УДК 519. 21

И. И. Ежов, В. Ф. Каданков (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМУМА РАЗНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

For a difference of two renewal processes with discrete time which is semicontinuous in discrete topology, we find the distribution of maximum.

Знайдено розподіл максимуму для напівнеперервної в дискретній топології різниці двох процесів відновлення з дискретним часом.

1. Зафиксируем вероятностное пространство (Ω, F, P) и введем на нем независимые случайные блуждания

$$\{\eta_n; n \geq 0\}, \quad \eta_0 = 0, \quad \eta_1 = \eta, \quad M[\eta] < \infty;$$

$$\{\xi_n, \kappa_n; n \geq 0\}, \quad \xi_0 = \kappa_0 = 0, \quad \xi_1 = \xi, \quad \kappa_1 = \kappa,$$

в предположении, что η, ξ, κ — положительны и целочисленны:

$$P\left[(\eta, \xi, \kappa) \in N_+^3\right] = 1, \quad N_+ = \{1, 2, \dots\}.$$

Для каждого $n \in N = \{0, 1, \dots\}$ положим

$$\alpha_n = \max\{k \geq 0 : \xi_k \leq n\}, \quad \beta_n = \max\{k \geq 0 : \eta_k \leq n\}, \quad \delta_n = \kappa_{\alpha_n} - \beta_n.$$

Случайная последовательность $\delta_0, \delta_1, \dots$ принимает значения из множества $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ и является полунепрерывной снизу разностью независимых процессов восстановления с дискретным временем. Наша цель — нахождение распределений следующих случайных величин:

$$\mu_n = \max\{\delta_0, \delta_1, \dots \delta_n\}, \quad \mu = \lim_{n \to \infty} \mu_n.$$

Введем на вероятностном пространстве (Ω, F, P) следующие случайные элементы:

1) $\{\nu_t; t \in [0, 1)\}$ — целочисленный случайный процесс с распределением

$$P[\nu_t = n] = (1 - t)t^n, \quad n \in N;$$

2) $\hat{\eta}$ — целочисленная случайная величина с производящей функцией

$$M\left[u^{\hat{\eta}}\right] = (M[\eta])^{-1} \frac{1 - M\left[u^{\eta}\right]}{1 - u}, \quad |u| \leq 1;$$

3) $\{\zeta_t; t \in [0, 1)\}$ — неубывающий целочисленный случайный процесс с производящей функцией

$$M\left[u^{\zeta_t}\right] = \exp\left\{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} M\left[t^{\xi_n}(u^{\eta_{\kappa_n} - \xi_n} - 1); \eta_{\kappa_n} > \xi_n\right]\right\}, \quad |u| \leq 1;$$

отметим, что распределение случайной величины $\zeta = \lim_{t \to 1} \zeta_t$ совпадает с распределением [1] $\sup_{n \geq 0}\left\{\eta_{\kappa_n} - \xi_n\right\}$;

4) $\{\sigma_k, T_k; k \in N\}$ — случайная последовательность, определяемая равенствами

© И. И. ЕЖОВ, В. Ф. КАДАНКОВ, 1998

$$\sigma_k = \min\{n \geq 0:\ \kappa_n \geq k\}, \qquad T_k = \kappa_{\sigma_k} - k.$$

При этом случайные элементы вида 1 – 3 предполагаются независимыми как между собой, так и от случайного блуждания $\{\eta_n, \xi_n, \kappa_n; n \geq 0\}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $t \in [0, 1)$ *и* $k \in N$. *Тогда*

$$P\left[\mu_{\nu_t} = k\right] = M[\eta] M\left[t^{\xi_{\sigma_k}}; \zeta_t + \hat{\eta} + \eta_{T_k} = \xi_{\sigma_k}\right]. \tag{1}$$

В частности, если $M[\eta\kappa] = M[\eta]M[\kappa] < M[\xi]$, *то*

$$P[\mu = k] = M[\eta] P\left[\zeta + \hat{\eta} + \eta_{T_k} = \xi_{\sigma_k}\right], \qquad k \in N. \tag{2}$$

Следствие. *Пусть* $\kappa \equiv 1$. *Тогда*

$$P[\sigma_k = k, T_k = 0] = 1, \qquad k \in N;$$

$$M\left[u^{\zeta_t}\right] = \exp\left\{\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n} M\left[t^{\xi_n}(u^{\eta_n - \xi_n} - 1); \eta_n > \xi_n\right]\right\}$$

и

$$P\left[\mu_{\nu_t} = k\right] = M[\eta] M\left[t^{\xi_k}; \zeta_t + \hat{\eta} = \xi_k\right]; \qquad k \in N.$$

При $M[\eta] < M[\xi]$

$$P[\mu = k] = M[\eta] P[\zeta + \hat{\eta} = \xi_k], \qquad k \in N.$$

где ζ *распределена одинаково с* $\sup\limits_{n \geq 0} (\eta_n - \xi_n)$.

2. Для обоснования сформулированной теоремы нам понадобится ряд вспомогательных построений и результатов. Пусть $n \geq 0$ — целое и

$$\xi(n) = n - \xi_{\alpha_n}, \qquad \eta(n) = n - \eta_{\beta_n}, \qquad X_n = \{\delta_n, \eta(n), \xi(n)\}.$$

Случайная последовательность $\{X_n;\ n \geq 0\}$ начинает эволюцию из состояния (0, 0, 0) и принимает значения из множества $Z \times N^2$. Легко проверить, что она является цепью Маркова, однородной по времени и по первой компоненте и имеет такие переходные вероятности за один шаг:

$$\begin{aligned}
P[(k, i, j) \to (k, i+1, j+1)] &= P[\eta > i+1, \xi > j+1 / \eta > i, \xi > j],\\
P[(k, i, j) \to (k-1, 0, j+1)] &= P[\eta = i+1, \xi > j+1 / \eta > i, \xi > j],\\
P[(k, i, j) \to (k+r, i+1, 0)] &= P[\eta > i+1, \xi = j+1, \kappa = r / \eta > i, \xi > j],\\
P[(k, i, j) \to (k-1+r, 0, 0)] &= P[\eta = i+1, \xi = j+1, \kappa = r / \eta > i, \xi > j],
\end{aligned} \tag{3}$$

где $(k, r) \in Z \times N_+$, а (i, j) принимает значения из N^2, для которых $P[\eta > i, \xi > j] > 0$.

Зафиксируем (i, j) и обозначим через

$$\{X_n(i, j);\ n \geq 0\} = \{\delta_n(i, j), \eta_n(i, j), \xi_n(i, j); n \geq 0\}$$

цепь Маркова, начинающую эволюцию с начальным распределением $(0, i, j)$, эволюционирующую в фазовом пространстве $Z \times N^2$ и имеющую переходные вероятности (3).

Пусть $\mu(i,j)=\max\{\delta_0(i,j), \delta_1(i,j), \ldots \delta_n(i,j)\}$. Очевидно, что $\mu_n(0,0) = \mu_n$. Положим

$$\psi_k(i,j,n) = P[\mu_n(i,j)=k]\, P[\eta>i, \xi>j], \qquad k, i, j, n \in N.$$

Эти функции, в силу (3), связаны следующими соотношениями:

$$\psi_k(i,j,n) = \psi_k(i+1, j+1, n-1) +$$
$$+ [\psi_{k+1}(0, j+1, n-1) + \delta_{k0}\psi_0(0, j+1, n-1)] \times$$
$$\times P[\eta = i+1] + \sum_{r=1}^{k} \Psi_{k-r}(i+1, 0, n-1) P[\xi = j+1, \kappa = r] +$$
$$+ \sum_{r=1}^{k+1} \psi_{k-r+1}(0,0,n-1) P[\eta = i+1, \xi = j+1, \kappa = r], \tag{4}$$

где δ_{kr} — символ Кронекера.

Введем производящую функцию

$$\Psi_\theta^t(u,v) = \sum_{n,k,i,j\geq 0} t^n \theta^k u^i v^j \psi_k(i,j,n), \qquad t\in[0,1), \qquad |\theta|, |u|, |v| \leq 1.$$

Эти функции, в силу (4), удовлетворяют такому функциональному уравнению:

$$(uv-t)\Psi_\theta^t(u,v)\frac{1-M\left[u^\eta\right]}{1-u} \times \frac{1-M\left[v^\xi\right]}{1-v} =$$
$$= -t\Psi_\theta^t(0,v)\left(1-\frac{1}{\theta}M\left[u^\eta\right]\right) - t\Psi_\theta^t(u,0)\left(1-M\left[\theta^\kappa v^\xi\right]\right) +$$
$$+ t\Psi_\theta^t(0,0)\left(1-\frac{1}{\theta}M\left[u^\eta\right]\right)\left(1-M\left[\theta^\kappa v^\xi\right]\right) + tM\left[u^\eta\right]\left(1-\frac{1}{\theta}\right)\hat{\Psi}_0^t(0,v), \tag{5}$$

где

$$\hat{\Psi}_0^t(0,v) = \Psi_0^t(0,v) - \Psi_0^t(0,0).$$

Будем предполагать, что $uv = t$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$\frac{1-M\left[u^\eta\right]}{1-u} \times \frac{1-M\left[v^\xi\right]}{1-v} = \Psi_\theta^t(0,v)\left(1-\frac{1}{\theta}M\left[u^\eta\right]\right) + \Psi_\theta^t(u,0)\left(1-M\left[\theta^\kappa v^\xi\right]\right) -$$
$$- \Psi_\theta^t(0,0)\left(1-\frac{1}{\theta}M\left[u^\eta\right]\right)\left(1-M\left[\theta^\kappa v^\xi\right]\right) + M\left[u^\eta\right]\left(\frac{1}{\theta}-1\right)\hat{\Psi}_0^t(0,v). \tag{6}$$

Введем следующие обозначения:

$$A_\theta^{-1}(u,v) = \left(1-\frac{1}{\theta}M\left[u^\eta\right]\right)\left(1-M\left[\theta^\kappa v^\xi\right]\right), \qquad |\theta| = 1,$$
$$A^{-1}(u,v) = 1 - M\left[v^\xi u^{\eta_k}\right], \qquad |u|, |v| < 1,$$
$$a_\theta^0(u,v) = 1 + a_\theta(u,v) = \sum_{k\geq 1} \theta^\kappa M\left[v^{\xi_{\sigma_k}} u^{\eta_{T_k}}\right] + 1,$$

$$A_\theta^+(u,v) = A(u,v)a_\theta^0(u,v), \qquad A_\theta^-(u,v) = A(u,v)\left(1-\frac{1}{\theta}M[u^\eta]\right)^{-1}.$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$A_\theta(u, v) = A_\theta^+(u, v) + A_\theta^-(u, v) - A(u, v). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $k \in N_+$. Тогда

$$M\left[v^{\xi_{\sigma_k}} u^{\eta_{T_k}}\right] = M\left[v^{\xi} u^{\eta_{\kappa-k}}; \kappa \geq k\right] + \sum_{r=1}^{k-1} M\left[v^{\xi}; \kappa = r\right] M\left[v^{\xi_{\sigma_{k-r}}} u^{\eta_{T_{k-r}}}\right],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \theta^{\kappa} \sum_{r=k}^{\infty} M\left[v^{\xi} u^{\eta_{r-k}}; \kappa = r\right] = \sum_{r=1}^{\infty} M\left[v^{\xi}; \kappa = r\right] \sum_{k=1}^{r} \theta^{k} M\left[u^{\eta_{r-k}}\right] =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\theta} M\left[u^{\eta}\right]\right)^{-1} \sum_{r=1}^{\infty} M\left[v^{\xi}; \kappa = r\right]\left(\theta^{r} - M\left[u^{\eta_r}\right]\right) =$$

$$= \left(M\left[v^{\xi}\theta^{\kappa}\right] - M\left[v^{\xi} u^{\eta_\kappa}\right]\right)\left(1 - \frac{1}{\theta} M\left[u^{\eta}\right]\right)^{-1}.$$

Отсюда имеем

$$a_\theta(u, v) = \left(1 - \frac{1}{\theta} M\left[u^{\eta}\right]\right)^{-1}\left(M\left[v^{\xi}\theta^{\kappa}\right] - M\left[v^{\xi} u^{\eta_\kappa}\right]\right) a_\theta(u, v) M\left[v^{\xi}\theta^{\kappa}\right]$$

и, таким образом,

$$a_\theta(u, v) = A_\theta(u, v)\left(M\left[v^{\xi}\theta^{\kappa}\right] - 1 + A^{-1}(u, v)\right) = A^{-1}(u, v) A_\theta(u, v) - \left(1 - \frac{1}{\theta} M\left[u^{\eta}\right]\right)^{-1},$$

или

$$A_\theta(u, v) = A(u, v) a_\theta(u, v) + A(u, v)\left(1 - \frac{1}{\theta} M\left[u^{\eta}\right]\right)^{-1}. \tag{8}$$

Поскольку $M\left[v^{\xi_{\sigma_0}} \theta^{\eta_{T_0}}\right] = 1$, то это равенство равносильно (7).

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$A(u, v)\left\{a_\theta^0(u, v) - \frac{1}{\theta} M\left[u^{\eta}\right] a_\theta(u, v)\right\} = \left(1 - M\left[v^{\xi}\theta^{\eta_\kappa}\right]\right)^{-1}. \tag{9}$$

Доказательство. В силу (8),

$$a_\theta(u, v)\, A(u, v) = A_\theta(u, v) - A(u, v)\left(1 - \frac{1}{\theta} M\left[u^{\eta}\right]\right)^{-1},$$

и так как $a_\theta^0(u, v) = 1 + a_\theta(u, v)$, то левая часть равенства (9) следующим образом преобразуется к правой:

$$A(u, v)\left\{1 + a_\theta(u, v)\left(1 - \frac{1}{\theta} M\left[u^{\eta}\right]\right)\right\} =$$

$$= A(u, v) + \left(1 - \frac{1}{\theta} M\left[u^{\eta}\right]\right)\left\{A_\theta(u, v) - A(u, v)\left(1 - \frac{1}{\theta} M\left[u^{\eta}\right]\right)^{-1}\right\} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\theta} M\left[u^{\eta}\right]\right) A_\theta(u, v) = \left(1 - M\left[v^{\xi}\theta^{\kappa}\right]\right)^{-1}.$$

Лемма 3. *Пусть* $uv = t \in [0, 1)$ *и* $|u|, |v| \in [t, 1)$. *Тогда*

$$A(u, v) = E(u, t) F(v, t),$$

где

$$E(u,t) = \exp\left\{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}M\left[t^{\xi_n}u^{\eta_{\kappa_n}-\xi_n};\eta_{\kappa_n}\geq\xi_n\right]\right\},\quad |u|\leq 1,$$

$$F(v,t) = \exp\left\{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}M\left[t^{\eta_{\kappa_n}}v^{\xi_n-\eta_{\kappa_n}};\xi_n>\eta_{\kappa_n}\right]\right\},\quad |v|\leq 1.$$

Доказательство. При сделанных ограничениях на переменные $\left|M\left[v^{\xi}u^{\eta_\kappa}\right]\right|\leq t<1$ и поэтому

$$A(u,v) = \left(1-M\left[v^{\xi}u^{\eta_\kappa}\right]\right)^{-1} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(M\left[v^{\xi}u^{\eta_\kappa}\right]\right)^n\right\} = \exp\left\{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}M\left[v^{\xi_n}u^{\eta_{\kappa_n}}\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}M\left[v^{\xi_n}u^{\eta_{\kappa_n}};\eta_{\kappa_n}\geq\xi_n\right]\right\}\exp\left\{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}M\left[v^{\xi_n}u^{\eta_{\kappa_n}};\xi_n>\eta_{\kappa_n}\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}M\left[t^{\xi_n}u^{\eta_{\kappa_n}-\xi_n};\eta_{\kappa_n}\geq\xi_n\right]\right\}\exp\left\{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}M\left[t^{\eta_{\kappa_n}}v^{\xi_n-\eta_{\kappa_n}};\xi_n>\eta_{\kappa_n}\right]\right\} =$$

$$= E(u,t)F(v,t).$$

Замечание. Если положить

$$\tau^0 = \inf\left\{n>0\colon \eta_{\kappa_n}\geq\xi_n\right\},\qquad \tau = \inf\left\{n\colon \xi_n>\eta_{\kappa_n}\right\},$$

то можно показать, что

$$E^{-1}(u,t) = 1 - M\left[t^{\xi_{\tau^0}}u^{\eta_{\kappa_{\tau^0}}-\xi_{\tau^0}};\tau^0<\infty\right],$$

$$F^{-1}(v,t) = 1 - M\left[t^{\eta_{\kappa_\tau}}v^{\xi_\tau-\eta_{\kappa_\tau}};\tau<\infty\right].$$

Из этих соотношений следует, что при $t\in[0,1]$ функции $E(u,t), E^{-1}(u,t)$ $(F(v,t), F^{-1}(v,t))$ раскладываются в абсолютно сходящиеся степенные ряды по степеням u (по степеням v) в замкнутом единичном круге $|u|\leq 1$ $(|v|\leq$ $\leq 1)$.

3. Продолжим анализ функционального уравнения (6). Умножая его на $A_\theta(u,v)$ и считая $|\theta|=1$, получаем

$$\frac{1-M\left[u^{\eta}\right]}{1-u}\times\frac{1-M\left[v^{\xi}\right]}{1-v}A_\theta(u,v) =$$

$$= \frac{\Psi_\theta^t(u,0)}{1-\frac{1}{\theta}M\left[u^{\eta}\right]}+\frac{\Psi_\theta^t(0,v)}{1-M\left[v^{\xi}\theta^{\kappa}\right]}-\Psi_\theta^t(0,0)+\left(\frac{1}{\theta}-1\right)M\left[u^{\eta}\right]\hat{\Psi}_0^t(0,v)A_\theta(u,v).$$

Сравнивая в этом равенстве правильные части лорановских рядов по переменной θ и используя при этом утверждение леммы 1, имеем

$$\frac{1-M\left[u^{\eta}\right]}{1-u}\times\frac{1-M\left[v^{\xi}\right]}{1-v}A(u,v)a_\theta^0(u,v) =$$

$$= \frac{\Psi'_\theta(0, v)}{1 - M\left[v^\xi \theta^\kappa\right]} - \Psi'_\theta(0, 0) + \frac{\Psi'_\theta(u, 0) - \frac{1}{\theta} M\left[u^\eta\right] \Psi'_{\eta(u)}(u, 0)}{1 - \frac{1}{\theta} M\left[u^\eta\right]} +$$

$$+ \hat{\Psi}'_0(0, v) A(u, v) M\left[u^\eta\right]\left[\frac{1}{\theta} a_\theta(u, v) - a^0_\theta(u, v)\right], \tag{10}$$

где

$$\eta(u) = M\left[u^\eta\right], \quad |\theta| \le 1.$$

Полагая в уравнении (10) $\theta = 0$, получаем

$$\frac{1 - M\left[u^\eta\right]}{1 - u} \times \frac{1 - M\left[v^\xi\right]}{1 - v} A(u, v) =$$

$$= \hat{\Psi}'_0(0, v) + \psi'_{\eta(u)}(u, 0) + \hat{\Psi}'_0(0, v) A(u, v) M\left[u^\eta\right]\left(M\left[v^{\xi_{\sigma_1}} u^{\eta_{T_1}}\right] - 1\right).$$

Но $\sigma_1 = 1$, $T_1 = \kappa - 1$ и поэтому

$$M\left[v^{\xi_{\sigma_1}} u^{\eta_{T_1}}\right] = M\left[v^\xi u^{\eta_{\kappa-1}}\right] = \frac{1}{M\left[u^\eta\right]} M\left[v^\xi u^{\eta_\kappa}\right] = \frac{1 - A^{-1}(u, v)}{M\left[u^\eta\right]}.$$

Отсюда с учетом предыдущего равенства имеем

$$\frac{1 - M\left[u^\eta\right]}{1 - u} \times \frac{1 - M\left[v^\xi\right]}{1 - v} A(u, v) = \Psi'_{\eta(u)}(u, 0) + \hat{\Psi}'_0(0, v) A(u, v)\left(1 - M\left[u^\eta\right]\right). \tag{11}$$

Используя факторизованное разложение для $A(u, t)$ (лемма 3), из равенства (11) получаем

$$\frac{1}{1 - u} \times \frac{1 - M\left[v^\xi\right]}{1 - v} F(v, t) = \frac{\hat{\Psi}'_{\eta(u)}(u, 0) E^{-1}(u, t)}{1 - M\left[u^\eta\right]} + \hat{\Psi}'_0(0, v) F(v, t), \qquad uv = t.$$

Сравнивая в этом равенстве правильные части лорановских рядов по переменной u, $t < |u| < 1$, и используя соотношения

$$\left[\frac{1}{1 - u} \times \frac{1 - M\left[v^\xi\right]}{1 - v} F(v, t)\right]_+ = \frac{1}{1 - u} \times \frac{1 - M\left[t^\xi\right]}{1 - t} F(t, t),$$

$$M\left[u^{\zeta_t}\right] = E^{-1}(1, t), E(u, t),$$

$$1 - M\left[t^\xi\right] = E^{-1}(1, t) F^{-1}(t, t), \qquad M\left[u^{\hat{\eta}}\right] = (M[\eta])^{-1} \frac{1 - M\left[u^\eta\right]}{1 - u},$$

находим

$$\Psi'_{\eta(u)}(u, 0) = \frac{1}{1 - t} M[\eta] M\left[u^{\hat{\eta} + \zeta_t}\right]. \tag{12}$$

Умножим теперь равенство (11) на $a^0_\theta(u, v)$ и вычтем результат из равенства (10). Используя утверждение леммы 2, получаем

$$\frac{M[\eta]}{1 - t} M\left[u^{\hat{\eta} + \zeta_t}\right] a^0_\theta(u, v) =$$

$$= \frac{\Psi_\theta^t(u,0) - \frac{1}{\theta} M\left[u^\eta\right] \Psi_{\eta(u)}^t(u,0)}{1 - \frac{1}{\theta} M\left[u^\eta\right]} + \frac{\Psi_\theta^t(0,v)}{1 - M\left[v^\xi \theta^\kappa\right]} - \Psi_0^t(0,0) - \frac{\hat{\Psi}_\theta^t(0,v)}{1 - M\left[v^\xi \theta^\kappa\right]}, \quad uv = t.$$

Это равенство — суть равенство лорановских рядов по переменной u ($v = tu^{-1}$). Сравнивая свободные члены (коэффициенты при u^0), находим

$$\frac{M\left[u^\eta\right]}{1-t} \sum_{k \ge 0} \theta^\kappa M\left[t^{\xi_{\sigma_k}}; \zeta_t + \hat{\eta} + \eta_{T_k} = \xi_{\sigma_k}\right] = \Psi_\theta^t(0,0),$$

что ввиду очевидного равенства

$$\Psi_\theta^t(0,0) = \sum_{n \ge 0} t^n M\left[\theta^{\mu_n}\right]$$

и приводит к утверждению теоремы.

1. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. – М.: Мир, 1969. – 472 с.

Получено 03.11.97