УДК 517. 5

Б. В. Винницький, В. Л. Шаран (Дрогоб. пед. ін-т)

ОПИС ПОСЛІДОВНОСТЕЙ НУЛІВ ОДНОГО КЛАСУ ФУНКЦІЙ, АНАЛІТИЧНИХ У ПІВПЛОЩИНІ*

The sequences of zeros are described for functions $f \not\equiv 0$ which are analytic in the right half-plane and satisfy the condition $|f(z)| \le O(1) \exp\big(\sigma |z| \eta(|z|)\big)$, $0 \le \sigma < +\infty$, $\operatorname{Re} z > 0$, where $\eta : [0; +\infty) \to (-\infty; +\infty)$ is a function of bounded variation.

Описано послідовності нулів аналітичних у правій півплощині функцій $f \not\equiv 0$, які задовольняють умову $|f(z)| \le O(1) \exp\big(\sigma |z| \eta(|z|)\big)$, $0 \le \sigma < +\infty$, $\operatorname{Re} z > 0$, де $\eta : [0; +\infty) \to (-\infty; +\infty)$ — функція обмеженої варіації.

Нехай (λ_n) — довільна послідовність комплексних чисел, які лежать у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, $0 \le \sigma < +\infty$ — задане число, $\eta : [0; +\infty) \to (-\infty; +\infty)$ — функція обмеженої варіації і

$$\psi(t) = \int_1^t \frac{\eta(x)}{x} dx.$$

Через $c, c_0, c_1, \ldots$ позначаємо додатні сталі.

Метою статті є доведення наступного твердження.

Теорема. *Для того щоб існувала аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція $f \not\equiv 0$, яка має нулі в усіх точках λ_n і при $z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+$ задовольняє умову $|f(z)| \le c_1 \exp(\sigma r \eta(r))$, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\sum_{|\lambda_n| \le 1} \operatorname{Re} \lambda_n < +\infty; \tag{1}$$

$$\varlimsup_{r \to +\infty} (S(r) - (\sigma/\pi)\psi(r)) < +\infty, \tag{2}$$

де

$$S(r) = \sum_{1 < |\lambda_n| \le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \cos \varphi_n, \quad \varphi_n = \arg \lambda_n, \quad |\varphi_n| < \frac{\pi}{2}.$$

Якщо $\eta(t) \equiv 1$, то теорему доведено одним із авторів цієї статті [1]. У випадку $\operatorname{Im} \lambda_n = 0$ і $n = 0(\lambda_n)$ при $n \to +\infty$ (тоді умова (1) зайва) теорему доведено Ж.-П. Каханом [2, 3]. Вказані вище результати із [1 – 3] є узагальненням відомих результатів В. Фукса [4, 5].

Для доведення теореми нам будуть потрібні наступні леми.

Лема 1. *Нехай функція $f \not\equiv 0$, яка має нулі в точках $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$, є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ і обмеженою в кожному півкрузі $Q_R = \{z : |z| < R, \operatorname{Re} z > 0\}$, $0 < R < \infty$. Тоді для всіх $r \in [1; +\infty)$ маємо*

$$\sum_{|\lambda_n| \le r} \operatorname{Re} \lambda_n < +\infty; \tag{3}$$

*Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) грант № APU071012.

$$S(r) \le \frac{1}{\pi r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln\left|f(re^{i\varphi})\right|\cos\varphi\, d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_1^r \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|f(it)f(-it)|\,dt + c_1. \tag{4}$$

Це твердження міститься в [6, с. 26] в ([6] відповідні результати сформульовані для верхньої півплощини). Зауважимо, що (3) встановлюється в [6] в ході доведення теореми 2.1, а для отримання (4) потрібно врахувати монотонність сингулярної граничної функції.

Лема 2. *Якщо функція* $\eta : [0; +\infty) \to (-\infty; +\infty)$ *є вимірною і обмеженою та виконується умова* (2), *то добуток*

$$G(z) = \prod_{|\lambda_n|>1} W_n(z), \quad W_n(z) = \frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\bar{\lambda}_n}\exp\left(\frac{z}{\lambda_n}+\frac{z}{\bar{\lambda}_n}\right) \tag{5}$$

абсолютно і рівномірно збігається на кожному компакті із $\mathbb{C}_+$ *і для деякого* $c_2 > 0$ *виконується співвідношення*

$$|G(z)| \le c_2 \exp\left((2\sigma/\pi)x\psi(r) + c_2 x\right), \quad z = x+iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+. \tag{6}$$

Доведення. Відзначимо, що [1, 7]

$$S(r) \ge \frac{3s(r/2)}{2r}, \quad S(r) = \int_1^r s(t)\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{r^2}\right)dt, \tag{7}$$

де

$$s(t) = \sum_{1<|\lambda_n|\le t} \cos\varphi_n.$$

Із (2) і (7) маємо

$$s(t)/t \le c_3\psi(t) + c_3', \quad t \ge t_0. \tag{8}$$

Із (2) також випливає [1], що для кожного ρ, $1 < \rho < +\infty$,

$$\sum_{1<|\lambda_n|\le\rho} \operatorname{Re}\lambda_n < +\infty, \quad \sum_{1<|\lambda_n|\le\rho} \frac{\cos\varphi_n}{|\lambda_n|} < +\infty. \tag{9}$$

Оскільки η — обмежена, то для деякого σ_1, $0 < \sigma_1 < +\infty$, виконується

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \left(S(r) - (\sigma_1/\pi)\ln r\right) < +\infty \tag{10}$$

і тому [1] добуток (5) рівномірно збігається на кожному компакті із $\mathbb{C}_+$. Таким чином, нам залишилось довести справедливість оцінки (6). Якщо $S(r) = O(1)$ при $r \in [1; +\infty)$, то $G(z)$ [1] тільки множником $\exp(cz)$ відрізняється від добутку Бляшке для $\mathbb{C}_+$ і в цьому випадку оцінка (6) очевидна, тому що із (2) випливає, що при деякому $c_4 > 0$ для всіх $r \in [0; +\infty)$ $(\sigma/\pi)\psi(r) \ge -c_4$. Тому вважаємо, що $S(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Тоді $\psi(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$ і $0 < \sigma < < +\infty$. Завдяки (2) знайдеться стала c_0, $1 < c_0 < +\infty$ така, що

$$S(r) \le (\sigma/\pi)\psi(r) + c_0, \quad r \ge 1. \tag{11}$$

Функція $S(r)$ неперервна на проміжку $(1;+\infty)$ і $\lim_{r\to 1+} S(r)=0$. Нехай $r_0 = \max\{r\colon S(r)=0\}$. На проміжку $[r_0;+\infty)$ функція $S(r)$ зростаюча [1]. Нехай $\psi_1(t)=\min_{x\geq t}\psi(x)$, S^{-1} — функція обернена до звуження S на $[r_0;+\infty)$ і $S_1(r)=S^{-1}\big((\sigma/\pi)\psi_1(16r)+c_0\big)$. Функція ψ_1 є неспадною і неперервною на $[r_0;+\infty)$, $\psi_1(r)\to+\infty$ при $r\to+\infty$ і $\psi_1(r)\leq\psi(r)$. Нехай $\psi_1^{-1}(t)$ — найменший розв'язок рівняння $\psi_1(x)=t$ із проміжку $[r_0;+\infty)$. Тоді $\psi_1\big(\psi_1^{-1}(t)\big)=t$, $\psi_1^{-1}(\psi_1(t))\leq t$, ψ_1^{-1} — зростаюча функція на $[t_0;+\infty)$ і $\psi_1^{-1}(t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$. Із (11) маємо

$$S(r)\leq(\sigma/\pi)\psi_1(r)+c_0,\qquad r\geq r_0. \tag{12}$$

Справді, із (11) маємо, що для всіх r_1 і r_2, $1\leq r_1\leq r_2$, виконується $S(r_1)\leq\leq(\sigma/\pi)\psi(r_2)+c_0$. Тому $S(r_1)\leq(\sigma/\pi)\min_{r_2\geq r_1}\psi(r_2)+c_0$, звідси випливає (12). Із (12) отримаємо $S_1(r)\geq 16r$ при $r\geq r_0$. Очевидно, що

$$|G(z)| = \exp\left(\sum_{1<|\lambda_n|\leq S_1(r)/2}\ln|W_n(z)|+\sum_{|\lambda_n|>S_1(r)/2}\ln|W_n(z)|\right).$$

Оскільки

$$\frac{4x|\lambda_n|\cos\varphi_n}{\left|\bar\lambda_n+z\right|^2}<1\qquad\text{при}\ \ z\neq\lambda_n\ \text{ і }\ z\in\mathbb{C}_+,$$

то, використовуючи нерівність $\ln(1-t)\leq -t$, $t\in[0;1)$, при $|\lambda_n|\leq S_1(r)/2$ і $z\neq\lambda_n$ маємо

$$\ln|W_n(z)| = 2x\frac{\cos\varphi_n}{|\lambda_n|}+\frac12\ln\left(1-\frac{4x|\lambda_n|\cos\varphi_n}{\left|\bar\lambda_n+z\right|^2}\right)\leq$$

$$\leq 2x\frac{\cos\varphi_n}{|\lambda_n|}-\frac{2x|\lambda_n|\cos\varphi_n}{(S_1(r)9/16)^2},\qquad r\geq r_0.$$

Отже, враховуючи, що $|\eta(t)|\leq c$, отримуємо

$$\sum_{1<|\lambda_n|\leq S_1(r)/2}\ln|W_n(z)|\leq 2x\sum_{1<|\lambda_n|\leq S_1(r)/2}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{S_1^2(r)}\right)\cos\varphi_n\leq$$

$$\leq 2xS(S_1(r)) = \frac{2\sigma}{\pi}x\psi_1(r)+2c_0x\leq\frac{2\sigma}{\pi}x\psi(16r)+2c_0x\leq$$

$$\leq\frac{2\sigma}{\pi}x\psi(r)+c_4x,\qquad r\geq r_0. \tag{13}$$

Відомо [8, 9], що при $|\lambda_n|>8r$

$$\ln|W_n(z)|\leq\frac{c_5xr\cos\varphi_n}{|\lambda_n|^2},\qquad z\in\mathbb{C}_+, \tag{14}$$

де $\varphi_n=\arg\lambda_n$, $|\varphi_n|<\dfrac{\pi}{2}$.

Тому при $r \geq r_0$ знаходимо

$$\sum_{|\lambda_n| > S_1(r)/2} \ln |W_n(z)| \leq c_6 x \sup_{r \geq r_0} \left\{ r \sum_{|\lambda_n| > S_1(r)/2} \frac{\cos \varphi_n}{|\lambda_n|^2} \right\}. \tag{15}$$

Нехай $R_n = 2^n$ і $k = k(r)$ таке натуральне число, що

$$\psi_1^{-1}((\pi/\sigma)(S(R_k) - c_0)) \leq 16r < \psi_1^{-1}((\pi/\sigma)(S(R_{k+1}) - c_0)).$$

Звідси $S_1(r) \geq R_k$. Враховуючи це, із (15) отримуємо

$$\sum_{|\lambda_n| > S_1(r)/2} \ln |W_n(z)| \leq c_7 d_0 x, \tag{16}$$

де

$$d_0 = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \psi_1^{-1}((\pi/\sigma)(S(R_{k+1}) - c_0)) \tau(R_k) \right\}, \qquad \tau(t) = \sum_{|\lambda_n| > t/2} \frac{\cos \varphi_n}{|\lambda_n|^2}.$$

Із (10) випливає [1], що $G(z)$ обмежена в кожному півкрузі Q_{2r_0}. Тому із (13) і (16) при $z \in \mathbb{C}_+$ маємо

$$|G(z)| \leq c_8 \exp\left((2\sigma/\pi) x \psi(r) + c_8 x (1 + d_0)\right). \tag{17}$$

Покажемо, що $d_0 < +\infty$. Із (8) випливає, що $\tau(t) < +\infty$ при $t > 0$. Нехай

$$y_k = 1/\psi_1^{-1}\left((\pi/\sigma)(S(R_{k+1}) - c_0)\right), \qquad x_k = \tau(R_k).$$

Очевидно, що $x_k \to 0$ і $y_k \to 0$ при $k \to +\infty$. Крім цього,

$$x_k - x_{k+1} = \sum_{R_k/2 < |\lambda_n| \leq R_{k+1}/2} \frac{\cos \varphi_n}{|\lambda_n|^2} \leq \frac{c_9}{R_{k+2}^3} \sum_{|\lambda_n| \leq R_k} |\lambda_n| \cos \varphi_n,$$

$$S(R_{k+2}) - S(R_{k+1}) = \sum_{R_{k+1} < |\lambda_n| \leq R_{k+2}} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{R_{k+2}^2} \right) \cos \varphi_n +$$

$$+ \sum_{|\lambda_n| \leq R_{k+1}} |\lambda_n| \left(\frac{1}{R_{k+1}^2} - \frac{1}{R_{k+2}^2} \right) \cos \varphi_n \geq \frac{c_{10}}{R_{k+2}^2} \sum_{|\lambda_n| \leq R_k} |\lambda_n| \cos \varphi_n.$$

Оскільки функція η обмежена, то $\psi(x) - \psi(y) \leq c(\ln x - \ln y)$, $0 < y < x$. Враховуючи це, отримуємо

$$\psi_1(b) - \psi_1(a) = \min_{t \geq b} \psi(t) - \min_{u \geq a} \psi(u) = \max_{u \geq a} \min_{t \geq b} (\psi(t) - \psi(u)) \leq$$

$$\leq c \max_{u \geq a} \min_{t \geq b} (\ln t - \ln u) = c(\ln b - \ln a), \qquad 0 < a < b < +\infty. \tag{18}$$

Поклавши $a = \psi_1^{-1}((\pi/\sigma)(S(R_{k+1}) - c_0))$ і $b = \psi_1^{-1}((\pi/\sigma)(S(R_{k+2}) - c_0))$, із (18) одержуємо

$$\frac{\psi_1^{-1}((\pi/\sigma)(S(R_{k+2}) - c_0))}{\psi_1^{-1}((\pi/\sigma)(S(R_{k+1}) - c_0))} \geq \exp((\pi/c\sigma)(S(R_{k+2}) - S(R_{k+1}))). \tag{19}$$

Тому, використовуючи (19) і нерівність $e^x - 1 \geq x$, $x \in [0; +\infty)$, одержуємо

$$y_k - y_{k+1} = \frac{1}{\psi_1^{-1}((\pi/\sigma)(S(R_{k+1}) - c_0))} - \frac{1}{\psi_1^{-1}((\pi/\sigma)(S(R_{k+1}) - c_0))} =$$

$$= \frac{\psi_1^{-1}((\pi/\sigma)(S(R_{k+2}) - c_0)) / \psi_1^{-1}((\pi/\sigma)(S(R_{k+1}) - c_0)) - 1}{\psi_1^{-1}((\pi/\sigma)(S(R_{k+2}) - c_0))} \geq$$

$$\geq \frac{\exp((\pi/c\sigma)(S(R_{k+2}) - S(R_{k+1})) - 1}{\psi_1^{-1}((\pi/\sigma)(S(R_{k+2}) - c_0))} \geq \frac{c_{11} \sum\limits_{|\lambda_n| \leq R_k} |\lambda_n| \cos\varphi_n}{R_{k+2}^2 \psi_1^{-1}((\pi/\sigma)(S(R_{k+2}) - c_0))}.$$

Отже, враховуючи (12), маємо

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{x_k - x_{k+1}}{y_k - y_{k+1}} \leq c_{12} - \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\psi_1^{-1}((\pi/\sigma)(S(R_{k+2}) - c_0))}{R_{k+2}} < +\infty. \tag{20}$$

Скористаємося, як і в [1], теоремою Штольца [10, с. 67] в наступній редакції: *якщо* $x_k \geq x_{k+1} > 0$, $y_k > y_{k+1} > 0$ *при* $k \geq k_0$ *і* $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = \lim\limits_{k\to+\infty} y_k = 0$, *то*

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \frac{x_k}{y_k} \leq \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{x_k - x_{k+1}}{y_k - y_{k+1}}$$

і тому $d_0 < +\infty$. Отже, лему 2 доведено.

Для доведення достатньої частини теореми потрібно побудувати аналітичну в $\mathbb{C}_+$ функцію $L(z)$, яка б при $z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+$ задовольняла умову

$$|L(z)| \leq \exp(-(2\sigma/\pi)x\psi(r) + \sigma r\eta(r)). \tag{21}$$

Таку функцію побудував Ж.-П. Кахан [2, с. 115], використовуючи результати Л. Альфорса про оцінку конформних відображень. Проте вважаємо за доцільне побудувати таку функцію L іншим способом, який на наш погляд є простішим.

Лема 3. *Нехай* $\eta : [0; +\infty) \to (-\infty; +\infty)$ — *функція обмеженої варіації. Тоді існує аналітична в* $\mathbb{C}_+$ *функція* $L_1(z)$ *така, що при* $z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+$

$$|L_1(z)| = \exp(-(2\sigma/\pi)x\psi(r) + (2\sigma/\pi)r\eta(r)\varphi\sin\varphi + \delta_0(r, \varphi))$$

і для всіх $r \geq 0$ *і* $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ *виконується* $|\delta_0(r, \varphi)| \leq \delta(r)$, *де функція* $\delta(r)$ *неспадна на* $[0; +\infty)$ *і задовольняє умову*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\delta(r)}{r^2} dr < +\infty. \tag{22}$$

Доведення. Нехай

$$L_1(z) = \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} \int_1^{+\infty} \left(\frac{z}{t+z} - \frac{z}{t}\right)\eta(t)\,dt\right).$$

Тоді

$$|L_1(z)| = \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} \int_1^{+\infty} \left(\frac{tx + r^2}{t^2 + 2tx + r^2} - \frac{x}{t}\right)\eta(t)\,dt\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \int_1^r \frac{\eta(t)}{t} dt + \frac{2\sigma}{\pi} r \int_1^r \frac{t\cos\varphi + r}{t^2 + 2tr\cos\varphi + r^2} \eta(t)\,dt - \right.$$

$$- \frac{2\sigma}{\pi} r^2 \int_r^{+\infty} \frac{t\cos 2\varphi + r\cos\varphi}{t\left(t^2 + 2tr\cos\varphi + r^2\right)} \eta(t)\,dt \Biggr) = \exp\Biggl(-\frac{2\sigma}{\pi} x\psi(r) +$$

$$+ \frac{2\sigma}{\pi} r\eta(r) \int_1^r \frac{t\cos\varphi + r}{t^2 + 2tr\cos\varphi + r^2}\,dt - \frac{2\sigma}{\pi} r^2 \eta(r) \int_r^{+\infty} \frac{t\cos 2\varphi + r\cos\varphi}{t\left(t^2 + 2tr\cos\varphi + r^2\right)}\,dt +$$

$$+ \frac{2\sigma}{\pi} r \int_1^r \frac{t\cos\varphi + r}{t^2 + 2tr\cos\varphi + r^2} (\eta(t) - \eta(r))\,dt -$$

$$- \frac{2\sigma}{\pi} r^2 \int_r^{+\infty} \frac{t\cos 2\varphi + r\cos\varphi}{t\left(t^2 + 2tr\cos\varphi + r^2\right)} (\eta(t) - \eta(r))\,dt \Biggr) =$$

$$= \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x\psi(r) + \frac{2\sigma}{\pi} r\eta(r, \varphi)\varphi\sin\varphi + \delta_0(r, \varphi)\right),$$

де

$$|\delta_0(r, \varphi)| = \Biggl| \frac{2\sigma}{\pi} r \int_1^r \frac{t\cos\varphi + r}{t^2 + 2tr\cos\varphi + r^2} (\eta(t) - \eta(r))\,dt -$$

$$- \frac{2\sigma}{\pi} r\eta(r) \int_0^1 \frac{(t\cos\varphi + r)\,dt}{t^2 + 2t\cos\varphi + r^2} - \frac{2\sigma}{\pi} r^2 \int_r^{+\infty} \frac{t\cos 2\varphi + r\cos\varphi}{t\left(t^2 + 2tr\cos\varphi + r^2\right)} (\eta(t) - \eta(r))\,dt \Biggr| \le$$

$$\le \frac{2\sigma}{\pi} \int_1^r |\eta(t) - \eta(r)|\,dt + \frac{2\sigma}{\pi} r^2 \int_r^{+\infty} \frac{|\eta(t) - \eta(r)|}{t^2}\,dt + c_{13}.$$

Відзначимо, що η можна подати у вигляді різниці двох додатних неспадних обмежених функцій. Нехай $\eta = \eta_1 - \eta_2$ і $\eta_1 + \eta_2 = \eta_3$. Тоді

$$|\delta_0(r, \varphi)| \le \frac{2\sigma}{\pi} \int_1^r (\eta_1(r) - \eta_1(t) + \eta_2(r) - \eta_2(t))\,dt +$$

$$+ \frac{2\sigma}{\pi} r^2 \int_r^{+\infty} \frac{\eta_1(t) - \eta_1(r) + \eta_2(t) - \eta_2(r)}{t^2}\,dt + c_{13} =$$

$$= \frac{2\sigma}{\pi} \int_1^r (\eta_3(r) - \eta_3(t))\,dt + \frac{2\sigma}{\pi} r^2 \int_r^{+\infty} \frac{\eta_3(t) - \eta_3(r)}{t^2}\,dt + c_{13} \le$$

$$\le \frac{2\sigma}{\pi} \left(\int_1^r t\,d\eta_3(t) + r^2 \int_r^{+\infty} \frac{d\eta_3(t)}{t} \right).$$

Таким чином,

$$|\delta_0(r, \varphi)| \le \delta(r),$$

де

$$\delta(r) = \frac{2\sigma}{\pi} \left(\int_1^r t\,d\eta_3(t) + r^2 \int_r^{+\infty} \frac{d\eta_3(t)}{t} \right) + c_{13}.$$

Функція $\delta(r)$ задовольняє умову (22), тому що

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\delta(r)}{r^2}dr = \frac{2\sigma}{\pi}\int\limits_1^{+\infty}t\,d\eta_3(t)\int\limits_t^{+\infty}\frac{dr}{r^2} + \frac{2\sigma}{\pi}r^2\int\limits_1^{+\infty}\frac{d\eta_3(t)}{t}\int\limits_1^{t}dr + c_{14} < +\infty.$$

Крім цього, δ — неспадна функція, оскільки при $r_2 \geq r_1$

$$\delta(r_2)-\delta(r_1) = \frac{2\sigma}{\pi}\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}t\,d\eta_3(t)+\left(r_2^2-r_1^2\right)\int\limits_{r_1}^{+\infty}\frac{d\eta_3(t)}{t}-r_2^2\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{d\eta_3(t)}{t}\right) \geq$$

$$\geq \frac{2\sigma}{\pi}\left(r_1^2\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{d\eta_3(t)}{t}+\left(r_2^2-r_1^2\right)\int\limits_{r_1}^{+\infty}\frac{d\eta_3(t)}{t}-r_2^2\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{d\eta_3(t)}{t}\right) =$$

$$= \frac{2\sigma}{\pi}\left(r_2^2-r_1^2\right)\left(\int\limits_{r_1}^{+\infty}\frac{d\eta_3(t)}{t}-\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{d\eta_3(t)}{t}\right) \geq 0.$$

Отже, лему 3 доведено.

Лема 4. *Нехай* $\eta : [0; +\infty) \to (-\infty; +\infty)$ — *функція обмеженої варіації. Тоді існує аналітична в* $\mathbb{C}_+$ *функція* $L(z)$, *яка при* $z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+$ *задовольняє умову* (21).

Доведення. Нехай $\delta(r) = \delta(-r)$, $r < 0$, де $\delta(r)$ — функція із леми 3. Тоді існує аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція $D(z)$, яка при $z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+$ задовольняє умову

$$|D(z)| \leq \exp(-\delta(r)). \tag{23}$$

Можна взяти [11], наприклад, $D(z) = \exp(-T(z))$, де $T(z) = u(z) + i\nu(z)$, а $\nu(z)$ — функція, спряжена до гармонійної в півплощині $\{z : \operatorname{Re} z > -1\}$ функції

$$u(z) = \frac{2(x+1)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(t)}{(x+1)^2+(t-y)^2}dt.$$

Нехай $|\eta(t)| \leq c$ і

$$L(z) = L_1(z)D(z)\exp(-2c\sigma z),$$

де L_1 — функція із леми 3. Тоді функція L задовольняє умову (21), тому що

$$\frac{2\sigma}{\pi}r\eta(r)\varphi\sin\varphi - 2c\sigma r\cos\varphi \leq \sigma t\eta(r).$$

Справді, $(2/\pi)\varphi\sin\varphi \leq 1$ при $\varphi \in [-\pi/2; \pi/2]$. Крім цього, $\operatorname{tg}\varphi \geq \varphi$ при $\varphi \in [0; \pi/2)$, похідна функції $\gamma(\varphi) = 1 - (2/\pi)\varphi\sin\varphi - 2\cos\varphi$ є невід'ємною на $[0; \pi/2]$ і $\gamma(\pi/2) = 0$. Тому $\gamma(\varphi) \leq 0$ при $\varphi \in [-\pi/2; \pi/2]$. Отже,

$$\frac{2\sigma}{\pi}r\eta(r)\varphi\sin\varphi - 2c\sigma r\cos\varphi - \sigma r\eta(r) = \sigma r\left(\eta(r)\left(\frac{2}{\pi}\varphi\sin\varphi - 1\right) - 2c\cos\varphi\right) \leq$$

$$\leq \sigma r\left(c\left(1-\frac{2}{\pi}\varphi\sin\varphi\right) - 2c\cos\varphi\right) = c\sigma r\left(1-\frac{2}{\pi}\varphi\sin\varphi - 2\cos\varphi\right) \leq 0.$$

Лему 4 доведено.

Доведення теореми. Якщо $|f(z)| \le c_1 \exp(\sigma r \eta(r))$, $z \in \mathbb{C}_+$, то f обмежена в кожному півкрузі Q_R, $R > 0$. Тому майже скрізь на уявній осі має [12, с. 182] кутові граничні значення $f(iy)$, причому $|f(iy)| \le c_1 \exp(\sigma |y| \eta(|y|))$ для майже всіх $y \in \mathbb{R}$. Тому із леми 1 отримуємо (1) і

$$S(r) \le \frac{\sigma}{\pi}\psi(r) + 0(1), \qquad r \ge r_0,$$

звідки випливає (2). Нехай тепер умови (1) і (2) виконуються. Покладемо

$$F(z) = L(z)G(z)G_1(z),$$

де L — функція із леми 4; G — функція із леми 2, а

$$G_1(z) = \prod_{|\lambda_n| \le 1} \frac{z - \lambda_n}{z + \bar{\lambda}_n}.$$

Із роботи [6, с. 30] і (1) випливає, що добуток $G_1(z)$ збігається в $\mathbb{C}_+$ і $|G_1(z)| \le 1$ при $z \in \mathbb{C}_+$. Із лем 2 і 4 отримуємо

$$|F(z)| \le c_2 \exp(\sigma r \eta(r) + c_2 z), \qquad z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+.$$

Отже, функція $f(z) = F(z)\exp(-c_2 z)$ задовольняє умови теореми. Теорему доведено.

1. *Винницкий Б. В.* О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 5. – С. 484 – 500.
2. *Kahane J.-P.* Sur quelques problémes d'unisitè et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentionelles // Ann. Inst. Fourier. – 1953–1954 (1955). – **5**. – P. 39 – 130.
3. *Kahane J.-P.* Extension du théorème de Carlson et applications // C. R. Acad. Sci. – 1952. – **234**, № 21. – P. 2038 – 2040.
4. *Fuchs W. H. J.* A generalization of Carlson's theorem // J. London Math. Soc. – 1946. – **2**. – P. 106–110.
5. *Boas R. P.* Entire functions. – New York: Academic Press, – 1954. – 276 p.
6. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
7. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Рапределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.
8. *Винницкий Б. В., Шаповаловский А. В.* О полноте систем экспонент с весом // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 12. – С. 1695 – 1700.
9. *Гришин А. В.* Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. Ч. 1 // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1994. – **1**, № 2. – С. 193 – 215.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 608 с.
11. *Fuchs W. H. J.* On the closure of $\left\{e^{-t_\nu^{a_\nu}}\right\}$ // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1946. – **18**, № 2. – P. 91 – 105.
12. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 336 с.

Одержано 03.04.96