УДК 519.21

М. М. Осипчук (Івано-Франк. техн. ун-т нафти і газу)

ЩІЛЬНІСТЬ ІМОВІРНОСТІ ПЕРЕХОДУ ОДНОГО КЛАСУ УЗАГАЛЬНЕНИХ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

The existence of density of transition probability is investigated for the generalized diffusion process with transport which satisfies certain condition of integrability with respect to the Gaussian measure.

Досліджується існування щільності ймовірності переходу узагальненого дифузійного процесу з переносом, що задовольняє деяку умову інтегровності за гауссівською мірою.

Нехай задані функції $a\colon R^m \to R^m$, $b\colon R^m \to L_s(R^m)$ ($L_s(R^m)$ — множина симетричних матриць порядку $m \times m$).

Всюди в цій роботі будемо вважати, що функція a має обмежений носій.

Крім того, нехай виконуються наступні умови:

1) при всіх $x, y \in R^m$, $0 < \tau < t$

$$\int_{R^m} \exp\left\{-\frac{|z-x|^2}{\tau}\right\} \exp\left\{-\frac{|y-z|^2}{t-\tau}\right\} |a(z)|^{1+\delta}\, dz \le$$

$$\le C t^{-m/2-\alpha} (\tau(t-\tau))^{m/2+\alpha} \exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{t}\right\},$$

де $\delta > 0$, $C > 0$, $\alpha > m\delta/2 - (1+\delta)/2$ — деякі сталі;

2) при всіх $x, y \in R^m$, $j, k = 1, 2, \ldots, m$

$$c_1 |y|^2 \le (b(x)y, y)) \le c_2 |y|^2,$$

$$|b_{jk}(x) - b_{jk}(y)| \le L|x-y|^\alpha,$$

де c_1, c_2, L, α — додатні сталі ($\alpha \le 1$); $b_{jk}(x)$ — елементи матриці $b(x)$.

Нехай $g(t, x, y)$ — щільність відносно лебегової міри ймовірності переходу дифузійного процесу з нульовим вектором переносу та матрицею дифузії $b(x)$. Функція $g(t, x, y)$ є, зокрема, неперервно диференційовною по x і для неї виконуються нерівності ($t > 0$, $x, y \in R^m$)

$$g(t, x, y) \le M t^{-m/2} \exp\left\{-\mu \frac{|y-x|^2}{t}\right\}, \tag{1}$$

$$|\nabla_x g(t, x, y)| \le M t^{-(m+1)/2} \exp\left\{-\mu \frac{|y-x|^2}{t}\right\}, \tag{2}$$

де M і μ — деякі додатні сталі.

Розглянемо послідовність функцій

$$W_0(t, x, y) = (\nabla_x g(t, x, y), e(x)),$$

$$W_{n+1}(t, x, y) = \int_0^t d\tau \int_{R^m} W_n(t-\tau, z, y) |a(z)| (\nabla_x g(\tau, x, z), e(x))\, dz,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $e(x) = a(x)/|a(x)|$, якщо $|a(x)| \ne 0$, і $e(x) = 0$, якщо $|a(x)| = 0$.

З нерівності (2) одержуємо

$$|W_0(t,x,y)| \le Mt^{-(m+1)/2}\exp\left\{-\mu\frac{|y-x|^2}{t}\right\}$$

при всіх $t>0$, $x, y \in R^m$.

На підставі нерівності з умови 1 можна записати (враховуємо, що $\operatorname{supp} a$ обмежений)

$$\int_{R^m}|a(z)|\exp\left\{-\mu\frac{|z-x|^2}{\tau}\right\}\exp\left\{-\mu\frac{|y-z|^2}{t-\tau}\right\}dz \le$$

$$\le C_1 t^{-m/(2(1+\delta))-\alpha/(1+\delta)}(\tau(t-\tau))^{m/(2(1+\delta))+\alpha/(1+\delta)}\exp\left\{-\mu\frac{|y-x|^2}{t}\right\}. \quad (3)$$

Тому, використовуючи (2) і (3), будемо мати

$$|W_1(t,x,y)| \le M^2 C_1\int_0^t((t-\tau)\tau)^{-(m+1)/2+m/(2(1+\delta))+\alpha/(1+\delta)}d\tau \times$$

$$\times t^{-m/(2(1+\delta))-\alpha/(1+\delta)}\exp\left\{-\mu\frac{|y-x|^2}{t}\right\} =$$

$$= M^2 C_1\frac{\Gamma^2(k)}{\Gamma(2k)}t^{2k-1}\exp\left\{-\mu\frac{|y-x|^2}{t}\right\},$$

де $k=-(m-1)/2+m/(2(1+\delta))+\alpha/(1+\delta)>0$, Γ — гамма-функція.

Аналогічно, з допомогою методу математичної індукції можна легко довести, що при всіх $t>0$, $x, y\in R^m$

$$|W_n(t,x,y)| \le M^{n+1}C_1^n\frac{\Gamma^{n+1}(k)}{\Gamma((n+1)k)}t^{(n+1)k-1}\exp\left\{-\mu\frac{|y-x|^2}{t}\right\}.$$

Крім того, при $0<t\le T$, $x, y\in R^m$

$$|W_n(t,x,y)| \le M^{n+1}C_T^n\frac{\Gamma^{n+1}(k)}{\Gamma((n+1)k)}t^{-(m+1)/2}\exp\left\{-\mu\frac{|y-x|^2}{t}\right\},$$

де C_T — деяка додатна стала, що залежить від T. Це випливає з того, що $(n+1)k-1+(m+1)/2>(m-1)/2\ge 0$.

Оскільки для $R_n = M^{n+1}C_T^n\dfrac{\Gamma^{n+1}(k)}{\Gamma((n+1)k)}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_{n+1}}{R_n} = MC_T\lim_{n\to\infty}B(k,(n+2)k) = 0,$$

то $\sum_{n=0}^{\infty}W_n(t,x,y)$ збігається рівномірно при $0<t\le T$, $x, y\in R^m$ і його сума $W(t,x,y)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$W(t,x,y) = W_0(t,x,y) +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{R^m}W(t-\tau,z,y)|a(z)|(\nabla_x g(\tau,x,z),e(x))\,dz,$$

та при всіх $t>0$, $x, y\in R^m$ задовольняє нерівність

$$|W(t,x,y)| \le Kt^{-(m+1)/2}\exp\left\{-\mu\frac{|y-x|^2}{t}\right\}. \tag{4}$$

Для кожної $\varphi \in C_0(R^m, R)$ функція

$$V(t,x,\varphi) = \int_{R^m} W(t,x,y)\,\varphi(y)\,dy \tag{5}$$

задовольняє інтегральне рівняння

$$V(t,x,\varphi) = \int_{R^m} W_0(t,x,y)\,\varphi(y)\,dy \;+$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{R^m} V(t-\tau,z,\varphi)\,|a(z)|\,(\nabla_x g(\tau,x,z), e(x))\,dz \tag{6}$$

і нерівність

$$|V(t,x,\varphi)| \le \mathrm{const}\, t^{-1/2}. \tag{7}$$

Зауважимо, що з умови 1 при $x = y$ і $\tau = t/2$ випливає, що при всіх $t > 0$, $x, y \in R^m$

$$\int_{R^m} |a(y)|^{1+\delta}\exp\left\{-\frac{|z-x|^2}{t}\right\}dy \le C_2 t^{\gamma}, \tag{8}$$

де $\gamma = m/2 + \alpha > m/2 - (1+\delta)/2$, $C_2 > 0$.

Як доведено в роботі [1], при цьому рівняння (6) має єдиний розв'язок у класі функцій, для яких виконується (7), і півгрупа операторів

$$T_t\varphi(x) = \int_{R^m} g(t,x,y)\,\varphi(y)\,dy + \int_0^t d\tau \int_{R^m} V(t-\tau,z,\varphi)\,|a(z)|\,g(\tau,x,z)\,dz$$

породжує узагальнений дифузійний процес з вектором переносу $a(x)$ та матрицею дифузії $b(x)$.

Тому, враховуючи (5), одержуємо, що функція

$$G(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{R^m} W(t-\tau,z,y)\,|a(z)|\,g(\tau,x,z)\,dz$$

є щільністю ймовірності переходу побудованого в [1] узагальненого дифузійного процесу.

На підставі оцінок (1) – (4) можна стверджувати, що функція $G(t,x,y)$ є неперервно диференційовною по x і для неї виконуються нерівності типу (1) і (2).

Дійсно, оскільки

$$\int_0^t d\tau \int_{R^m} W(t-\tau,z,y)\,|a(z)|\,g(\tau,x,z)\,dz \le$$

$$\le MKC_1\int_0^t ((t-\tau)\tau)^{-m/2 + m/(2(1+\delta)) + \alpha/(1+\delta)}(t-\tau)^{-1/2}\,d\tau \le$$

$$\le K_T t^{-m/2}\exp\left\{-\mu\frac{|y-x|^2}{t}\right\}$$

і

$$\int_0^t d\tau \int_{R^m} W(t-\tau, z, y)\,|a(z)|\,|\nabla_x g(\tau, x, z)|\,dz \le$$

$$\le MKC_1 \int_0^t ((t-\tau)\tau)^{-(m+1)/2 + m/(2(1+\delta)) + \alpha/(1+\delta)}\,d\tau \le$$

$$\le K_T t^{-(m+1)/2} \exp\left\{-\mu \frac{|y-x|^2}{t}\right\},$$

тому що $-m/2 + 1/2 + m/(1+\delta) + 2\alpha/(1+\delta) > 0$, то

$$G(t, x, y) \le M_1 t^{-m/2} \exp\left\{-\mu \frac{|y-x|^2}{t}\right\}, \tag{9}$$

$$|\nabla_x G(t, x, y)| \le M_1 t^{-(m+1)/2} \exp\left\{-\mu \frac{|y-x|^2}{t}\right\} \tag{10}$$

при всіх $0 < t \le T$, $x, y \in R^m$, де M_1 — додатна стала, що, можливо, залежить від T.

Підсумуємо викладене у вигляді теореми.

Теорема. *Якщо функції $a: R^m \to R^m$, $b: R^m \to L_s(R^m)$ задовольняють умови* 1 *і* 2 *відповідно, то ймовірність переходу узагальненого дифузійного процесу з вектором переносу $a(x)$ і матрицею дифузії $b(x)$ має неперервно диференційовну по x щільність $G(t, x, y)$ відносно міри Лебега і при всіх $0 < t \le$ $\le T$, $x, y \in R^m$ виконуються нерівності* (9) *і* (10).

Зауваження. Існування щільності ймовірностей переходу розглянутих процесів легко випливає з результатів роботи [1] при виконанні (8).

Розглянемо деякі приклади функцій, що задовольняють умову 1.

1. Нехай $a \in L_p(R^m)$ з $p > m$ (такі функції було розглянуто в [2]). Оскільки

$$\int_{R^m} \exp\left\{-\frac{|z-x|^2}{\tau}\right\} \exp\left\{-\frac{|y-z|^2}{t-\tau}\right\} |a(z)|^{1+\delta}\,dz \le$$

$$\le \left(\int_{R^m} |a(z)|^p\,dz\right)^{(1+\delta)/p} \times$$

$$\times \left(\int_{R^m} \exp\left\{-\frac{p}{p-(1+\delta)}\frac{|z-x|^2}{\tau}\right\} \exp\left\{-\frac{p}{p-(1+\delta)}\frac{|y-z|^2}{t-\tau}\right\} dz\right)^{1-(1+\delta)/p} \le$$

$$\le C t^{-m(1-(1+\delta)/p)/2} (\tau(t-\tau))^{m(1-(1+\delta)/p)/2} \exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{t}\right\},$$

то, якщо вибрати $\delta < (p-m)/(mp)$, умова 1 виконується з $\alpha = -m(1 - (1 +$ $+\delta)/p)/2$ $(-m(1-(1+\delta)/p)/2 - m\delta/2 + (1+\delta)/2 = ((p-m)(1+\delta) -$ $- m\delta p)/(2p) > 0)$.

2. Нехай $a(x) = \vec{a}/|x|_n^\gamma$, при $|x| \le r$ і $a(x) = 0$ в іншому випадку, де $\vec{a}$ — деякий ненульовий вектор, $|x|_n^2 = \sum_{k=1}^n x_i^2$. Тоді

$$I = \int_{R^m} \exp\left\{-\frac{|z-x|^2}{\tau}\right\} \exp\left\{-\frac{|y-z|^2}{t-\tau}\right\} |a(z)|^{1+\delta}\, dz \le$$

$$\le C t^{-(m-n)/2} (\tau(t-\tau))^{(m-n)/2} \exp\left\{-\frac{|y-x|^2 - |y-x|_n^2}{t}\right\} \times$$

$$\times \int_{(r^n)} |z_n|^{-\gamma(1+\delta)} \exp\left\{-\frac{|z_n-x_n|^2}{\tau}\right\} \exp\left\{-\frac{|y_n-z_n|^2}{t-\tau}\right\} dz_n .$$

Тут x_n, y_n і z_n — проекції x, y і z відповідно на підпростір R^n, (r^n) — куб з ребром $2r$ і центром в початку координат підпростору R^n. При $\gamma < 1$ існує таке $n < p < n/\gamma$, для якого $\int_{|z_n| \le r} |z_n|^{-\gamma p} dz_n < +\infty$. Отже, викладки, аналогічні таким у попередньому прикладі, дозволяють записати

$$I \le C t^{-(m-n)/2 - n(1-(1+\delta)/p)/2} (\tau(t-\tau))^{(m-n)/2 + n(1-(1+\delta)/p)/2} \exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{t}\right\}.$$

В цьому випадку $\alpha = -n(1-(1+\delta)/p)/2$ і, вибираючи $\delta < (p-n)/(mp)$, маємо $\alpha - m\delta/2 + (1+\delta)/2 = ((p-n)(1+\delta) - m\delta p)/(2p) > 0$.

Зауважимо, що при $\gamma \ge n/m$ $a \notin L_p(R^m)$ ні при якому $p > m$.

1. *Осипчук М. М.* Дифузія з нерегулярним переносом // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1996. – **54**. – С. 122–128.
2. *Портенко Н. И.* Обобщенные диффузионные процессы. – Киев: Наук. думка, 1982. – 208 с.

Получено 22.05.96