d_n h^1_{11} \\ d_1 h^1_{12} & d_2 h^1_{12} & \dots & d_n h^1_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1 h^1_{1,n} & d_2 h^1_{1,n} & \dots & d_n h^1_{1,n} \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$d b_1^T H_1 + H_1 b_1 d^T = \begin{bmatrix} 2d_1 h^1_{11} & d_1 h^1_{12}+d_2 h^1_{11} & \dots & d_1 h^1_{1,n}+d_n h^1_{11} \\ d_2 h^1_{11}+d_1 h^1_{12} & 2d_2 h^1_{12} & \dots & d_2 h^1_{1,n}+d_n h^1_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_n h^1_{11}+d_1 h^1_{1,n} & d_n h^1_{12}+d_2 h^1_{1,n} & \dots & d_n + 2d_n h^1_{1,n} \end{bmatrix}.$$

Приравняв в матричном уравнении (6) соответствующие элементы, получим систему $n(n+1)/2$ алгебраических уравнений с n неизвестными d_i, $i=\overline{1,n}$:

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
2h_{11}^{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
h_{12}^{1} & h_{11}^{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
h_{13}^{1} & 0 & h_{11}^{1} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
h_{1,n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{11}^{1} \\
\hline
0 & 2h_{12}^{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & h_{13}^{1} & h_{12}^{1} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & h_{1,n}^{1} & 0 & \cdots & 0 & h_{12}^{1} \\
\hline
 & & & \vdots & & \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 2h_{1,n-1}^{1} & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & h_{1,n} & h_{1,n-1}^{1} \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2h_{1,n}^{1}
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} =
$$

$$
= -\gamma \begin{bmatrix} h_{11}^{1} \\ h_{12}^{1} \\ \vdots \\ h_{1,n}^{1} \\ h_{22}^{1} \\ \vdots \\ h_{2,n}^{1} \\ \vdots \\ h_{n-1,n-1}^{1} \\ h_{n-1,n}^{1} \\ h_{n,n}^{1} \end{bmatrix}
- \begin{bmatrix} h_{12}^{1} + h_{21}^{1} \\ \vdots \\ h_{1,n}^{1} + h_{2,n-1}^{1} \\ -\left(h_{1}^{1}\right)^{T} p + h_{2,n}^{1} \\ h_{23}^{1} + h_{32}^{1} \\ \vdots \\ h_{2,n}^{1} + h_{3,n-1}^{1} \\ -\left(h_{2}^{1}\right)^{T} p + h_{3,n}^{1} \\ \vdots \\ h_{n-1,n}^{1} + h_{n,n-1}^{1} \\ -\left(h_{n-1}^{1}\right)^{T} p + h_{n,n}^{1} \\ -2\left(h_{n}^{1}\right)^{T} p \end{bmatrix},
$$

или с использованием обозначений (4)

$$
Rd = -\gamma\, h^{1} - \tilde{h}_{1}^{1}.
$$

Как следует из теоремы Кронекера – Капелли, для того чтобы система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг исходной матрицы был равен рангу расширенной матрицы. Поскольку $\det R_1 = 2\left(h_{11}^{1}\right)^{n} > 0$, то $\operatorname{rang} R = n$. Поэтому условие разрешимости системы имеет вид

$$
\operatorname{rang}\left[\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}, -\gamma\, h^{1} - \tilde{h}^{1}\right] = n,
$$

или (5). Окончательно функция управления имеет вид $u = c^{T} x$, где $c = (S^{1})^{T} d$.

Задача управления системой до заданной функции Ляпунова с фиксированной постоянной γ сводится к решению системы $n(n+1)/2$ линейных алгебраических уравнений с n неизвестными и решается в исключительных случаях.

Эту задачу можно ослабить и требовать управляемости до заданной функции Ляпунова с показателем не менее γ.

Определение 2. *Система* (1) *называется управляемой до заданной функции Ляпунова* $V(x) = x^T H x$ *с показателем не менее* γ, *если существует вектор* C *такой, что полная производная* $V(x)$ *в силу замкнутой системы* (3) *удовлетворяет условию*

$$\dot{V}(x(t)) < -\gamma V(x(t)). \tag{7}$$

Введем следующие обозначения:

$$H_3 = \left\{ h_{ij}^3 \right\}, \quad h_{ij}^3 = -\gamma h_{ij}^1 - h_{ij}^2, \quad i,j = \overline{1,n},$$

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} h_{11}^3 - 2d_1 h_{11}^1 & h_{12}^3 - d_1 h_{12}^1 - d_2 h_{11}^1 & \cdots & h_{1,i}^3 - d_1 h_{1,i}^1 - d_i h_{11}^1 \\ h_{21}^3 - d_2 h_{11}^1 - d_1 h_{12}^1 & h_{22}^3 - 2d_2 h_{12}^1 & \cdots & h_{2,i}^3 - d_2 h_{1,i}^1 - d_i h_{12}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{i,1}^3 - d_i h_{11}^1 - d_1 h_{1,i}^1 & h_{i,2}^3 - d_i h_{12}^1 - d_2 h_{1,i}^1 & \cdots & h_{i,i}^3 - 2d_i h_{1,i}^1 \end{bmatrix},$$

$$i = \overline{1,n}.$$

Теорема 2. *Система* (2) *является управляемой до заданной функции Ляпунова с показателем не менее* γ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang} S = n$ *и система неравенств*

$$\det\left[\Delta_i(d_1, d_2, \ldots, d_i)\right] > 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{8}$$

имеет непустое решение относительно переменных $d_i = [S^T c]_i$, $i = \overline{1,n}$, *где* $[S^T c]_i$ — i*-я компонента соответствующего вектора.*

Доказательство. Производя преобразование $x = Sy$, получаем, что для управляемости до заданной функции Ляпунова с показателем не менее γ требуется, чтобы матрица

$$-(A_1 + b_1 d^T) H_1 - H_1 (A_1 + b_1 d^T) - \gamma H_1$$

была положительно определенной, или, с использованием введенных обозначений, для управляемости требуется положительная определенность матрицы

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} h_{11}^3 - 2d_1 h_{11}^1 & h_{12}^3 - d_1 h_{12}^1 - d_2 h_{11}^1 & \cdots & h_{1,n}^3 - d_1 h_{1,n}^1 - d_n h_{11}^1 \\ h_{21}^3 - d_2 h_{11}^1 - d_1 h_{12}^1 & h_{22}^3 - 2d_2 h_{12}^1 & \cdots & h_{2,n}^3 - d_2 h_{1,n}^1 - d_n h_{12}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n,1}^3 - d_n h_{11}^1 - d_1 h_{1,n}^1 & h_{n,2}^3 - d_n h_{12}^1 - d_2 h_{1,n}^1 & \cdots & h_{n,n}^3 - 2d_n h_{1,n}^1 \end{bmatrix}.$$

Как следует из критерия Сильвестра, для положительной определенности симметричной матрицы необходимо и достаточно положительности главных диагональных миноров, т. е. выполнения условия

$$\det\left[\Delta_i(d_1, d_2, \ldots, d_i)\right] > 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Система неравенств (8) и определяет область устойчивости до заданной функции Ляпунова с показателем не менее γ.

Пример. Рассмотрим систему (1) вида

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти вектор $c^T = (c_1, c_2)$, при котором полная производная функции Ляпунова $v(x)=x^T x$ удовлетворяет уравнению (2) с наперед заданной величиной γ. Поскольку

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

то первое из условий (5) выполняется. Рассмотрим второе условие. Поскольку $H=E$, то $H_1 = S^T S$. Поэтому

$$H_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left(h_1^1\right)^T = (2,1), \quad \left(h_2^1\right)^T = (1,1).$$

Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^2 + 2\lambda - 1, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = -1, \quad p^T = (-1, 2).$$

Поэтому $h_{13}^1 = -(h_1^1)^T p = 0$, $h_{23}^1 = -(h_2^1)^T p = -1$. Далее матрицы $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ имеют вид

$$\tilde{R}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2\gamma-2 \\ 1 & 2 & -\gamma-1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{R}_2 = [\,0 \quad 2 \quad -\gamma+2\,].$$

Поэтому

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2\gamma-2 & -\gamma-1 & -\gamma+2 \end{bmatrix}, \quad \det \tilde{R} = -4\gamma + 20,$$

и второе из условий (5) выполняется лишь при $\gamma = 5$. При этом параметры вектора управления имеют вид $d_1 = -3$, $d_2 = -3/2$. Отсюда $c^T = (-3/2, -3/2)$.

Рассмотрим управляемость до функции Ляпунова $v(x) = x^T x$ с показателем не менее $\gamma = 4$.
Получаем

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} -10-4d_1 & -5-d_1-2d_2 \\ -5-d_1-2d_2 & -2-2d_2 \end{bmatrix},$$

и область управляемости в пространстве параметров d_1, d_2 имеет вид

$$d_1 < -5/2, \quad d_2 < -1, \quad 5 + 2d_1 < -(d_1 - 2d_2)^2.$$

Поскольку $d^T = c^T S$, область управляемости в пространстве параметров c_1, c_2 имеет вид

$$c_1 + c_2 < -5/2, \quad c_1 < -1, \quad 5 + 2(c_1 + c_2) < -(c_2 - c_1)^2.$$

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
2. *Красовский Н. Н.* О стабилизации динамических систем дополнительными силами // Дифференц. уравнения. – 1965. – **1**, №1. – С. 5 – 16.
3. *Wonhham W. M.* On pole assignment in multy-input controllable systems // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1967. – AG–12, №6. – P. 660 – 665.
4. *Новицький В. В.* Декомпозиція та керування в лінійних системах. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – Т. 11, – 148 с.
5. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
6. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
7. *Кунцевич В. М., Лычак М. М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

Получено 13.06.96