УДК 512. 64

В. М. Прокіп (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

МНОГОЧЛЕННІ МАТРИЦІ НАД ФАКТОРІАЛЬНОЮ ОБЛАСТЮ ТА ЇХ РОЗКЛАДНІСТЬ НА МНОЖНИКИ ІЗ ЗАДАНИМИ ХАРАКТЕРИСТИЧНИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

We establish conditions for the existence of unital divisor with a given characteristic polynomial of polynomial matrix over a factorial domain.

Встановлено умови існування унітального дільника із заданим характеристичним многочленом многочленної матриці над факторіальною областю.

Нехай R — факторіальна область, тобто R — область цілісності, в якій довільний відмінний від нуля необоротний елемент має однозначний розклад на прості множники. Нехай, далі, e — одиничний елемент кільця R; R_n і $R_n[x]$ — кільця — $(n \times n)$-матриць відповідно над R і кільцем многочленів $R[x]$.

Розглянемо многочленну матрицю $A(x) \in R_n[x]$, яку запишемо у вигляді

$$A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s, \quad A_i \in R_n, \quad i = 0, 1, \ldots, s \quad (\deg A(x) = s \geq 1).$$

Позначимо через I одиничну, а через O нульову $(n \times n)$-матриці; $a(x) = \det A(x)$ — визначник неособливої матриці $A(x)$, який називатимемо її характеристичним многочленом; $d_A(x)$ — найбільший спільний дільник мінорів $(n-1)$-го порядку матриці $A(x)$; $A^*(x)$ — взаємна матриця до матриці $A(x)$, тобто $A(x)A^*(x) = Ia(x)$. Матрицю $A(x)$ будемо називати унітальною, якщо $A_0 = I$, і регулярною, якщо $\det A_0 \neq 0$.

Мета даної роботи — вказати умови зображення неособливої матриці $A(x)$ із $R_n[x]$ у вигляді $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x) \in R_n[x]$ — унітальна многочленна матриця степеня $r \geq 1$ із заданим характеристичним многочленом $b(x)$.

Многочленній матриці

$$A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s, \quad A_i \in R_n, \quad i = 0, 1, \ldots, s,$$

і унітальному многочлену $b(x) = x^{nr} + b_1 x^{nr-1} + \ldots + b_{nr}$, $r \leq s$, поставимо у відповідність матриці

$$M = \left\| \begin{array}{cccccccc} A_0 & A_1 & \ldots & A_{s-1} & A_s & & & \\ & A_0 & A_1 & \ldots & A_{s-1} & A_s & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & A_0 & A_1 & \ldots & A_{s-1} & A_s \\ I & Ib_1 & \ldots & Ib_{nr-1} & Ib_{nr} & & & \\ & I & Ib_1 & \ldots & Ib_{nr-1} & Ib_{nr} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & I & Ib_1 & & & Ib_{nr-1} & Ib_{nr} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}A\\A\\A\\A\end{array}}\right\} (n-1)r \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}A\\A\\A\\A\end{array}}\right\} s-r \end{array},$$

$$N = \left\| A_0 b_1 - A_1, \ldots, A_0 b_s - A_s, \; A_0 b_{s+1}, \ldots, A_0 b_{nr}, \underbrace{O \ldots O}_{t} \right\|,$$

де $t = nr + s - r - \max\{s, nr\}$.

Лема. *Нехай неособлива матриця* $A(x) \in R_n[x]$ *допускає зображення* $A(x) = B_1(x)C_1(x) = B_2(x)C_2(x)$, *де* $B_j(x) \in R_n[x]$, $j = 1, 2,$ — *унітальні многочленні матриці, причому* $(\det B_j(x), \det C_j(x), d_A(x)) = e$, $j = 1, 2$. *Якщо* $\det B_1(x) | \det B_2(x)$, *то матриця* $B_1(x)$ *є лівим дільником матриці* $B_2(x)$, *тобто* $B_2(x) = B_1(x)D(x)$.

Доведення. Нехай P — поле, яке містить кільце $R: R \subset P$. На підставі леми 2 із [1] матриця $B_1(x)$ є лівим дільником матриці $B_2(x)$, тобто $B_2 = B_1(x)D(x)$. Оскільки $B_j(x) \in R_n[x]$, $j = 1, 2,$ — унітальні многочленні матриці, то з останньої рівності випливає $D(x) \in R_n[x]$. Лему доведено.

Наслідок. *Нехай неособлива матриця* $A(x) \in R_n[x]$ *допускає зображення* $A(x) = B(x)C(x)$, *де* $B(x) \in R_n[x]$ — *унітальна многочленна матриця. Якщо* $(\det B(x), \det C(x), d_A(x)) = e$, *то матриця* $B(x)$ *однозначно визначається своїм характеристичним многочленом* $\det B(x)$.

Теорема 1. *Нехай характеристичний многочлен* $a(x)$ *неособливої матриці* $A(x) \in R_n[x]$ *допускає зображення* $a(x) = b(x)c(x)$, *де* $b(x) \in R_n[x]$ — *унітальний многочлен степеня* nr, $r \le s$. *Якщо* $(b(x), c(x), d_A(x)) = e$, *то для* $A(x)$ *існує зображення* $A(x) = B(x)C(x)$, *де* $B(x) \in R_n[x]$ — *унітальна многочленна матриця степеня* r *з характеристичним многочленом* $b(x)$, *тоді і тільки тоді, коли рівняння* $ZM = N$ *розв'язне. Якщо ж шуканий розклад існує, то матриця* $B(x)$ *однозначно визначається своїм характеристичним многочленом* $b(x)$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x) \in R_n[x]$ — унітальна многочленна матриця степеня r і $\det B(x) = b(x)$. Очевидно, що $B^*(x)A(x) = b(x)C(x)$, де $B^*(x)$ — взаємна матриця до матриці $B(x)$. Виконавши в останній рівності ті ж перетворення, що і при доведенні необхідності леми 1 із [2], отримаємо розв'язність рівняння $ZM = N$. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай матриця

$$Z_0 = \| D_1 \, D_2 \, \ldots \, D_{(n-1)r} - C_1 - C_2 \ldots - C_{s-r} \|,$$

$$D_j, C_j \in R_n, \quad j = 1, 2, \ldots, (n-1)r, \quad j = 1, 2, \ldots, s - r,$$

є розв'язком рівняння $ZM = N$. Виконавши тепер в рівності $Z_0 M = N$ ті ж самі перетворення, що і при доведенні достатності леми 1 із [2], отримаємо, що для многочленних матриць

$$D(x) = Ix^{(n-1)r} + D_1 x^{(n-1)r-1} + \ldots + D_{(n-1)r}$$

та

$$C(x) = A_0 x^{s-r} + C_1 x^{s-r-1} + \ldots + C_{s-r}$$

справедливе співвідношення $D(x)A(x) = b(x)C(x)$. Оскільки кільце R є областю цілісності, то воно міститься в деякому полі P, тобто $R \subset P$. На підставі результатів роботи [3] для матриці $A(x) \in P_n[x]$ існує розклад $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x) \in P_n[x]$ — унітальна матриця степеня r з характеристичним многочленом $b(x)$, причому $D(x)B(x) = Ib(x)$. На підставі того, що $D(x) \in R_n[x]$ і $b(x) \in R[x]$, з останньої рівності випливає $B(x) \in R_n[x]$. Отже, для матриці $A(x) \in R_n[x]$ існує факторизація $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x) \in R_n[x]$ — многочленна матриця степеня r і $\det B(x) = b(x)$. Очевидно, що $\det C(x) = c(x)$. На основі наслідку матриця $B(x)$ однозначно визначається характеристичним многочленом $b(x)$. Теорему доведено.

Вкажемо умови виділення лінійного унітального дільника із регулярної многочленної матриці.

Теорема 2. *Нехай характеристичний многочлен* $a(x)$ *регулярної матриці*

$$A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s, \quad A_i \in R_n, \quad i = 0, 1, \ldots, s,$$

зображений у вигляді $a(x) = b(x)c(x)$, *де* $b(x) \in R[x]$ — *унітальний многочлен степеня* n. *Для матриці* $A(x)$ *існує факторизація* $A(x) = (Ix - B)C(x)$, *де* $B \in R_n$ *і* $\det B(x) = b(x)$, *тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

а) *для матриці* $Ic(x)$ *існує зображення* $Ic(x) = S(x)A(x) + Q(x)$, *де*

$$Q(x) = Q_0 x^{s-1} + Q_1 x^{s-2} + \ldots + Q_{s-1}, \quad Q_j \in R_n, \quad j = 0, 1, \ldots, s-1;$$

б) *матриця* $Q(x)$ *допускає зображення* $Q(x) = TC(x)$, *де*

$$C(x) = A_0 x^{s-1} + C_1 x^{s-2} + \ldots + C_{s-1}, \quad T, C_j \in R_n, \quad j = 1, 2, \ldots, s-1,$$

і $\det C(x) = c(x)$;

в) $A(x)C^*(x) = 0 \pmod{c(x)}$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай для матриці $A(x)$ існує факторизація $A(x) = (Ix - B)C(x)$, де $B \in R_n$, $\det B(x) = b(x)$ і $\det C(x) = c(x)$. Поділивши матрицю $C^*(x)$ справа на матрицю $(Ix - B)$, одержимо $C^*(x) = S(x)B(x) + T$, де $T \in R_n$. Помноживши тепер обидві частини останньої рівності справа на $C(x)$, отримаємо

$$Ic(x) = S(x)A(x) + TC(x).$$

Отже, $Q(x) = TC(x)$ і $\det C(x) = c(x)$. Наважко переконатись у тому, що $A(x)C^*(x) = 0 \pmod{c(x)}$. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для матриці $Ic(x)$ існує зображення у вигляді $Ic(x) = S(x)A(x) + Q(x)$, де $S(x), Q(x) \in R_n[x]$ і $\deg Q(x) = s - 1$. Оскільки $A(x)$ — регулярна матриця, то дане зображення єдине, тобто існує лише одна пара матриць $S(x), Q(x) \in R_n[x]$ і $\deg Q(x) \le s - 1$, яка задовольняє дане співвідношення. Нехай, далі, матриця $Q(x)$ допускає факторизацію $Q(x) = TC(x)$, де

$$C(x) = A_0 x^{s-1} + C_1 x^{s-2} + \ldots + C_{s-1}$$

і $\det C(x) = c(x)$. Оскільки $A(x)C^*(x) \equiv 0 \pmod{c(x)}$, то $A(x)C^*(x) = B(x)C(x)C^*(x)$, тобто $A(x) = B(x)C(x)$. З останньої рівності випливає $B(x) = Ix - B$, де $B \in R_n$ і $\det(Ix - B) = b(x)$. Теорему доведено.

Зауважимо, що на основі леми та теореми 1 легко вказати умови зображення неособливої матриці $A(x) \in R_n[x]$ у вигляді добутку довільного числа співмножників із наперед заданими характеристичними многочленами. Крім цього одержані результати можуть бути використані для факторизації многочленних матриць від багатьох змінних над полем та розв'язності матричних многочленних рівнянь та матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті $XAX + XB + CX + D = 0$, де $A, B, C, D \in R_n$ і $\det A \neq 0$, яке зводиться до рівняння $Y^2 A^* + YF + G = 0$.

1. *Прокіп В. М.* Про єдиність унітального дільника матричного многочлена над довільним полем // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 6. – С. 803 – 808.
2. *Прокіп В. М.* Про факторизацію многочленних матриць над областю головних ідеалів // Там же. – 1996. – **48**, № 10. – С. 1435 – 1439.
3. *Петричкович В. М., Прокип В. М.* О факторизации многочленных матриц над произвольным полем // Там же. – 1986. – **38**, № 4. – С. 478 – 483.

Одержано 13.02.98