УДК 519.21

П. Б. Василишин (Прикарпат. ун-т, Івано-Франківськ),
Б. Й. Пташник (Ін-т прикл. пробл. механіки та математики НАН України, Львів)

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

We investigate the multipoint problem for a linear typeless partial differential operator with variable coefficients which is perturbed by a nonlinear integro-differential summand. We establish conditions for the existence and the uniqueness of solution. We prove the metric theorems on lower bounds of small denominators which appear when investigating the solvability of the problem.

Досліджено багатоточкову задачу для лінійного безтипного диференціального оператора з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами, збуреного нелінійним інтегро-диференціальним доданком. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при дослідженні розв'язності задачі.

1. У даній роботі, яка є продовженням [1–4], досліджується задача з локальними багатоточковими умовами за виділеною змінною t для лінійного безтипного диференціального оператора з частинними похідними зі змінними по x коефіцієнтами, збуреного нелінійним інтегро-диференціальним доданком. До цієї тематики близькими є також роботи [5, 6], де вивчаються крайові задачі з локальними і нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною t для слабко нелінійних систем гіперболічних інтегро-диференціальних рівнянь. Використовуватимемо такі позначення та класи функцій: $D_{t,x} = \{(t,x)\colon t \in (0,T),$ $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^p\}$, де Ω — обмежена однозв'язна область із гладкою границею $\partial\Omega = \Gamma$; $C^{(0,r)}(\overline{D}_{t,x})$ — банахів простір функцій $v(t,x)$, які в області $\overline{D}_{t,x}$ є неперервні за всіма змінними і мають неперервні похідні по x до порядку r включно,

$$\|v(t,x)\|_{C^{(0,r)}(\overline{D}_{t,x})} = \sum_{|s|\le r} \max_{(t,x)\in\overline{D}_{t,x}} \left| \frac{\partial^{|s|} v(t,x)}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}} \right|;$$

означення класів функцій $C^q(\overline{D}_{t,x})$, $C^{q+\mu}(\overline{\Omega})$, $0<\mu<1$, та класу поверхонь $A^{q+\mu}$, $0<\mu<1$, ті ж самі, що і в [4]; $\{X_k(x),\ k\in\mathbb{N}\}$, $\Lambda = \{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ — множини відповідно власних функцій та власних значень задачі

$$LX(x) \equiv \left(\sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - b(x) \right) X(x) = -\lambda X(x), \tag{1}$$

$$X(x)|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

де L — еліптичний в області Ω оператор, а дійснозначні функції $b(x)\ge 0$, $b_{ij}(x)$, $i,j=1,\ldots,p$, такі, що

$$b(x) \in C^{2n-2+\mu}(\overline{\Omega}), \quad b_{ij}(x) \in C^{2n-1+\mu}(\overline{\Omega}), \quad i,j=1,\ldots,p; \tag{3}$$

відомо [7, 8], що всі власні значення задачі (1), (2) є дійсні, а власні функції — ортогональні і утворюють повну систему в просторі $L_2(\Omega)$, причому, якщо $\Gamma \in A^{2n+\mu}$, то за умов (3) справджуються оцінки

$$C_0 k^{2/p} \le \lambda_k \le C_1 k^{2/p}, \quad 0 < C_0 \le C_1, \quad \lambda_k \in \Lambda, \tag{4}$$

$$(\forall x \in \Omega) \quad \left| X_k^{(l)}(x) \right| \le C_2(l)\, \lambda_k^{p/4+l/2}, \qquad 0 \le l \le 2n; \tag{5}$$

$$A_\delta^\beta = \{\varphi(x) \in L_2(\Omega) : \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x),\ \|\varphi(x)\|_{\delta,\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \exp(\delta\lambda_k^\beta) < \infty\};$$

$C([0, T], A_\delta^\beta)$ — простір функцій $w(t, x)$, визначених і неперервних в області $\overline{D}_{t,x}$, які для кожного $t \in [0, T]$ належать простору A_δ^β,

$$\|w(t, x)\|_{C([0,T], A_\delta^\beta)} = \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0,T]} |w_k(t)| \exp(\delta\lambda_k^\beta),$$

$$w_k(t) = \int_\Omega w(t, x)\, X_k(x)\, dx;$$

$C(\overline{D}_{t,y}, A_\delta^\beta)$ — простір функцій $g(t, x, y)$, визначених і неперервних в області $\overline{D}_{t,y} \times \overline{\Omega}$, які для кожної точки $(t, y) \in \overline{D}_{t,y}$ належать простору A_δ^β,

$$\|g(t, x, y)\|_{C(\overline{D}_{t,y}, A_\delta^\beta)} = \sum_{k=1}^{\infty} \max_{(t,y) \in \overline{D}_{t,y}} |g_k(t, y)| \exp(\delta\lambda_k^\beta),$$

де

$$g_k(t, y) = \int_\Omega g(t, x, y)\, X_k(x)\, dx;$$

$\operatorname{mes} M$ — міра Лебега множини M.

2. В області $D_{t,x}$ розглянемо задачу

$$\mathcal{L}(u) \equiv \sum_{s_0+2s_1 \le 2n} A_s \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0} L^{s_1} u(t, x) = f(t, x) + \varepsilon \int_\Omega R(t, x, y)\, F(t, y, \overline{u}(t, y))\, dy, \tag{6}$$

$$\sum_{r=0}^{2n-1} a_r \frac{\partial^r u(t_j, x)}{\partial t^r} = 0, \quad j = 1, \ldots, 2n, \quad 0 \le t_1 < \ldots < t_{2n} \le T, \tag{7}$$

$$L^m u(t, x)|_\Gamma = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{8}$$

де $s = (s_0, s_1) \in \mathbf{Z}_+^2$; $A_s, a_r, \varepsilon \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a_0 \ne 0$; $A_{2n,0} \ne 0$ (без обмеження загальності вважатимемо надалі, що $A_{2n,0} = 1$); $\Gamma \in A^{2n+\mu}$; $\overline{u}(t, x) = \{\partial^{|q|} u(t, x) / (\partial t^{q_0}\, \partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_p^{q_p}),\ |q| \le 2n\}$; $F(t, x, \overline{u}(t, x))$ визначена і неперервна за всіма змінними в області $D_1 = \left\{(t, x, \overline{u}) : (t, x) \in \overline{D}_{t,x},\ u \in \overline{S}(u^0(t, x), r)\right\}$ і задовольняє в D_1 умову Ліпшиця відносно компонент вектора $\overline{u}$:

$$\left| F(t, x, \overline{u}_1) - F(t, x, \overline{u}_2) \right| \le H \sum_{|q| \le 2n} \left| \frac{\partial^{|q|} u_1(t, x)}{\partial t^{q_0}\, \partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_p^{q_p}} - \frac{\partial^{|q|} u_2(t, x)}{\partial t^{q_0}\, \partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_p^{q_p}} \right|, \tag{9}$$

причому

$$|F(t, x, \overline{u})| \le M, \tag{10}$$

де $u^0(t, x)$ — розв'язок задачі (6)–(8) при $\varepsilon = 0$; $\overline{S}(u^0(t, x), r) \subset C^{2n}(\overline{D}_{t,x})$ — замкнена куля радіуса r з центром в точці $u^0(t, x)$. Умови на функції $f(t, x)$ і $R(t, x, y)$, які визначені відповідно в областях $\overline{D}_{t,x}$ і $D_2 = \{(t, x, y) : (t, x) \in$

$\in \overline{D}_{t,x},\ y \in \overline{\Omega}\}$, будуть з'ясовані нижче; припустимо, що вони, як функції x, розвиваються у просторі $L_2(\Omega)$ в ряди Фур'є за системою $\{X_k(x),\ k \in \mathbf{N}\}$, тобто

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\, X_k(x), \quad f_k(t) = \int_{\Omega} f(t,x)\, X_k(x)\,dx, \qquad k \in \mathbf{N}, \tag{11}$$

$$R(t,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(t,y)\, X_k(x), \quad R_k(t,y) = \int_{\Omega} R(t,x,y)\, X_k(x)\,dx, \qquad k \in \mathbf{N}. \tag{12}$$

На тип опереатора $\mathcal{L}$ обмежень не накладається.

3. Розглянемо спочатку незбурену задачу (6)-(8) (коли $\varepsilon = 0$). У цьому випадку розв'язок задачі шукаємо у вигляді ряду

$$u^0(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0(t)\, X_k(x). \tag{13}$$

Очевидно, що кожен член ряду (13) задовольняє умови (8). Кожна з функцій $u_k^0(t)$, $k \in \mathbf{N}$, визначається як розв'язок такої багатоточкової задачі:

$$\sum_{s_0+2s_1 \le 2n} A_s(-\lambda_k)^{s_1} \frac{d^{s_0} u_k^0(t)}{dt^{s_0}} = f_k(t), \tag{14}$$

$$\sum_{r=0}^{2n-1} a_r \frac{d^r u_k^0(t_j)}{dt^r} = 0, \quad j = 1, \dots, 2n. \tag{15}$$

Для спрощення викладок припустимо, що всі корені $\eta_m(\lambda_k)$, $m = 1, \dots, 2n$, характеристичного рівняння

$$P(\eta) \equiv \sum_{s_0+2s_1 \le 2n} A_s(-\lambda_k)^{s_1} \eta^{s_0} = 0, \tag{16}$$

яке відповідає рівнянню (14), є прості для кожного $\lambda_k \in \Lambda$; із рівняння (16) випливає

$$|\eta_m(\lambda_k)| \le C\sqrt{\lambda_k}, \quad m = 1, \dots, 2n; \quad C > 0; \quad \lambda_k \in \Lambda. \tag{17}$$

Розв'язок однорідного рівняння

$$\sum_{s_0+2s_1 \le 2n} A_s(-\lambda_k)^{s_1} \frac{d^{s_0} u_k^0(t)}{dt^{s_0}} = 0, \tag{14'}$$

який задовольняє умови (15), зображається формулою

$$u_k^0(t) = \sum_{m=1}^{2n} C_{km} \exp(\eta_m(\lambda_k) t), \tag{18}$$

де коефіцієнти C_{km}, $m = 1, \dots, 2n$, визначаються із системи рівнянь

$$\sum_{m=1}^{2n} \sum_{r=0}^{2n-1} a_r (\eta_m(\lambda_k))^r \exp(\eta_m(\lambda_k) t_j)\, C_{km} = 0, \quad j = 1, \dots, 2n. \tag{19}$$

Визначник системи (19) обчислюється за формулою

$$\Delta^*(\lambda_k) = \Delta(\lambda_k)\prod_{m=1}^{2n}(\gamma_m(\lambda_k)), \tag{20}$$

де

$$\gamma_m(\lambda_k) = \sum_{r=0}^{2n-1} a_r(\eta_m(\lambda_k))^r, \quad m = 1, \ldots, 2n,$$

$$\Delta(\lambda_k) = \det\left\|\exp(\eta_m(\lambda_k)t_j)\right\|_{j,m=1}^{2n}.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку незбуреної задачі* (6)–(8) *у просторі* $C^{2n}(\overline{D}_{t,x})$ *необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall\lambda_k \in \Lambda) \quad \Delta(\lambda_k) \neq 0, \quad \gamma_m(\lambda_k) \neq 0, \quad m = 1, \ldots, 2n. \tag{21}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 1 із [4].

Нехай справджуються умови (21). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ у квадраті $\{(t,\tau): 0 \le t \le T, \quad 0 \le \tau \le T\}$ існує єдина функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (14′), (15), за допомогою якої розв'язок відповідної задачі (14), (15) зображається формулою (див. [2, 9]):

$$u_k^0(t) = \int_0^T G_k(t,\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau. \tag{22}$$

Будуючи функції $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbf{N}$, бачимо, що в кожній з областей $K_j = \{(t,\tau): 0 \le t \le T,\ t_j < \tau < t_{j+1}\}$, $j = 0, 1, \ldots, 2n$, $t_0 = 0$, $t_{2n+1} = T$, вони мають вигляд

$$G_k(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2} \sum_{m=1}^{2n} \exp[\eta_m(\lambda_k)(t-\tau)] \prod_{l=1,\, l\neq m}^{2n} (\eta_m(\lambda_k) - \eta_l(\lambda_k))^{-1} -$$

$$- \frac{(-1)^n}{2}\left\{ \sum_{q=1}^{j} \sum_{s,m=1}^{2n} \frac{(-1)^q \gamma_m(\lambda_k) \exp(\eta_s(\lambda_k)t + \eta_m(\lambda_k)(t_q - \tau))\, \Delta_{qs}(\lambda_k)}{\gamma_s(\lambda_k)\,\Delta(\lambda_k) \prod_{l=1,\, l\neq m}^{2n} (\eta_m(\lambda_k) - \eta_l(\lambda_k))} - \right.$$

$$\left. - \sum_{q=j+1}^{2n} \sum_{s,m=1}^{2n} \frac{(-1)^q \gamma_m(\lambda_k) \exp(\eta_s(\lambda_k)t + \eta_m(\lambda_k)(t_q - \tau))\, \Delta_{qs}(\lambda_k)}{\gamma_s(\lambda_k)\,\Delta(\lambda_k) \prod_{l=1,\, l\neq m}^{2n} (\eta_m(\lambda_k) - \eta_l(\lambda_k))} \right\}, \tag{23}$$

де $\Delta_{qs}(\lambda_k)$ — алгебраїчне доповнення елемента $\exp(\eta_s(\lambda_k)t_q)$ у визначнику $\Delta(\lambda_k)$; на прямих $\tau = t_j$, $j = 0, 1, \ldots, 2n$, доозначуємо функцію $G_k(t,\tau)$ за неперервністю по τ справа, а при $\tau = T$ — за неперервністю зліва.

Розв'язок незбуреної задачі (6)–(8) формально зображається рядом

$$u^0(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T G_k(t,\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau\, X_k(x). \tag{24}$$

Ряд (24), взагалі, є розбіжним, оскільки відмінні від нуля величини $\Delta(\lambda_k)$, $\gamma_m(\lambda_k)$, $\eta_l(\lambda_k) - \eta_m(\lambda_k)$, $l, m = 1, \ldots, 2n$, $l \neq m$, що входять знаменниками у вираз для $G_k(t,\tau)$, можуть набувати як завгодно малих за модулем значень для нескінченної множини $\lambda_k \in \Lambda$.

Якщо

$$f(t, x) = \sum_{k=1}^{N} f_k(t)\, X_k(x), \qquad N < \infty,$$

то при виконанні умов (21) завжди існує єдиний розв'язок розглядуваної задачі. У загальному випадку справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Нехай існують сталі* $Q > 0$, $M_j > 0$, $\alpha_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, 3$, *такі, що для всіх (крім скінченного числа)* $\lambda_k \in \Lambda$ *виконуються нерівності*

$$\prod_{l=1,\, l\neq m}^{2n} |\eta_m(\lambda_k) - \eta_l(\lambda_k)| > M_1 \lambda_k^{-\alpha_1 - \nu/6}, \tag{25}$$

$$|\Delta(\lambda_k)| > M_2 \lambda_k^{-\alpha_2 - \nu/6} \exp(-Q\sqrt{\lambda_k}\, T), \tag{26}$$

$$|\gamma_m(\lambda_k)| > M_3 \lambda_k^{-\alpha_3 - \nu/6}, \quad m = 1, \ldots, 2n, \tag{27}$$

де $0 < \nu < 1$, *і нехай* $f(t, x) \in C([0, T],\, A_q^{1/2})$, $q > ((2n+1)C + Q)T$. *Тоді існує розв'язок задачі* (6)–(8) *із простору* $C^{2n}(\overline{D}_{t,x})$, *який неперервно залежить від* $f(t, x)$.

Доведення. Із нерівностей (5), (17), (25)–(27) і формул (23), (24) випливає оцінка

$$\|u^0(t, x)\|_{C^{2n}(\overline{D}_{t,x})} = \sum_{s_1+s_2\leq 2n} \max_{(t,x)\in \overline{D}_{t,x}} \left| \frac{\partial^{s_1+s_2}}{\partial t^{s_1}\partial x^{s_2}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau\, X_k(x) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \max_{0\leq t\leq T} |f_k(t)| \sum_{s_1+s_2\leq 2n} \max_{(t,x)\in \overline{D}_{t,x}} \int_0^T \left| \frac{\partial^{s_1} G_k(t,\tau)}{\partial t^{s_1}} X_k^{(s_2)}(x) \right| d\tau \leq$$

$$\leq M_4 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k \left(\sqrt{\lambda_k}\right)^{\gamma} \exp\left[((2n+1)C + Q)\sqrt{\lambda_k}\, T \right], \tag{28}$$

де

$$\bar{f}_k = \max_{0\leq t\leq T} |f_k(t)|, \qquad \gamma = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \frac{p}{2} + 4n - 1 + \nu,$$

$$M_4 = M_4(M_1, M_2, M_3, C, T, n).$$

Скориставшись елементарною нерівністю

$$\delta^{\mu} \leq A(\mu)\exp(\theta\delta), \quad A(\mu) > 0,$$

яка при $0 < \delta < +\infty$ справедлива для довільних $\mu \geq 0$ і $\theta > 0$, і поклавши $\theta = q - ((2n+1)C + Q)T$, з оцінки (28) одержимо

$$\|u^0(t, x)\|_{C^{2n}(\overline{D}_{t,x})} \leq M_4 A \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k \exp\left(q\sqrt{\lambda_k}\right) = W \|f(t, x)\|_{C([0,T],\, A_q^{1/2})}, \tag{29}$$

де $W = AM_4$, $A = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, p, n, \nu)$.

З нерівності (29) випливає доведення теореми.

4. Розглянемо тепер задачу (6)–(8), коли $\varepsilon \neq 0$. Її розв'язок шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\, X_k(x). \tag{30}$$

Враховуючи (6), (7), (11), (12), (30) і той факт, що кожен член ряду (30) задовольняє умови (8), отримуємо для знаходження сукупності функцій $\{u_k(t), k \in \mathbf{N}\}$ таку багатоточкову задачу для зчисленної системи нелінійних звичайних інтегро-диференціальних рівнянь:

$$\sum_{s_0+2s_1 \le 2n} A_s (-\lambda_k)^{s_1} \frac{d^{s_0} u_k(t)}{dt^{s_0}} = f_k(t) + \varepsilon \int_{\Omega} R_k(t,y)\, F(t,y,u(t,y))\, dy, \tag{31}$$

$$\sum_{r=0}^{2n-1} a_r u_k^{(r)}(t_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, 2n, \tag{32}$$

де

$$k \in \mathbf{N}, \ \bar{u}\,(t,y) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^{q_0} u_k(t)}{dt^{q_0}} \frac{\partial^{q_1+\ldots+q_p} X_k(x)}{\partial y_1^{q_1} \ldots \partial y_p^{q_p}}, \quad |q| \le 2n \right\}.$$

За допомогою функцій Гріна $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbf{N}$, визначених формулою (23), зводимо задачу (31), (32) до еквівалентної їй системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau + \varepsilon \int_{D_{\tau,y}} G_k(t,\tau)\, R_k(\tau,y)\, F(\tau,y,\bar{u}(\tau,y))\, dy\, d\tau, \ \ k \in \mathbf{N}. \tag{33}$$

Якщо в області $\overline{D}_{t,x} \times \overline{D}_{\tau,y}$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau)\, R_k(\tau,y)\, X_k(x) \tag{34}$$

рівномірно збігається і його сума дорівнює $Q(t,x,\tau,y)$, то з (30) і (33) випливає, що задача (6)–(8) еквівалентна такому інтегро-диференціальному рівнянню:

$$u(t,x) = u^0(t,x) + \ \varepsilon \int_{D_{\tau,y}} Q(t,x,\tau,y)\, F(\tau,y,\bar{u}(\tau,y))\, dy\, d\tau, \tag{35}$$

де $u^0(t,x)$ визначається формулою (24).

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 2, *функція* $R(t,x,y) \in C\left(\overline{D}_{t,y}, A_q^{1/2}\right)$, $q > ((2n+1)C + Q)T$, *а* $f(t,x)$ *задовольняє умови* (9), (10). *Тоді для всіх* ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, *існує єдиний розв'язок задачі* (6)–(8), *який належить замкненій кулі* $\overline{S}\,(u^0(t,x), r)$ *і неперервно залежить від* $f(t,x)$, *де*

$$\varepsilon_0 = \min\{r/(BM),\, 1/(BH)\}, \quad B = WV \| R(t,x,y) \|_{C(\overline{D}_{t,y}, A_q^{1/2})},$$

V — об'єм області Ω; H, M, W — сталі з нерівностей (9), (10), (29) *відповідно.*

Доведення. Застосуємо принцип нерухомої точки Каччіополі – Банаха. Введемо оператор P_v, який визначений на множині функцій $u(t,x) \in \overline{S}\,(u^0(t,x), r)$, таким чином

$$P_v(u(t,x)) \equiv v(t,x) + \varepsilon \int_{D_{\tau,y}} \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau)\, R_k(\tau,y)\, X_k(x)\, F(\tau,y,\bar{u}(\tau,y))\, dy\, d\tau. \tag{36}$$

Тоді рівняння (35) запишемо у вигляді

$$u(t,x) = P_{u^0}(u(t,x)), \quad u^0 = u^0(t,x).$$

Позначимо через Y сукупність функцій $v(t,x) \in C^{2n}(\overline{D}_{t,x})$, для яких $\| v(t,x) - u^0(t,x) \|_{C^{2n}(\overline{D}_{t,x})} \le \beta = r - |\varepsilon| BM$. При кожному $v(t,x) \in Y$ оператор P_v відображає кулю $\overline{S}(u^0(t,x), r)$ в себе. Дійсно,

$$\| P_v(u(t,x)) - u^0(t,x) \|_{C^{2n}(\overline{D}_{t,x})} \le \| v(t,x) - u^0(t,x) \|_{C^{2n}(\overline{D}_{t,x})} +$$

$$+ |\varepsilon| \left\| \int_{D_{\tau,y}} \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau) R_k(\tau,y) X_k(x) F(\tau,y,\overline{u}(\tau,y)) dy d\tau \right\|_{C^{2n}(\overline{D}_{t,x})} \equiv$$

$$\equiv \| v(t,x) - u^0(t,x) \|_{C^{2n}(\overline{D}_{t,x})} + |\varepsilon| J. \tag{37}$$

Шляхом таких міркувань, як при доведенні теореми 2, на основі нерівностей (5), (10), (17), (25)–(29), та формул (11), (12), (23), приходимо до оцінки

$$J \le \sum_{s_1+s_2 \le 2n} \max_{(t,x)\in \overline{D}_{t,x}} \int_{D_{\tau,y}} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^{s_1} G_k(t,\tau)}{\partial t^{s_1}} X_k^{(s_2)}(x) R_k(\tau,y) F(\tau,y,u(\tau,y)) \right| dy d\tau \le$$

$$\le M \sum_{k=1}^{\infty} \max_{(t,y)\in \overline{D}_{t,y}} |R_k(t,y)| \sum_{s_1+s_2 \le 2n} \max_{(t,x)\in \overline{D}_{t,x}} \int_{D_{\tau,y}} \left| \frac{\partial^{s_1} G_k(t,\tau)}{\partial t^{s_1}} X_k^{(s_2)}(x) \right| dy d\tau \le$$

$$\le MWV \sum_{k=1}^{\infty} \overline{R}_k \exp\left(q\sqrt{\lambda_k}\right) = MWV \| R(t,x,y) \|_{C(\overline{D}_{t,y}, A_q^{1/2})} = BM,$$

де $\overline{R}_k = \max_{(t,y)\in \overline{D}_{t,y}} |R_k(t,y)|$.

Отже,

$$\| P_v(u(t,x)) - u^0(t,x) \|_{C^{2n}(\overline{D}_{t,x})} \le \beta + |\varepsilon| BM = r.$$

Покажемо, що P_v — оператор стиску. Нехай $u_1(t,x), u_2(t,x) \in \overline{S}(u^0(t,x), r)$, $v(t,x) \in Y$. Тоді

$$\| P_v(u_1(t,x)) - P_v(u_2(t,x)) \|_{C^{2n}(\overline{D}_{t,x})} \le |\varepsilon| BH \| u_1(t,x) - u_2(t,x) \|_{C^{2n}(\overline{D}_{t,x})} <$$

$$< \| u_1(t,x) - u_2(t,x) \|_{C^{2n}(\overline{D}_{t,x})}.$$

Очевидно, що оператор P_v неперервний по v. Із теорем 1 і 3 роботи [10, розд. 16, §3] випливає, що існує єдиний розв'язок рівняння (35), який неперервно залежить від $u^0(t,x)$. На основі умов нашої теореми та (5), (12), (17), (23) ряд (34) є абсолютно і рівномірно збіжний в області $\overline{D}_{t,x} \times \overline{D}_{\tau,y}$. Із викладеного вище одержуємо, що задача (6)–(8) має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від $f(t,x)$.

Зауваження. Розв'язок задачі (6)–(8) знаходимо як границю при $n \to \infty$ послідовності $\{u_n(t,x)\}$, де $u_1(t,x) = u^0(t,x)$, $u_{n+1}(t,x) = P_{u^0}(u_n(t,x))$, P_{u^0} — інтегро-диференціальний оператор, заданий формулою (36), а $u^0(t,x)$ — розв'язок незбуреної задачі (6)–(8).

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми* 3, *за винятком нерівності* (9). *Тоді для всіх* ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_1 = r/(BM)$, *існує розв'язок задачі* (6)–(8), *який належить замкненій кулі* $\overline{S}(u^0(t,x), r)$.

Доведення. Скористаємось принципом нерухомої точки Шаудера. Позначимо $P = P_{u^0}$. Аналогічно, як в теоремі 3, доводимо, що при $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ оператор P переводить опуклу замкнену множину $\overline{S}(u^0(t,x), r)$ в себе. Неперервність оператора P випливає з неперервності функції $F(t, x, \overline{u})$ в області D_1.

Доведемо, що множина $P(\overline{S}(u^0(t,x), r)) \equiv P(\overline{S})$ — відносно компактна. Для цього треба показати, що функції кожної з множин $E_q = \{\partial^{|q|} z(t,x) / (\partial t^{q_0} \partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_p^{q_p}),\ z(t,x) \in P(\overline{S})\}$, $|q| \le 2n$, є рівномірно обмежені і одностайно неперервні. Перше випливає з того, що $P(\overline{S}) \subset \overline{S}$. Покажемо одностайну неперервність функцій множини $E_{0,2n,0,\ldots,0}$ (для функцій решти множин доведення аналогічне). Враховуючи формулу (36), ці функції можна зобразити у вигляді

$$\frac{\partial^{2n} z(t,x)}{\partial x_1^{2n}} = \frac{\partial^{2n} u^0(t,x)}{\partial x_1^{2n}} + \varepsilon \int\limits_{D_{\tau,y}} \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau)\, R_k(\tau,y) \frac{\partial^{2n} X_k(x)}{\partial x_1^{2n}} F(\tau, y, \overline{u})\, dy\, d\tau.$$

Із (5), (12), (17), (23) і умов теореми випливає, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau)\, R_k(\tau,y) \times$ $\times\, \partial^{2n} X_k(x) / \partial x_1^{2n}$ абсолютно і рівномірно збігається в області $\overline{D}_{t,x} \times \overline{D}_{\tau,y}$ до деякої неперервної функції $\Phi(t,x,\tau,y)$. Тоді для будь-якої функції $z(t,x) \in$ $\in P(\overline{S})$ справедлива нерівність

$$\left| \frac{\partial^{2n} z(t',x')}{\partial x_1^{2n}} - \frac{\partial^{2n} z(t'',x'')}{\partial x_1^{2n}} \right| \le \left| \frac{\partial^{2n} u^0(t',x')}{\partial x_1^{2n}} - \frac{\partial^{2n} u^0(t'',x'')}{\partial x_1^{2n}} \right| +$$
$$+ |\varepsilon| M \int\limits_{D_{\tau,y}} |\Phi(t',x',\tau,y) - \Phi(t'',x'',\tau,y)|\, dy\, d\tau,$$

з якої випливає одностайна неперервність функцій множини $E_{0,2n,0,\ldots,0}$. З теореми 2 роботи [10, розд. 16, § 3] випливає розв'язність рівняння (35), а отже, і задачі (6)–(8).

5. З'ясуємо можливість виконання оцінок (25)–(27). Позначимо через $y = (y_1, \ldots, y_{2\tau}) \equiv (y_1, y')$ вектор, складений із дійсних і уявних частин коефіцієнтів A_s, де τ — кількість розв'язків нерівності $s_0 + 2s_1 \le 2n$ у цілих невід'ємних числах s_0, s_1.

Теорема 5. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbf{R}^{2\tau}$*) векторів* $y \in \mathbf{R}^{2\tau}$ *нерівності* (25) *виконуються для всіх (крім скінченного числа)* $\lambda_k \in \Lambda$ *при* $\alpha_1 = (2n-1)(p-2)/4$.

Доведення. Для дискримінанта $D(P)$ многочлена

$$P(\eta) = \sum_{s_0 + 2s_1 \le 2n} A_s (-\lambda_k)^{s_1} \eta^{s_0} \equiv \eta^{2n} + \sum_{i=0}^{2n-1} \eta^i F_i(\lambda_k, A_s)$$

справедливі такі два зображення:

$$D(P) = \prod_{1 \le m < l \le 2n} (\eta_l(\lambda_k) - \eta_m(\lambda_k))^2, \tag{38}$$

$$D(P) = (-1)^{n(2n-1)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & F_{2n-1} & \cdots & F_2 & F_1 & F_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & F_3 & F_2 & F_1 & F_0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & F_{2n-1} & F_{2n-2} & F_{2n-3} & \cdots & F_0 \\ 2n & (2n-1)F_{2n-1} & \cdots & 2F_2 & F_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2n & \cdots & 3F_3 & 2F_2 & F_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n & (2n-1)F_{2n-1} & (2n-2)F_{2n-2} & \cdots & F_1 \end{vmatrix}, \quad (39)$$

де $F_j \equiv F_j(\lambda_k, A_s)$, $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$.

Покажемо, що для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbf{R}^{2\tau}$) векторів y нерівність

$$|\operatorname{Re} D(P)| > \lambda_k^{-q-\nu/3}, \qquad 0 < \nu < 1, \quad (40)$$

де $q = (p-2n)(2n-1)/2$, виконується для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$.

Позначимо через G множину тих векторів y, які належать деякому паралелепіпеду $\Pi_{2\tau} = [l_1, m_1] \times \Pi_{2\tau-1} \subset \mathbf{R}^{2\tau}$, для яких протилежна нерівність

$$|\operatorname{Re} D(P)| \le \lambda_k^{-q-\nu/3} \quad (41)$$

виконується для безмежної множини $\lambda_k \in \Lambda$, а через G_k — множину тих y, для яких нерівність (41) справедлива при фіксованому $\lambda_k = \overline{\lambda}_k \in \Lambda$. Із формули (39) одержуємо

$$D(P) = (-1)^{n(2n-1)} (2n)^{2n} F_0^{2n-1}(\lambda_k, A_s) + U_1, \quad (42)$$

де

$$F_0(\lambda_k, A_s) = A_{0,n}(-\lambda_k)^n + \sum_{m=0}^{n-1} A_{0,m}(-\lambda_k)^m, \quad (43)$$

а U_1 — многочлен відносно $F_0(\lambda_k, A_s)$ степеня меншого, ніж $2n-1$.

Нехай $y_1 \equiv \operatorname{Re} A_{0,n} \ne 0$. На основі формул (42), (43) одержуємо, що $\operatorname{Re} D(P) = (2n)^{2n} \lambda_k^{n(2n-1)} y_1^{2n-1} + U_2$, де U_2 — поліном відносно y_1 степеня меншого, ніж $2n-1$. Тоді

$$\left| \frac{\partial^{2n-1} \operatorname{Re} D(P)}{\partial y_1^{2n-1}} \right| = (2n)^{2n} (2n-1)! \, \lambda_k^{n(2n-1)} > \lambda_k^{n(2n-1)}. \quad (44)$$

Позначимо через $G_k(y')$ множину тих значень $y_1 \in [l_1, m_1]$, для яких нерівність (41) справджується при $\lambda_k = \overline{\lambda}_k$ і фіксованому $y' \in \Pi_{2\tau-1}$. З оцінки (44) на основі леми 2 із роботи [11] випливає

$$\operatorname{mes} G_k(y') \le H_1(n) \, \overline{\lambda}_k^{-p/2-\nu/(3(2n-1))}. \quad (45)$$

Інтегруючи оцінку (45) по паралелепіпеду $\Pi_{2\tau-1}$, одержуємо

$$\operatorname{mes} G_k \le H_2 \, \overline{\lambda}_k^{-p/2-\nu/(3(2n-1))}. \quad (46)$$

З оцінок (4) та (46) випливає збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes} G_k$. Тоді на основі леми Бореля – Кантеллі [12] отримуємо, що $\operatorname{mes} G = 0$. Оскільки весь простір $\mathbf{R}^{2\tau}$ можна покрити зчисленним числом паралелепіпедів $\Pi_{2\tau}$, то твердження про виконання нерівності (40) доведено.

Із нерівності $|D(P)| \geq |\operatorname{Re} D(P)|$ та (38) і (40) одержуємо, що для майже всіх векторів y оцінка

$$\prod_{1 \leq m < l \leq 2n} |\eta_l(\lambda_k) - \eta_m(\lambda_k)| > \lambda_k^{-(p-2n)(2n-1)/4 - \nu/6} \tag{47}$$

справджується для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$. Враховуючи оцінки (17), із нерівності (47) одержуємо доведення теореми.

Теорема 6. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbf{R}^{2n}$ *) векторів* $\hat{t} = (t_1, \ldots, t_{2n}) \in [0, T]^{2n}$ *і для майже всіх векторів* $y \in \mathbf{R}^{2\tau}$ *нерівність* (26) *виконується для всіх (крім скінченного числа)* $\lambda_k \in \Lambda$ *при* $\alpha_2 = (4n^2 - 1)p/4$ *і* $Q = 2nC$, *де* $C > 0$ *— стала з нерівності* (17).

Доведення. Скористаємось схемою доведення теореми 4 із [13] (див. також [2, 4, 14]). Побудуємо функції $g_j(\lambda_k, \hat{t})$, $j = 1, \ldots, \mu(n)$, $\mu(n) = 2n^2 - n$, наступним чином:

$$g_r(\lambda_k, \hat{t}) = \sum_{j=r}^{2n} \prod_{s=1}^{r-1} (\eta_j(\lambda_k) - \eta_s(\lambda_k)) \exp((\eta_j(\lambda_k) - \eta_r(\lambda_k))\, t_{2n})\, A_{2n,j}, \tag{48}$$

$$r = 1, \ldots, 2n-1,$$

де $A_{2n,j}$ — алгебраїчне доповнення елемента $\exp(\eta_j(\lambda_k) t_{2n})$ у визначнику $\Delta(\lambda_k)$;

$$g_{2n+r-1}(\lambda_k, \hat{t}) = \prod_{s=1}^{2n-1} (\eta_{2n}(\lambda_k) - \eta_s(\lambda_k)) \sum_{j=r}^{2n-1} \prod_{s=1}^{r-1} (\eta_j(\lambda_k) - \eta_s(\lambda_k)) \times$$

$$\times \exp((\eta_j(\lambda_k) - \eta_r(\lambda_k))\, t_{2n-1})\, A_{2n-1,j}, \quad r = 1, \ldots, 2n-2, \tag{49}$$

де $A_{2n-1,j}$ — алгебраїчне доповнення елемента $\exp(\eta_j(\lambda_k) t_{2n-1})$ у визначнику $A_{2n,2n}$;

$$g_{\mu(n)+r-3}(\lambda_k, \hat{t}) = \prod_{m=1}^{2n-3} \prod_{s=1}^{2n-m} (\eta_{2n-m+1}(\lambda_k) - \eta_s(\lambda_k)) \sum_{j=r}^{3} \prod_{q=1}^{r-1} (\eta_j(\lambda_k) - \eta_q(\lambda_k)) \times$$

$$\times \exp((\eta_j(\lambda_k) - \eta_r(\lambda_k))\, t_3) A_{3,j}, \quad r = 1, 2, \tag{50}$$

де $A_{3,j}$ — алгебраїчне доповнення елемента $\exp(\eta_j(\lambda_k) t_3)$ у визначнику $A_{4,4}$;

$$g_{\mu(n)}(\lambda_k, \hat{t}) =$$

$$= \prod_{\substack{1 \leq r < s \leq 2n \\ s \neq 2}} (\eta_s(\lambda_k) - \eta_r(\lambda_k))(\exp((\eta_2(\lambda_k) - \eta_1(\lambda_k)) t_2 + \eta_1(\lambda_k) t_1) - \exp(\eta_2(\lambda_k) t_1)). \tag{51}$$

Із (51) знаходимо

$$\frac{\partial g_{\mu(n)}(\lambda_k, \hat{t})}{\partial t_2} = B(\lambda_k) \exp((\eta_2(\lambda_k) - \eta_1(\lambda_k)) t_2 + \eta_1(\lambda_k) t_1), \tag{52}$$

де

$$B(\lambda_k) = \prod_{1 \le r < s \le 2n} (\eta_s(\lambda_k) - \eta_r(\lambda_k)).$$

Позначимо $\xi_m(\lambda_k) = \operatorname{Re} \eta_m(\lambda_k)$, $\chi_m(\lambda_k) = \operatorname{Im} \eta_m(\lambda_k)$, $m = 1, \ldots, 2n$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ $\xi_1(\lambda_k) \le \xi_2(\lambda_k) \le \ldots \le \xi_{2n}(\lambda_k)$. Враховуючи нерівність (47), в якій покладемо $\nu = 6\delta / (\mu(n)+1)$, $0 < \delta < 1/3$, із (52) одержуємо, що для майже всіх векторів $y \in \mathbf{R}^{2\tau}$ оцінка

$$\left| \frac{\partial g_{\mu(n)}(\lambda_k, \hat{t})}{\partial t_2} \right| > \lambda_k^{-(p-2n)(2n-1)/4-\nu_1} \exp(\xi_1(\lambda_k) t_1), \tag{53}$$

де $\nu_1 = \delta / (\mu(n)+1)$, справджується для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$. За нерівністю (53) інтервал $[0, T]$ розбивається на підмножини (які, можливо, перетинаються) A_1 і B_1, $A_1 \cup B_1 = [0, T]$, такі, що

$$(\forall t_2 \in A_1) \quad \left| \operatorname{Re} \frac{\partial g_{\mu(n)}(\lambda_k, \hat{t})}{\partial t_2} \right| > \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_k^{-(p-2n)(2n-1)/4-\nu_1} \exp(\xi_1(\lambda_k) t_1), \tag{54}$$

$$(\forall t_2 \in B_1) \quad \left| \operatorname{Im} \frac{\partial g_{\mu(n)}(\lambda_k, \hat{t})}{\partial t_2} \right| > \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_k^{-(p-2n)(2n-1)/4-\nu_1} \exp(\xi_1(\lambda_k) t_1). \tag{55}$$

Покладемо $\nu_j = j\delta / (\mu(n)+1)$, $j = 2, \ldots, \mu(n)+1$. На основі (54) та леми 2 із [11] для кожного з інтервалів множини A_1 одержуємо оцінку

$$\operatorname{mes}\left\{ t_2 : \left| \operatorname{Re} g_{\mu(n)}(\lambda_k, \hat{t}) \right| < \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_k^{-((2n+1)p-2n(2n-1)+2)/4-\nu_2} \exp(\xi_1(\lambda_k) t_1) \right\} \le$$
$$\le H_3 \lambda_k^{-(p+1)/2-(\nu_2-\nu_1)}.$$

Оскільки

$$\exp\left[-((\xi_2(\lambda_k) - \xi_1(\lambda_k)) t_2 + \xi_1(\lambda_k) t_1)\right] \operatorname{Re} \partial g_{\mu(n)}(\lambda_k, \hat{t}) / \partial t_2 =$$
$$= \operatorname{Re} B(\lambda_k) \cos((\chi_2(\lambda_k) - \chi_1(\lambda_k)) t_2 + \chi_1(\lambda_k) t_1) -$$
$$- \operatorname{Im} B(\lambda_k) \sin((\chi_2(\lambda_k) - \chi_1(\lambda_k)) t_2 + \chi_1(\lambda_k) t_1)$$

як функція аргумента t_2 є періодична з періодом $2\pi / |\chi_2(\lambda_k) - \chi_1(\lambda_k)|$, то число інтервалів множини A_1 не перевищує $1 + T|\chi_2(\lambda_k) - \chi_1(\lambda_k)| / \pi \le H_4 \sqrt{\lambda_k}$. Отже,

$$\operatorname{mes}\left\{ t_2 \in A_1 : \left| \operatorname{Re} g_{\mu(n)}(\lambda_k, \hat{t}) \right| < \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_k^{-((2n+1)p-2n(2n-1)+2)/4-\nu_2} \exp(\xi_1(\lambda_k) t_1) \right\} \le$$
$$\le H_5 \lambda_k^{-p/2-(\nu_2-\nu_1)}, \qquad H_5 = H_3 H_4. \tag{56}$$

Аналогічними міркуваннями з нерівності (55) одержуємо

$$\operatorname{mes}\left\{ t_2 \in B_1 : \left| \operatorname{Im} g_{\mu(n)}(\lambda_k, \hat{t}) \right| < \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_k^{-((2n+1)p-2n(2n-1)+2)/4-\nu_2} \exp(\xi_1(\lambda_k) t_1) \right\} \le$$
$$\le H_6 \lambda_k^{-p/2-(\nu_2-\nu_1)}. \tag{57}$$

Із (56) і (57) випливає

$$\operatorname{mes}\left\{ t_2 \in [0, T] : \left| g_{\mu(n)}(\lambda_k, \hat{t}) \right| < \lambda_k^{-((2n+1)p-2n(2n-1)+2)/4-\nu_2} \exp(\xi_1(\lambda_k) t_1) \right\} \le$$
$$\le (H_5 + H_6) \lambda_k^{-p/2-(\nu_2-\nu_1)}. \tag{58}$$

Інтегруючи оцінку (58) в кубі $[0, T]^{2n-1}$ за змінними $t_1, t_3, \ldots t_{2n}$, одержуємо

$$\operatorname{mes}\left\{\hat{t} \in [0,T]^{2n} : \left|g_{\mu(n)}(\lambda_k, \hat{t})\right| < \lambda_k^{-((2n+1)p-2n(2n-1)+2)/4-\nu_2} \exp(\xi_1(\lambda_k)t_1)\right\} \leq$$
$$\leq H_7 \lambda_k^{-p/2-(\nu_2-\nu_1)}.$$

Аналогічно, переходячи послідовно від оцінки для $\left|g_{\mu(n)}(\lambda_k, \hat{t})\right|$ до оцінки для $\left|g_{\mu(n)-1}(\lambda_k, \hat{t})\right|$ і т.д., знаходимо, що для майже всіх векторів y нерівність

$$\left|g_1(\lambda_k, \hat{t})\right| < \lambda_k^{-(4n^2-1)p/4-\delta} \exp\left(\xi_1(\lambda_k) \sum_{i=1}^{2n-1} t_i\right)$$

справедлива для множини векторів $\hat{t} \in [0,T]^{2n}$ (позначимо її $M(\lambda_k)$), міра якої має оцінку

$$\operatorname{mes} M(\lambda_k) < \alpha \lambda_k^{-p/2-\nu_1}, \quad \alpha > 0; \tag{59}$$

при цьому використовується той факт, що кількість інтервалів зміни компоненти $t_s \in [0,T]$, на яких виконуються нерівності вигляду

$$\left|\operatorname{Re} \frac{\partial g_r(\lambda_k, \hat{t})}{\partial t_s}\right| > \frac{l(\lambda_k)}{\sqrt{2}}, \quad r = 1, \ldots, \mu(n) - 1, \tag{60}$$

або

$$\left|\operatorname{Im} \frac{\partial g_r(\lambda_k, \hat{t})}{\partial t_s}\right| > \frac{l(\lambda_k)}{\sqrt{2}}, \quad r = 1, \ldots, \mu(n) - 1, \tag{61}$$

при фіксованих λ_k і $t_1, \ldots, t_{s-1}, t_{s+1}, \ldots, t_{2n}$, не перевищує $C\sqrt{\lambda_k}$, $C = \text{const} > 0$. Підсумовуючи оцінку (59) по всіх $k \in \mathbf{N}$, одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes} M(\lambda_k) < \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-p/2-\nu_1}. \tag{62}$$

Із оцінок (4) випливає збіжність ряду у правій частині нерівності (62). Тоді на основі леми Бореля – Кантеллі [12] одержуємо, що для майже всіх векторів $\hat{t} \in [0,T]^{2n}$ і для майже всіх векторів $y \in \mathbf{R}^{2\tau}$ оцінка

$$\left|g_1(\lambda_k, \hat{t})\right| \geq \lambda_k^{-(4n^2-1)p/4-\delta} \exp\left(\xi_1(\lambda_k) \sum_{i=1}^{2n-1} t_i\right) \tag{63}$$

справджується для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$.

Оскільки $|\Delta(\lambda_k)| = \exp(\xi_1(\lambda_k)t_{2n})\left|g_1(\lambda_k, \hat{t})\right|$, то з оцінки (63) на основі (17) отримуємо доведення теореми.

Покажемо справедливість використаного вище факту про кількість ітервалів зміни величини t_s, $s = 3, 4, \ldots, 2n$, на яких справджуються нерівності (60) або (61). Доведемо це для випадку, коли $s = 2n$ та $1 \leq r \leq 2n-1$; для решти випадків доведення аналогічне. Розглянемо функції (48). Очевидно,

$$\frac{\partial g_r(\lambda_k, \hat{t})}{\partial t_{2n}} = \sum_{j=r+1}^{2n} \prod_{s=1}^{r} (\eta_j(\lambda_k) - \eta_s(\lambda_k)) \exp((\eta_j(\lambda_k) - \eta_r(\lambda_k))\, t_{2n})\, A_{2n,j};$$

$$v_r(\lambda_k, t_{2n}) \equiv \operatorname{Re} \frac{\partial g_r(\lambda_k, \hat{t})}{\partial t_{2n}} = \sum_{j=r+1}^{2n} \exp((\xi_j(\lambda_k) - \xi_r(\lambda_k))\, t_{2n}) \times$$

$$\times\left(\operatorname{Re}\left(\prod_{s=1}^{r}(\eta_j(\lambda_k)-\eta_s(\lambda_k))A_{2n,j}\right)\cos((\chi_j(\lambda_k)-\chi_r(\lambda_k))\,t_{2n})-\right.$$

$$\left.-\operatorname{Im}\left(\prod_{s=1}^{r}(\eta_j(\lambda_k)-\eta_s(\lambda_k))A_{2n,j}\right)\sin((\chi_j(\lambda_k)-\chi_r(\lambda_k))\,t_{2n})\right). \tag{64}$$

Розглянемо функцію $y_k(t_{2n})\equiv\dfrac{\partial}{\partial t_{2n}}v_r(\lambda_k,t_{2n})$. Вона зображається у вигляді

$$y_k(t_{2n}) = \sum_{j=r+1}^{2n}\exp(\alpha_{jr}\sqrt{\lambda_k}\,t_{2n})\left(A_j(k)\cos(\beta_{jr}\sqrt{\lambda_k}\,t_{2n})+B_j(k)\sin(\beta_{jr}\sqrt{\lambda_k}\,t_{2n})\right),$$

де $\alpha_{jr}=(\xi_j(\lambda_k)-\xi_r(\lambda_k))\,/\,\sqrt{\lambda_k}$, $\beta_{jr}=(\chi_j(\lambda_k)-\chi_r(\lambda_k))\,/\,\sqrt{\lambda_k}$, $|\alpha_{jr}|\le 2C$, $|\beta_{jr}|\le 2C$, а $A_j(k)$ і $B_j(k)$ не залежать від t_{2n}. Оцінимо зверху кількість нулів на $[0, T]$ цієї функції.

Функція $y_k(t_{2n})$ має на $[0, T]$ стільки ж нулів, скільки їх має на інтервалі $[0, \sqrt{\lambda_k}\,T]$ функція

$$\bar{y}_k(z) = \sum_{j=r+1}^{2n}\exp(\alpha_{jr}z)\left(A_j(k)\cos(\beta_{jr}z)+B_j(k)\sin(\beta_{jr}z)\right).$$

Зауважимо, що $\bar{y}_k(z)$ є розв'язком такого диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\prod_{j=r+1}^{2n}\left(\frac{d^2}{dz^2}-2\alpha_{jr}\frac{d}{dz}+\alpha_{jr}^2+\beta_{jr}^2\right)y(z) = 0. \tag{65}$$

Згідно з теоремою Валле – Пуссена [15] існує стала $h_r>0$ така, що довільний нетривіальний розв'язок рівняння (65) має на інтервалі довжини h_r не більше, ніж $4n-2r-1$ нулів. Тому число нулів функції $\bar{y}_k(z)$ на інтервалі $[0, \sqrt{\lambda_k}\,T]$, а отже, і число функції $y_k(t_{2n})$ на інтервалі $[0, T]$, не перевищує $T(4n-2r-1)\times\sqrt{\lambda_k}\,/\,h_r$. Це означає, що функція $v_r(\lambda_k,t_{2n})$, визначена формулою (64), має на відрізку $[0, T]$ не більше, ніж $4n-2r-1$ точок екстремума. Звідси випливає, що кількість інтервалів зміни величини $t_{2n}\in[0,T]$, на яких виконується нерівність (60), не перевищує $\text{const}\sqrt{\lambda_k}$. Для нерівності (61) доведення аналогічне.

Теорема 7. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbf{R}^{4n}$*) векторів* $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_{4n})$, *складених із дійсних і уявних частин коефіцієнтів* a_r, $r = 0, 1, \ldots, 2n-1$, *нерівності* (27) *виконуються для всіх (крім скінченного числа)* $\lambda_k\in\Lambda$ *при* $\alpha_3=p/2$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5 із [11].

6. Розглянемо частинний випадок задачі (6)-(8), коли для коренів рівняння (16) справджуються нерівності

$$-\gamma\ln\lambda_k < \operatorname{Re}\eta_m(\lambda_k) < F,\quad m=1,\ldots,2n;\ \gamma>0;\ F\in\mathbf{R};\ \lambda_k\in\Lambda. \tag{66}$$

При виконанні умов (66) справедливе таке твердження.

Теорема 8. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbf{R}^{2n}$*) векторів* $\hat{t}\in[0,T]^{2n}$ *і для майже всіх векторів* $y\in\mathbf{R}^{2\tau}$ *нерівність*

$$|\Delta(\lambda_k)| > \lambda_k^{-(4n^2-1)p/4-(2n^2+n)\gamma T-\nu}, \quad 0<\nu<1, \tag{67}$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$.

Доведення з незначними змінами повторює доведення теореми 6.

На основі оцінок (66) і (67) встановлено однозначну розв'язність задачі (6)–(8), якщо функції $f(t,x)$ і $R(t,x,y)$ неперервні разом з усіма похідними за змінними $x_1,\ldots,x_p$ до порядку 2β включно ($\beta=[(4n^2-2n+3)p/2+(2n^2+$ $+n)\gamma T]+3n$; $[a]$ — ціла частина числа a) в областях $\overline{D}_{t,x}$ і D_2 відповідно і задовольняють умови вигляду (8), де $m=0,1,\ldots,\beta-1$.

1. *Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для дифференциальных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, – № 6. – С. 728 – 734.
2. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев.: Наук. думка, 1965. – 800 с.
4. *Василишин П. Б., Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**. – № 11. – С. 1468 – 1476.
5. *Пташник Б. И., Полищук В. Н.* Периодические решения системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа // Proc. 8-th intern. conf. nonlinear oscillations (Prague, Sept. 11–15, 1978). – Prague: Academia, 1979. – Vol. 2. – P. 1017 – 1022.
6. *Пташник Б. И., Фиголь В. В.* Краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – Вып. 22. – С. 7 – 11.
7. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 2. – С. 883–896.
8. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
9. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольной функции в ряды. – Петроград, 1917. – 308 + XIV с.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
11. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Диффререренц. уравнения. – 1977. – **13**, №4. – С. 637 – 645.
12. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 144 с.
13. *Пташник Б. Й., Фіголь В. В., Штабалюк П. І.* Розв'язність, стійкість і регуляризація багатоточкової задачі для гіперболічних рівнянь. // Мат. студії. Пр. Львів. мат. тов-ва. – 1991. – Вип. 1. – С. 16 – 32.
14. *Пташник Б. Й., Штабалюк П. І.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних // Мат. методи и физ.-мех. поля. – 1992. – Вып. 35. – С. 210 – 215.
15. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.

Одержано 16.04.97