УДК 519.21

Д. В. Гусак (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО МОМЕНТ ПЕРШОЇ РУЙНАЦІЇ ДЛЯ МОДИФІКОВАНОГО ПРОЦЕСУ РИЗИКУ З МИТТЄВИМ ВІДБИТТЯМ

For a modified risk process with immediate down reflection, the relations are established for an integral transformation of its characteristic function and the corresponding transformation of limit distribution of the considered process under the conditions of ergodicity. The distribution is obtained for the first destruction moment of the introduced risk process.

Для модифікованого процесу ризику з миттєвим відбиттям вниз встановлюється співвідношення для інтегрального перетворення його характеристичної функції та відповідного перетворення граничного розподілу цього процесу в умовах ергодичності. Одержано розподіл моменту першої руйнації введеного модифікованого процесу ризику.

Граничні задачі для класичних процесів ризику і різні методи їх дослідження широко висвітлені в монографічній літературі (див. [1, 2]). Нехай

$$u(t) = u + \xi(t), \quad u > 0; \quad \xi(t) = ct - \chi(t), \quad c > 0, \tag{1}$$

— класичний процес ризику (к.п.р.), де $\chi(t)$ — пуассонівський процес з додатними стрибками та характеристичною функцією (х.ф.)

$$\mathrm{E}\, e^{i\alpha\chi(t)} = \exp\left\{t\lambda \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\, dF(x)\right\}, \quad \lambda > 0;$$

$\xi(t)$ — процес із знесенням $c > 0$ і кумулянтою

$$\psi(\alpha) = i\alpha c + \lambda \int_{-\infty}^{0} (e^{i\alpha x} - 1)\, dF(-x).$$

Як і в [3], пропонується модифікація к.п.р., пов'язана з миттєвим відбиттям на границі $B = u + v$ $(B > 0,\ v > 0)$ і відповідним розбиттям процесу $u(t)$ на дві компоненти:

$$u(t) = X_{B,u}(t) + \zeta_{B,u}(t), \qquad t \geq 0. \tag{2}$$

Одна з них $X_{B,u}(t)$ є стрибкоподібним процесом (не із сталими стрибками v, як в [1]) з додатними випадковими стрибками. Друга $-\zeta_{B,u}(t)$ є осцилюючим випадковим процесом (див. [4]) з миттєвим відбиттям вниз на границі $B > u$ і на відповідну величину стрибка процесу $X_{B,u}(t)$. Компоненту $\zeta_{B,u}(t)$ назвемо модифікованим процесом ризику (м.п.р.).

Для точного опису обох компонент $X_{B,u}(t)$ та $\zeta_{B,u}(t)$ введемо позначення деяких функціоналів основного процесу $\xi(t)$:

$$\xi^{\pm}(t) = \sup_{0 \leq u \leq t}(\inf)\, \xi(u), \qquad \xi^{\pm} = \sup_{t < \infty}(\inf)\, \xi(t),$$

$$\tau^+(z) = \inf\{t>0: \xi(t) > z\}, \quad z \geq 0, \qquad T_1 = \tau^+(v),$$

$$\tau^-(-z) = \inf\{t>0: \xi(t) < -z\}, \quad z \geq 0.$$

Момент першого виходу процесу $u(t)$ з інтервалу $(0; B)$ позначимо через $\tau_B(u)$:

$$\tau_B(u) = \inf\{t>0: u(t) \overline{\in} (0; B)\}.$$

Як і в [4], осцилюючий процес, що визначає м.п.р. в розкладі (2'), задається стохастичним співвідношенням

$$\zeta_{B,u}(t) \doteq \begin{cases} u + \xi(t), & t < \tau(v) = T_1; \\ \zeta_{B, B-\xi_k^*}(t - T_1), & T_1 < t, \ v = B - u, \end{cases} \tag{3}$$

де $\xi_* = \xi_1^* > 0$ — випадкова величина стрибка, яка не залежить від $\xi(t)$, а її значення зосереджені на відрізку $[0; B]$.

Нехай $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots$ — послідовність однаково розподілених незалежних випадкових величин із спільною функцією розподілу

$$F_*(x) = P\{\xi_k^* < x\}, \quad x \geq 0; \qquad F_*(0) = 0; \qquad F_*(B) = 1.$$

Компонента $X_{B,u}(t)$ в розкладі (2), яку назвемо дивідендним процесом, визначається так:

$$X_{B,u}(t) = \sum_{k \leq n(t)} \xi_k^*, \tag{4}$$

де $n(t)$ описує число досягнень рівня B процесом $\zeta_{B,u}(y)$. Зауважимо, що м.п.р., який розглядався в [3], одержується з процесу (1), якщо покласти $\xi_1^* = \xi_2^* = \ldots = v$.

Нехай θ_s — випадкова величина з показниковим розподілом і параметром $s > 0$ (незалежна від $\xi(t)$ та $\zeta_{B,u}(t)$), а

$$T_u^B = \inf\{t>0: \zeta_{B,u}(t) < 0\}$$

— момент першої руйнації м.п.р. $\zeta_{B,u}(t)$. Введемо позначення:

$$P(s,x) = P\{\xi(\theta_s) < x\} = 1 - \overline{P}(s,x),$$

$$P_\pm(s,x) = P\{\xi^\pm(\theta_s) < x\}, \qquad \pm x > 0,$$

$$\varphi_\pm(s,\alpha) = \mathrm{E}\, e^{i\alpha\xi^\pm}(\theta_s), \tag{5}$$

$$Q^B(s,u) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau_B(u)}, \ \tau_B(u) = \tau^+(v) < \tau^-(-u)\right],$$

$$Q_B(s,u) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau_B(u)}, \ \tau_B(u) = \tau^-(-u) > \tau^+(v)\right].$$

Нижче доводиться, що твірна функція T_u^B виражається через твірні функції $Q^B(s,u)$ та $Q_B(s,u)$, і встановлюється співвідношення для х.ф. $\zeta_{B,u}(\theta_s)$ в термінах х.ф. $\xi^\pm(\theta_s)$. Для розподілів $\xi^\pm(\theta_s)$ та $\tau_B(u)$ (див. [5] та [6], розд. III, § 3, 8, 9) справедливі такі твердження.

Лема 1. *Для неперервного зверху процесу* $\xi(t)$ (1) *х.ф. максимуму* $\xi^+(\theta_s)$ *визначається співвідношенням*

$$\mathrm{E}\, e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)} = \frac{\rho(s)}{\rho(s) - i\alpha}, \tag{6}$$

де $\rho(s)$ *— корінь рівняння* $\psi(i\rho) = s$,

$$\psi(\alpha) = i\alpha c + \lambda \int_{-\infty}^{0} (e^{i\alpha x} - 1)\, dF(-x).$$

Розподіли $\xi^{\pm}(\theta_s)$ *задаються співвідношеннями*

$$P\{\xi^+(\theta_s) < x\} = \mathrm{E}[e^{-s\tau^+(x)},\ \tau^+(x) < \infty] = e^{-\rho(s)x}, \quad x > 0,$$

$$P\{\xi^-(\theta_s) < x\} = P\{\xi(\theta_s) < x\} + \rho^{-1}(s) P'_x(x, s), \quad x < 0, \tag{7}$$

$$P\{\xi^-(\theta_s) = 0\} = s(c\rho(s))^{-1}.$$

При умові $\mathrm{E}\xi(1) = c - \lambda \mathrm{E}\xi > 0$ *для абсолютного мінімуму*

$$\xi^- = \inf_{t < \infty} \xi(t)$$

невироджений розподіл визначається співвідношенням

$$P\{\xi^- < x\} = \frac{1}{\rho'(0)} \frac{d}{dx} \int_0^0 P\{\xi(t) < x\}\, dt, \quad x < 0,$$

$$P\{\xi^- = 0\} = (c\rho'(0))^{-1} = mc^{-1}. \tag{8}$$

Лема 2. *Твірна функція для* $\tau_B(u)$ *визначається співвідношенням*

$$\mathrm{E}\, e^{-s\tau_B(u)} = 1 - s\left(\frac{R_s(u)}{R_s(B)} \int_0^u R_s(y)\, dy - \int_0^u R_s(y)\, dy\right), \tag{9}$$

де $R_s(x)$ *— резольвентна функція*

$$R_s(x) = s^{-1}\rho(s) \int_{-0}^{x} e^{\rho(s)(x-y)}\, dP\{-\xi^-(\theta_s) < y\}, \quad x > 0,$$

$$Q^B(s, u) = \mathrm{E}[e^{-s\tau_B(u)},\ \tau^+(v) < \tau^-(-u)] = \frac{R_s(u)}{R_s(B)}, \tag{10}$$

$$Q_B(s, u) = \mathrm{E}\, e^{-s\tau_B(u)} - Q^B(s, u). \tag{11}$$

Нам потрібне твердження (див. [7], теорема 1) про зв'язок між розподілом пари $\{\xi^+(\theta_s), \xi^-(\theta_s)\}$ та твірною функцією (т.ф.) для $\tau_B(u)$.

Лема 3. *Сумісний розподіл для пари* $\{\xi^+(\theta_s), \xi^-(\theta_s)\}$ *виражається через т.ф. для* $\tau_B(u)$ *за допомогою співвідношення*

$$P\{\xi^+(\theta_s) < B - u,\ \xi^-(\theta_s) > -u\} = 1 - \mathrm{E}e^{-s\tau_B(u)}, \quad s > 0. \tag{12}$$

На основі співвідношень (3), (4) доводиться твердження про розподіл компонент $X_{B,u}(\theta_s)$ та $\zeta_{B,u}(\theta_s)$ в розкладі (2).

Позначимо

$$\Phi_{B,u} = \mathrm{E}e^{i\alpha\zeta_{Bu}(\theta_s)}, \quad \mathcal{J}m\alpha > 0,$$
$$\Phi_B^*(s,\alpha) = \int_0^B \Phi_{B,B-s}(s,\alpha)dF_*(x). \tag{13}$$

Теорема 1. *Розподіл м.п.р. $\zeta_{B,u}(\theta_s)$ визначається за допомогою х.ф.*

$$\Phi_{B,u}(s,\alpha) = \frac{\rho(s)\,\varphi_-(s,\alpha)}{\rho(s)-i\alpha}\left[e^{i\alpha u} - e^{(\rho(s)-i\alpha)B+u\rho(s)}\right] +$$
$$+ \; e^{\rho(s)(u-B)}\Phi_B^*(s,\alpha), \tag{14}$$

де $\varphi_-(s,\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\xi^-(\theta_s)}$ — *х.ф. розподілу* (7),

$$\Phi_B^*(s,\alpha) = \frac{\mathrm{E}e^{i\alpha(\xi^-(\theta_s)+B)}}{1-\mathrm{E}e^{-\rho(s)\xi_*}}\frac{\rho(s)}{\rho(s)-i\alpha}\left[\mathrm{E}e^{i\alpha\xi_*} - \mathrm{E}e^{-\rho(s)\xi_*}\right].$$

Х.ф. для $X_{B,u}(\theta_s)$ визначається співвідношенням

$$\mathrm{E}e^{i\alpha X_{B,u}(\theta_s)} = \frac{1-e^{-v\rho(s)}}{1-e^{-v\rho(s)}\mathrm{E}e^{i\alpha\xi_*}}. \tag{15}$$

Доведення. На основі стохастичного зображення (3) знаходимо

$$\Phi_{B,u}(s,\alpha) = e^{i\alpha u}\mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi(\theta_s)},\ \xi^+(\theta_s) < v\right] +$$
$$+ \; \mathrm{E}e^{-s\tau^+(v)}\int_0^B \Phi_{B,B-x}(s,\alpha)dF_*(x).$$

Для напівнеперервних пуассонівських процесів згідно з результатами в [8]

$$\mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi(\theta_s)},\ \xi^+(\theta_s) < v\right] = \varphi_-(s,\alpha)\mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)},\ \xi^+(\theta_s) < v\right] =$$
$$= \varphi_-(s,\alpha)\frac{\rho(s)}{\rho(s)-i\alpha}\left[1 - e^{(i\alpha-\rho(s)v)}\right].$$

Тепер одержане співвідношення для $\Phi_{B,u}(s,\alpha)$ можна переписати так:

$$\Phi_{B,u}(s,\alpha) = \varphi_-(s,\alpha)\frac{\rho(s)}{\rho(s)-i\alpha}\left[e^{i\alpha u} - e^{(i\alpha-\rho(s))B+u\rho(s)}\right] +$$
$$+ \; e^{-\rho(s)(B-u)}\int_0^B \Phi_{B,B-x}(s,\alpha)dF_*(x).$$

Використовуючи позначення (13), з останнього рівняння після відповідного інтегрування відносно $dF_*(u)$ одержуємо рівняння

$$\Phi_B^*(s,\alpha) = \frac{\rho(s)\,\varphi_-(s,\alpha)}{\rho(s)-i\alpha}\left[\mathrm{E}e^{i\alpha(B-\xi_*)} - \mathrm{E}e^{i\alpha B-\rho(s)\xi_*}\right] + \mathrm{E}\,e^{-\rho(s)\xi_*}\Phi_B^*(s,\alpha),$$

з якого й виводиться співвідношення для $\Phi_B^*(s,\alpha)$, а також і співвідношення (14) для $\Phi_{B,u}(s,\alpha)$.

Х.ф. для $X_{B,u}(\theta_s)$ встановлюється на основі (4) і того факту, що

$$P\{n(\theta_s) = k\} = (1-q_v(s))\,[q_v(s)]^k,$$
$$q_v(s) = e^{-v\rho(s)}, \quad \rho(s) > 0 \quad (s>0).$$

***Наслідок* 1.** *Якщо* $\mathrm{E}\xi(1) > 0$, *то існує граничний розподіл для*

$$\xi_{B,u} = \lim_{t\to\infty} \zeta_{B,u}(t),$$

незалежний від u, *що визначається співвідношенням*

$$\mathrm{E}\, e^{i\alpha\zeta_{B,u}} = \Phi_B^*(\alpha) = \int_0^B \mathrm{E} e^{i\alpha\zeta_{B,u-x}}\, dF_*(x) = \mathrm{E} e^{i\alpha(B+\xi^-)} \frac{1 - \mathrm{E} e^{i\alpha\xi_*}}{i\alpha \mathrm{E}\xi_*}. \quad (16)$$

Доведення. Враховуючи, що при $\mathrm{E}\xi(1) > 0$ $\rho(s) \xrightarrow[s\to 0]{} 0$, із співвідношень для $\Phi_{B,u}(s,\alpha)$ та $\Phi_B^*(s,\alpha)$ (див. (14)) після граничного переходу при $s \to 0$ одержуємо співвідношення (16) для шуканого граничного розподілу.

Для моменту першої руйнації м.п.р. T_u^B неважко встановити стохастичне співвідношення

$$T_u^B \doteq \begin{cases} \tau^-(u), & \tau^-(u) < \tau^+(v); \\ \tau^+(v) + T_{B-\xi_*}^B, & \tau^-(u) > \tau^+(v), \end{cases} \quad (17)$$

на основі якого виводиться твердження про інтегральне перетворення твірної функції для T_u^B:

$$\varphi_*(s,B) = \int_0^B \varphi_B(s, B-y)\, dF_*(y), \quad (18)$$

де

$$\varphi_B(s,u) = \mathrm{E} e^{-s\tau_u^B}.$$

Теорема 2. *Інтегральне перетворення твірної функції* $\varphi_*(s,B)$ *для* T_u^B *визначається співвідношенням*

$$\varphi_*(s,B) = \frac{R_s(B)\int_0^B \mathrm{E} e^{-s\tau_B(z)} f_*(B-z)\,dz - R_s^*(B)}{R_s(B) - R_s^*(B)}, \quad (19)$$

а $\varphi_B(s,u)$ *має вигляд*

$$\varphi_B(s,u) = Q_B(s,u) + Q^B(s,u)\,\varphi_*(s,B),$$

де

$$f_*(x) = F_*'(x), \qquad 0 < x < B,$$

$$R_s^*(B) = \int_0^B R_s(B-z)\, dF_*(z).$$

Доведення. Із стохастичного зображення (17) випливає співвідношення для $\varphi_B(s,u)$:

$$\varphi_B(s,u) = \mathrm{E}[e^{-s\tau_B(u)},\ \tau_B(u) = \tau^-(-u) < \tau^+(v)] +$$
$$+ \mathrm{E}[e^{-s\tau_B(u)},\ \tau^B(u) = \tau^+(v) \le \tau^-(-u)]\, \mathrm{E} e^{-sT_{B-\xi_*}^B}. \quad (20)$$

Враховуючи (10), (11), співвідношення (20) запишемо так:

$$\varphi_B(s,u) = Q_B(s,u) + Q^B(s,u)\, \mathrm{E} e^{-sT_{B-\xi_*}^B}.$$

Тоді з урахуванням (18) знаходимо співвідношення для $\varphi_*(s,B)$:

$$\varphi_*(s,B) = \int_0^B \mathrm{E}e^{-s\tau_B(z)} f_*(B-z)dz - \frac{R_s^*(B)}{R_s(B)} + \frac{R_s^*(B)}{R_s(B)}\varphi_*(s,B),$$

з якого випливає формула (19).

За формулою (9) інтегральне усереднення твірної функції $\tau_B(u)$ відносно розподілу $dF_*(x)$ можна виразити так:

$$\int_0^B \mathrm{E}e^{-s\tau_B(z)} f_*(B-z)dz =$$

$$= 1 - s\left(\frac{R_s^*(u)}{R_s(B)}\int_0^B R_s(y)dy - \int_0^B R_s(z)F_*(B-z)dz\right). \tag{21}$$

Якщо ввести функціонал

$$\zeta_{B,u}^-(\theta_s) = \inf_{0<t\le\theta_s} \zeta_{B,u}(t),$$

то ймовірність неруйнації м.п.р. виразиться через твірну функцію T_u^B:

$$P_B(s,u) = P\{\xi_{B,u}^-(\theta_s) > 0\} = 1 - \mathrm{E}e^{-sT_u^B}. \tag{22}$$

Тоді

$$P_*(s,B) = \int_0^B R_B(s,B-x)dF_*(x) = 1 - \varphi_*(s,B)$$

на підставі (19) виражається співвідношенням

$$P_*(s,B) = \frac{R_s(B)\left(1 - \int_0^B e^{-s\tau_B(B-z)}dF_*(z)\right)}{R_s(B) - R_s^*(B)}. \tag{23}$$

В умовах ергодичності $\zeta_{B,u}(t)$ $(\mathrm{E}\xi(1) > 0)$ потенціальна функція $R(x)$ виражається співвідношенням

$$R(x) = \lim_{s\to 0} R_s(x) = \rho'(0)P\{-\xi^- < x\} = \rho'(0)P\{\xi^- > -x\},$$

де розподіл ξ^- задається співвідношенням (8). Справедливе таке твердження.

Наслідок 2. *Якщо* $\mathrm{E}\xi(1) > 0$, *то для середнього значення моменту першої руйнації* T_u^B *виконується співвідношення*

$$\int_0^B \mathrm{E}T_{B-z}^B dF_*(x) = \frac{R(B)\int_0^B \mathrm{E}\tau_B(B-z)dF_*(z)}{R(B) - \int_0^B R(B-z)dF_*(z)}. \tag{24}$$

Доведення. Після граничного переходу $(s\to 0)$ в (22), (23) неважко одержати формулу (24). Зауважимо, що на підставі (21) усереднення $\mathrm{E}\tau_B(u)$ відносно $F_*(x)$ можна виразити таким чином:

$$\int_0^B \mathrm{E}\tau_B(B-z)dF_*(x) = \frac{R_*(B)\int_0^B R(y)dy - R(B)\int_0^B R(z)F_*(B-z)dz}{R(B)}.$$

Тоді формула (24) набуває вигляду

$$\int_0^B \mathrm{E} T_{B-z}^B dF_*(x) = \frac{R_*(B)\int_0^B R(y)dy - R(B)\int_0^B R(z)F_*(B-z)dz}{R(B) - R_*(B)}, \tag{25}$$

де

$$R_*(B) = \int_0^B R(B-z)dF_*(z).$$

Слід відмітити, що для випадку, коли $P\{\xi_* = B - u\} = 1$, одержані в [3] співвідношення для розподілів $\eta_{B,u}(\theta_s)$ та T_u^B узгоджуються з співвідношеннями (14)–(16), (19) та (23)–(25). Зокрема, в цьому випадку формула для $\Phi_B^*(s,\alpha)$ набуває вигляду

$$\Phi_B^*(s,\alpha) = \Phi_{B,u}(s,\alpha) =$$

$$= \frac{\mathrm{E}e^{i\alpha(\xi^-(\theta_s)+B)}}{1 - e^{-\rho(s)(B-u)}}\frac{\rho(s)}{\rho(s) - i\alpha}\left[e^{i\alpha(B-u)} - e^{-\rho(s)(B-u)}\right]. \tag{26}$$

Якщо припустити, що ξ_k^* рівномірно розподілені на $[0;B]$, то

$$\Phi^*(s,\alpha) = \frac{1}{B}\int_0^B \Phi_{B,z}(s,\alpha)dz,$$

$$R_s^*(B) = \frac{1}{B}\int_0^B R_*(z)dz, \qquad R_*(B) = \frac{1}{B}\int_0^B R(z)dz,$$

$$\int_0^B R_s(z)F_*(B-z)dz = \frac{1}{B}\int_0^B R_*(z)(B-z)\,dz.$$

Якщо всі ξ_k^* мають урізаний показниковий розподіл, зосереджений на $[0;B]$, то відповідно можна одержати співвідношення для розподілу $\zeta_{B,u}(\theta_s)$ та відповідного усереднення $\Phi_B^*(s,\alpha)$, а також співвідношення для твірної функції моменту першої руйнації $\tau_B(u)$.

1. *Buhlmann H.* Mathematical methods in risk theory. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1970.
2. *Grandall J.* Aspects of risk theory. – New York etc.: Springer-Verlag, 1991. – 174 p.
3. *Gusak D. V.* On the modificated risk process with reflection // Second Scandinav. Ukr. Conf. in Math. Statist. (8–13 June 1997). Umea, Sweden. – P. 32.
4. *Гусак Д. В.* Об осциллирующих схемах случайного блуждания // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1990. – Ч. I. – № 39. – С. 33–39; Ч. II. – № 40. – С. 11–17.
5. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 136 с.
6. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев: Наук. думка, 1990. – 264 с.
7. *Gusak D. V.* The ruin probability and the first exit time for a class of process with independent increments // New trends in Probab. and Statist. Proc. II Ukr.-Hung. Conf., 1995. – P. 329–340.
8. *Гусак Д. В.* Метод факторизации в граничных задачах для однородных процессов с независимыми приращениями // Распределение некоторых функционалов для процессов с независимыми приращениями и полумарковских процессов. – Киев, 1985. – С. 2–42. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.43).

Одержано 04.02.98