УДК 517. 547.2 + 517.537.72

М. В. Заболоцький, М. М. Шеремета (Львів. ун-т)

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ЛІНДЕЛЬОФА

We represent a generalization of the Lindelöf theorem on conditions imposed on coefficients of the Taylor series of entire transcendental function f in order that the relation $\ln M_f(r) \sim \tau r^\rho$, $r \to \infty$, $M_f(r) = \max\{|f(r)|: |z| = r\}$, should hold.

Наведено узагальнення теореми Е. Ліндельофа про умови на коефіцієнти ряду Тейлора цілої трансцендентної функції f для виконання співвідношення $\ln M_f(r) \sim \tau r^\rho$, $r \to \infty$, $M_f(r) = \max\{|f(r)|: |z| = r\}$.

1. Вступ. Нехай f — ціла функція, задана степеневим рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{1}$$

а $M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$. Найважливішими характеристиками зростання функції f є її порядок ρ і у випадку, коли $0 < \rho < +\infty$, тип τ, які визначаються рівностями

$$\rho = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}; \quad \tau = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}$$

і обчислюються за допомогою формул Адамара

$$\rho = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{n \ln n}{-\ln |a_n|}; \quad \tau = \frac{1}{e\rho} \varlimsup_{n \to \infty} n |a_n|^{\rho/n}.$$

Е. Ліндельоф [1] показав, що

$$\ln M_f(r) = (1 + o(1)) \tau r^\rho \quad r \to +\infty, \quad \tau \in (0, +\infty),$$

тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$:

1) існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln |a_n| \leq -\frac{n}{\rho} \ln \frac{n}{e\rho\tau(1+\varepsilon)};$$

2) існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що $n_{k+1} \sim n_k$, $k \to +\infty$, і

$$\ln |a_{n_k}| \geq -\frac{n_k}{\rho} \ln \frac{n_k}{e\rho\tau(1-\varepsilon)}.$$

Для $\rho = 1$ теорема Ліндельофа була передоведена в [2]. В [3] встановлено аналог теореми Ліндельофа для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку, а в [4] — для випадку двочленної асимптотики цілих функцій скінченного порядку.

У даній статті узагальнено теорему Ліндельофа на випадок співвідношення $\ln M_f(r) \sim \Phi(\ln r)$, де Φ — додатна на $(-\infty, +\infty)$ функція така, що її похідна Φ' є невід'ємною, неперервною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функцією. Клас таких функцій позначимо через Ω. Це узагальнення отримаємо з аналогічного результату для природного узагальнення степеневого ряду — ряду Діріхле з додатними, зростаючими до $+\infty$ показниками.

Отже, нехай $\Lambda = (\lambda_n)$, $0 < \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$, а а, якщо $\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma)$ незростаюча функція, то і на умову

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k}} = 1. \tag{8}$$

У загальному випадку умови (5) та (7), а також (5) та (8) не є рівносильними. Будуть побудовані спеціальні приклади.

Нарешті, за допомогою аналога теореми 1 для цілих функцій буде знайдено необхідні та достатні умови на нулі z_n цілої функції f для того, щоб $N(r,f) \sim \Phi(\ln r)$, $r \to +\infty$, $\Phi \in \Omega$, де $N(r,f)$ — неванліннівська рахуюча функція нулів функції f.

В кінці статті сформулюємо три нерозв'язаних нами задачі.

2. Доведення теореми 1 та її наслідку. Нам буде потрібне таке твердження.

Лема 1 [4, с. 19]. *Нехай* $\Phi \in \Omega$. *Для того щоб* $\ln\mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ *для всіх* $\sigma \ge \sigma_0$, *необхідно і достатньо, щоб* $\ln|a_n| \le -\lambda_n \psi(\varphi(\lambda_n))$ *для всіх* $n \ge n_0$.

Припустимо, що $\ln\mu(\sigma, F) \sim \Phi(\sigma)$ при $\sigma \to +\infty$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ при $\sigma \ge \sigma_0$ виконується нерівність $\ln\mu(\sigma, F) \le \Phi_1(\sigma) = (1+\varepsilon)\Phi(\sigma)$. Легко бачити, що відповідні функції $\psi_1(\sigma) = \psi(\sigma)$ і $\varphi_1(\sigma) = \varphi\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\right)$. Тому за лемою 1 маємо нерівність (3) для всіх $n \ge n_0$.

Перед тим, як доводити властивість 2, покажемо, що

$$G_1(a, b, q) < G_2(a, b, q). \tag{9}$$

З цією метою розгленемо функцію

$$G(x) = G_1(a, b, q) - G_2(a, b, q), \qquad x > a.$$

Оскільки

$$G_1'(a, x, q) = \frac{a}{(x-a)^2}\left\{\Phi(\varphi(qx)) - \frac{a}{x}\Phi(\varphi(qx)) + a\int_a^x \Phi(\varphi(qt))\,d\left(\frac{1}{t}\right)\right\} =$$

$$= \frac{a}{(x-a)^2}\left\{\Phi(\varphi(qx)) - \Phi(\varphi(qa)) - aq\int_a^x d\varphi(qt)\right\} =$$

$$= \frac{aq}{(x-a)^2}\int_a^x (t-a)\,d\varphi(qt) =$$

$$= \frac{aq}{(x-a)^2}\left\{(x-a)\varphi(qx) - \int_a^x \varphi(qt)\,dt\right\}$$

і

$$G_2'(a, x, q) = \Phi'\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x \varphi(qt)\,dt\right)\frac{1}{(x-a)^2}\left\{(x-a)\varphi(qx) - \int_a^x \varphi(qt)\,dt\right\},$$

а з огладу на зростання функції φ

$$(x-a)\varphi(qx) - \int_a^x \varphi(qt)\,dt > 0$$

і

$$\Phi'\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x \varphi(qt)\,dt\right) > qa,$$

то $G_2'(a,x,q) > G_1'(a,x,q)$. Отже, $G'(x) < 0$ для всіх $x > d$.

Звідси випливає, що функція G є спадною на $(a, +\infty)$, і оскільки $G(x) \to 0$ при $x \to a+$, то $G(x) < 0$ для всіх $x > a$. Тому має місце нерівність (9).

Доведення властивості 2 проведемо від супротивного. Припустимо, що існують числа $\tau \in (0, 1)$, $\eta \in (0, 1)$ і послідовність інтервалів (n_k', n_k''), $n_k' \uparrow +\infty$, такі, що (завдяки (9))

$$G_1(\lambda_{n_k'}, \lambda_{n_k''}, 1) \le (1-\tau)G_2(\lambda_{n_k'}, \lambda_{n_k''}, 1) \tag{10}$$

і

$$\ln|a_n| \le -\lambda_n\psi(\varphi(\lambda_n/(1-\eta))), \qquad n_k' < n < n_k''. \tag{11}$$

Покладемо

$$a_n^* = \exp\{-\lambda_n\psi(\varphi(\lambda_n/(1+\varepsilon)))\}$$

і розглянемо ряд Діріхле

$$F^*(s) = \sum_{n \le n_k'} a_n^* e^{s\lambda_n} + \sum_{n \ge n_k''} a_n^* e^{s\lambda_n}.$$

Оскільки $(x\psi(\varphi(x)))' = \varphi(x)$, функція $\Theta(x) = x\psi(\varphi(x))$ є опуклою на $[0, +\infty)$ і, якщо покладемо

$$\varkappa_k^* = \frac{\ln a_{n_k'}^* - \ln a_{n_k''}^*}{\lambda_{n_k''} - \lambda_{n_k'}} = (1-\varepsilon)\frac{\Theta(\lambda_{n_k''}/(1+\varepsilon)) - \Theta(\lambda_{n_k'}/(1+\varepsilon))}{\lambda_{n_k''} - \lambda_{n_k'}},$$

то $\varkappa_k^* \uparrow +\infty$, $k \to +\infty$, і для всіх $n \le n_k'$ та $n \ge n_k''$ маємо

$$a_n^* \exp\left\{\varkappa_k^* \lambda_n\right\} \le a_{n_k'}^* \exp\left\{\varkappa_k^* \lambda_{n_k'}\right\} =$$
$$= a_{n_k''}^* \exp\left\{\varkappa_k^* \lambda_{n_k''}\right\} = \mu\left(\varkappa_k^*, F^*\right).$$

Звідси випливає

$$\frac{\ln \mu\left(\varkappa_k^*, F^*\right)}{\Phi\left(\varkappa_k^*\right)} = \frac{\ln a_{n_k'}^* + \varkappa_k^* a_{n_k'}^*}{\Phi\left(\varkappa_k^*\right)} = \frac{-\lambda_{n_k'} \ln a_{n_k''}^* + \lambda_{n_k''} \ln a_{n_k'}^*}{\left(\lambda_{n_k''} - \lambda_{n_k'}\right)\Phi\left(\varkappa_k^*\right)} =$$
$$= \frac{\lambda_{n_k'}\lambda_{n_k''}}{\lambda_{n_k''} - \lambda_{n_k'}} \frac{\psi\left(\varphi(\lambda_{n_k''}/(1+\varepsilon))\right) - \psi\left(\varphi(\lambda_{n_k'}/(1+\varepsilon))\right)}{\Phi\left(\varkappa_k^*\right)}.$$

Але

$$\psi(\varphi(b) - \psi(\varphi(a)) = \int_a^b \left(\frac{\Theta(x)}{x}\right)' dx =$$
$$= \int_a^b \frac{x\varphi(x) - x\psi(\varphi(x))}{x^2}\,dx = \int_a^b \frac{\Phi(\varphi(x))}{x^2}\,dx, \qquad 0 < a < b < +\infty,$$

і

$$\Theta(b)-\Theta(a) = \int_a^b \varphi(t)\,dt, \quad 0<a<b<+\infty.$$

Тому

$$\frac{\ln\mu\left(\kappa_k^*, F^*\right)}{\Phi\left(\kappa_k^*\right)} = (1+\varepsilon)\frac{G_1\left(\lambda_{n_k'}, \lambda_{n_k''}, 1/(1+\varepsilon)\right)}{G_2\left(\lambda_{n_k'}, \lambda_{n_k''}, 1/(1+\varepsilon)\right)}.$$

Оскільки $G_1(a, b, q) \to G_1(a, b, 1)$ і $G_2(a, b, q) \to G_1(a, b, 1)$ при $q \to 1$, то можемо $\varepsilon > 0$ взяти настільки малим, щоб (завдяки (10))

$$(1+\varepsilon)\frac{G_1\left(\lambda_{n_k'}, \lambda_{n_k''}, 1/(1+\varepsilon)\right)}{G_2\left(\lambda_{n_k'}, \lambda_{n_k''}, 1/(1+\varepsilon)\right)} \le \frac{G_1\left(\lambda_{n_k'}, \lambda_{n_k''}, 1\right)}{G_2\left(\lambda_{n_k'}, \lambda_{n_k''}, 1\right)} + \frac{\tau}{2} \le 1-\frac{\tau}{2}.$$

Таким чином, враховуючи вже доведену властивість 1, для всіх $n \le n_k'$ і $n \ge n_k''$ маємо

$$\ln|a_n| + \kappa_k^*\lambda_n \le \ln a_n^* + \kappa_k^*\lambda_n \le \ln\mu\left(\kappa_k^*, F^*\right) \le \left(1-\frac{\tau}{2}\right)\Phi\left(\kappa_k^*\right). \tag{12}$$

Якщо ж $n_k' < n < n_k''$, то з (11) за лемою 1 отримуємо

$$\ln|a_n| + \kappa_k^*\lambda_n \le -\lambda_n\psi(\varphi(\lambda_n/(1-\eta))) + \kappa_k^*\lambda_n \le$$

$$\le \max\left\{-\lambda_n\psi(\varphi(\lambda_n/(1-\eta))) + \kappa_k^*\lambda_n : n \ge 0\right\} \le (1-\eta)\Phi\left(\kappa_k^*\right). \tag{13}$$

З нерівностей (12) і (13) випливає

$$\ln\mu\left(\kappa_k^*, F^*\right) \le \max\{(1-\eta), (1-\tau/2)\}\Phi\left(\kappa_k^*\right),$$

що неможливо, тому що $\ln\mu(\sigma, F) \sim \Phi(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$. Необхідність умов 1 і 2 доведено.

Доведемо достатність. З нерівності (3) за лемою 1 випливає, що $\ln\mu(\sigma, F) \le \le (1+\varepsilon)\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \ge \sigma_0(\varepsilon)$.

Нехай послідовність (n_k) така, що виконується (4) і (5). Покладемо

$$\tilde{a}_k = \exp\left\{-\lambda_{n_k}\psi\left(\varphi(\lambda_{n_k}/(1-\varepsilon))\right)\right\}$$

і розглянемо ряд Діріхле

$$\tilde{F}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k e^{s\lambda_{n_k}}.$$

З одного боку, з умови (4) випливає, що $\ln\mu(\sigma, F) \ge \ln\mu(\sigma, \tilde{F})$ для всіх $\sigma \in \in \mathbb{R}$, а за лемою 1 $\ln\mu(\sigma, \tilde{F}) \le (1-\varepsilon)\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \ge \sigma_0(\varepsilon)$. З іншого боку,

$$\ln\tilde{a}_k + \varphi(\lambda_{n_k}/(1-\varepsilon))\lambda_{n_k} = -\lambda_{n_k}\psi\left(\varphi(\lambda_{n_k}/(1-\varepsilon))\right) +$$

$$+ \lambda_{n_k}\varphi(\lambda_{n_k}/(1-\varepsilon)) = (1-\varepsilon)\Phi\left(\varphi(\lambda_{n_k}/(1-\varepsilon))\right), \tag{14}$$

тобто

$$\ln\mu\left(\varphi\left(\frac{\lambda_{n_k}}{1-\varepsilon}\right), \tilde{F}\right) = (1-\varepsilon)\Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_{n_k}}{1-\varepsilon}\right)\right). \tag{15}$$

Покладемо тепер

$$\tilde{\kappa}_k = \frac{\ln \tilde{a}_k - \ln \tilde{a}_{k+1}}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} = \frac{\Theta\left(\lambda_{n_{k+1}}/(1-\varepsilon)\right) - \Theta\left(\lambda_{n_k}/(1-\varepsilon)\right)}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}(1-\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \int\limits_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}} \varphi(t/(1-\varepsilon))\,dt.$$

Тоді, завдяки зростанню функції φ,

$$\varphi\left(\lambda_{n_k}/(1-\varepsilon)\right) < \tilde{\kappa}_k < \varphi\left(\lambda_{n_{k+1}}/(1-\varepsilon)\right).$$

Легко бачити, що

$$\ln \tilde{a}_k + \tilde{\kappa}_k \lambda_{n_k} = \ln \tilde{a}_{k+1} + \tilde{\kappa}_k \lambda_{n_{k+1}}, \qquad \ln a_k + \sigma\lambda_{n_k} \geq \ln \tilde{a}_{k+1} + \sigma\lambda_{n_{k+1}}$$

при

$$\varphi\left(\frac{\lambda_{n_k}}{1-\varepsilon}\right) \leq \sigma \leq \tilde{\kappa}_k \quad \text{і} \quad \ln \tilde{a}_k + \sigma\lambda_{n_k} \leq \ln \tilde{a}_{k+1} + \sigma\lambda_{n_{k+1}}$$

при

$$\tilde{\kappa}_k \leq \sigma \leq \varphi\left(\frac{\lambda_{n_{k+1}}}{1-\varepsilon}\right).$$

Тому, завдяки (14) і (15), отримуємо

$$\ln \mu(\sigma, \tilde{F}) = \begin{cases} \ln \tilde{a}_k + \sigma\lambda_{n_k}, & \varphi\left(\lambda_{n_k}/(1-\varepsilon)\right) \leq \sigma \leq \tilde{\kappa}_k, \\ \ln \tilde{a}_{k+1} + \sigma\lambda_{n_{k+1}}, & \tilde{\kappa}_k \leq \sigma \leq \varphi\left(\lambda_{n_{k+1}}/(1-\varepsilon)\right). \end{cases}$$

Якщо $\varphi\left(\dfrac{\lambda_{n_k}}{1-\varepsilon}\right) \leq \sigma \leq \tilde{\kappa}_k$, то

$$\left(\frac{\ln \tilde{a}_k + \sigma\lambda_{n_k}}{\Phi(\sigma)}\right)' = \frac{\Phi'(\sigma)\lambda_{n_k}}{\Phi^2(\sigma)}\left(\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)} - \sigma - \frac{\ln \tilde{a}_k}{\lambda_{n_k}}\right) =$$

$$= \frac{\Phi'(\sigma)\lambda_{n_k}}{\Phi^2(\sigma)}\left\{\psi\left(\varphi(\lambda_{n_k}/(1-\varepsilon))\right) - \varphi(\sigma)\right\} < 0,$$

а якщо $\tilde{\kappa}_k \leq \sigma \leq \varphi\left(\dfrac{\lambda_{n_{k+1}}}{1-\varepsilon}\right)$, то

$$\left(\frac{\ln \tilde{a}_{k+1} + \sigma\lambda_{n_{k+1}}}{\Phi(\sigma)}\right)' = \frac{\Phi'(\sigma)\lambda_{n_{k+1}}}{\Phi^2(\sigma)}\left\{\psi\left(\varphi(\lambda_{n_{k+1}}/(1-\varepsilon))\right) - \varphi(\sigma)\right\} > 0.$$

Тому

$$\min\left\{\frac{\ln \mu(\sigma, \tilde{F})}{\Phi(\sigma)} : \varphi\left(\frac{\lambda_{n_k}}{1-\varepsilon}\right) \leq \sigma \leq \tilde{\kappa}_k\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{\ln \mu(\sigma, \tilde{F})}{\Phi(\sigma)} : \tilde{\kappa}_k \leq \sigma \leq \varphi\left(\frac{\lambda_{n_{k+1}}}{1-\varepsilon}\right)\right\} = \frac{\ln \mu(\tilde{\kappa}_k, \tilde{F})}{\Phi(\tilde{\kappa}_k)}.$$

Отже, для $\varphi\left(\dfrac{\lambda_{n_k}}{1-\varepsilon}\right) \leq \sigma \leq \varphi\left(\dfrac{\lambda_{n_{k+1}}}{1-\varepsilon}\right)$ маємо

$$\frac{\ln\mu(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)} \geq \frac{\ln\mu(\sigma, \tilde{F})}{\Phi(\sigma)} \geq \frac{\ln\mu(\tilde{\kappa}_k, \tilde{F})}{\Phi(\tilde{\kappa}_k)} =$$

$$= \frac{\ln\tilde{a}_k + \tilde{\kappa}_k\lambda_{n_k}}{\Phi(\tilde{\kappa}_k)} = \frac{-\lambda_{n_k}\ln\tilde{a}_{k+1} + \lambda_{n_{k+1}}\ln\tilde{a}_k}{\left(\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}\right)\Phi(\tilde{\kappa}_k)}.$$

Звідси, як при доведенні необхідності, маємо

$$\frac{\ln\mu(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)} \geq (1-\varepsilon)\frac{G_1\left(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, 1/(1-\varepsilon)\right)}{G_2\left(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, 1/(1-\varepsilon)\right)}, \qquad \varphi\left(\frac{\lambda_{n_k}}{1-\varepsilon}\right) \leq \sigma \leq \varphi\left(\frac{\lambda_{n_{k+1}}}{1-\varepsilon}\right). \tag{16}$$

Оскільки

$$(1-\varepsilon)\frac{G_1\left(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, 1/(1-\varepsilon)\right)}{G_2\left(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, 1/(1-\varepsilon)\right)} \to \frac{G_1\left(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, 1\right)}{G_2\left(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, 1\right)}, \qquad \varepsilon \to 0,$$

з (16) і (5) випливає, що $\ln\mu(\sigma, F) \geq (1-\delta)\Phi(\sigma)$ для кожного $\delta > 0$ і для всіх $\sigma \geq \sigma_0(\delta)$. Достатність умов 1 і 2, а отже, і теорема 1 доведені.

Доведемо тепер наслідок 1. Для невід'ємної неперервної зростаючої до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функції α, як в [5], через $S_\alpha(\Lambda)$ позначимо клас всіх цілих рядів Діріхле (2) таких, що $\ln|a_n| \leq -\lambda_n\alpha(\lambda_n)$, $n \geq n_0$. Тоді [5] для того, щоб $\ln M(\sigma, F) \sim \ln\mu(\sigma, F)$ при $\sigma \to +\infty$ для кожної функції $F \in S_\alpha(\Lambda)$, необхідно і достатньо, щоб

$$\ln n = O(\alpha(\lambda_n)), \qquad n \to +\infty.$$

Як видно з леми 1, $\ln M(\sigma, F) \sim \ln\mu(\sigma, F)$ при $\sigma \to +\infty$, якщо тільки $\ln\mu(\sigma, F) \sim \Phi(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, і виконується умова (6). Отже, наслідок 1 доведено.

3. Заміна умови (5) умовою (7). Покладемо

$$\kappa_k = \frac{1}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}\int\limits_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}}\varphi(t)\,dt = \frac{\Theta\left(\lambda_{n_{k+1}}\right) - \Theta\left(\lambda_{n_k}\right)}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}.$$

Теорема 2. *Нехай* $\Phi \in \Omega$, $0 < \tau < 1$ *і*

$$\varlimsup_{x\to\infty}\frac{(1-\tau)x\Phi'(x) - \Theta((1-\tau)\Phi'(x))}{\Phi(x)} = \xi(\tau) < 1. \tag{17}$$

Тоді, для того щоб $\ln\mu(\sigma, F) \sim \Phi(\sigma)$ *при* $\sigma \to +\infty$, *необхідно і достатньо, щоб для довільного* $\varepsilon > 0$ *виконувались властивості* 1 *і* 2 *теореми* 1 *з послідовністю* $\left(\lambda_{n_k}\right)$, *що задовольняє умову* (7), *тобто*

$$\Phi'(\kappa_k) \sim \lambda_{n_k}, \qquad k \to +\infty.$$

Доведення. Для доведення достатності досить показати, що з умови (7) випливає умова (5). Оскільки

$$\int\limits_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}}\frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}\,dt = \psi\left(\varphi(\lambda_{n_{k+1}})\right) - \psi(\varphi(\lambda_{n_k})),$$

а

$$\kappa_k = \frac{\lambda_{n_{k+1}}\psi(\varphi(\lambda_{n_{k+1}})) - \lambda_{n_k}\psi(\varphi(\lambda_{n_k}))}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}},$$

то

$$\frac{G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, 1)}{G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, 1)} - \frac{\lambda_{n_k}}{\Phi'(\kappa_k)} =$$

$$= \frac{\lambda_{n_k}}{\Phi(\kappa_k)}\left\{\frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}\Big(\psi(\varphi(\lambda_{n_{k+1}})) - \psi(\varphi(\lambda_{n_k}))\Big) - (\kappa_k - \psi(\kappa_k))\right\} =$$

$$= \frac{\lambda_{n_k}}{\Phi(\kappa_k)}\Big\{\big(\kappa_k - \psi(\varphi(\lambda_{n_k}))\big) - (\kappa_k - \psi(\kappa_k))\Big\} = \frac{\lambda_{n_k}}{\Phi(\kappa_k)}\Big\{\varphi(\kappa_k) - \psi(\varphi(\lambda_{n_k}))\Big\} > 0$$

внаслідок того, що $\kappa_k > \varphi(\lambda_{n_k})$.

Звідси

$$1 \geq \frac{G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, 1)}{G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, 1)} \geq \frac{\lambda_{n_k}}{\Phi'(\kappa_k)}, \tag{18}$$

що доводить достатність в теоремі 2.

Для доведення необхідності в теоремі 2 досить показати, що при виконанні (17) з умови (5) випливає (7). Доведення проведемо від супротивного, тобто, враховуючи (18), припустимо, що існує τ_0, $0 < \tau_0 < 1$, і підпослідовність $\lambda_{n_{k_s}}$ послідовності λ_{n_k} такі, що $\lambda_{n_{k_s}} \leq (1-\tau_0)\Phi'(\kappa_{k_s})$. Надалі для простоти покладемо $\lambda_{n_{k_s}} = \lambda_m$. Тоді

$$G_1(\lambda_m, \lambda_{m+1}, 1) = \frac{\lambda_m \lambda_{m+1}}{\lambda_{m+1} - \lambda_m}\left(\frac{\Theta(\lambda_{m+1})}{\lambda_{m+1}} - \frac{\Theta(\lambda_m)}{\lambda_m}\right) =$$

$$= \frac{\lambda_m(\Theta(\lambda_{m+1}) - \Theta(\lambda_m)) - (\lambda_{m+1} - \lambda_m)\Theta(\lambda_m)}{\lambda_{m+1} - \lambda_m} =$$

$$= \lambda_m \kappa_m - \Theta(\lambda_m) \leq \kappa_m(1-\tau_0)\Phi'(\kappa_m) - \Theta((1-\tau_0)\Phi'(\kappa_m)),$$

тому що функція $t\kappa_m - \Theta(t)$ на проміжку $(0, \Phi'(\kappa_m))$ зростає. Звідси

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, 1)}{G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, 1)} \leq \varlimsup_{m\to\infty} \frac{(1-\tau_0)\kappa_m\Phi'(\kappa_m) - \Theta((1-\tau_0)\Phi'(\kappa_m))}{\Phi(\kappa_m)} < 1,$$

що повністю доводить теорему 2.

***Зауваження* 1.** При доведенні достатності теореми 2 умова (17) не враховувалась. Отже, якщо виконуються умови 1 та 2 теореми 1 з послідовністю (λ_{n_k}), що задовольняє (7), то $\ln\mu(\sigma, F) \sim \Phi(\sigma)$ при $\sigma \to \infty$ для кожної функції $\Phi \in \Omega$.

Вкажемо деякі простіші умови на Φ, при яких виконується (17).

Теорема 3. *Нехай* $\Phi \in \Omega$ *і для деякого* $\alpha \in [0, 1)$ *одна з функцій* $\Phi'(x)/(\Phi(x))^{1+\alpha}$ *або* $\Phi''(x)/(\Phi'(x))^{1+\alpha}$ *незростаюча. Тоді виконується співвідношення* (17).

Доведення. Нехай функція $\Phi'(x)/(\Phi(x))^{1+\alpha}$ незростаюча, а тоді, $\Phi(\varphi(t))t^{-1/(1+\alpha)}$ неспадна функція. Тому у випадку $\alpha = 0$ маємо

$$\xi(\tau) = (1-\tau) \varlimsup_{x\to\infty} \frac{x\Phi'(x) - \Phi'(x)\psi(\varphi((1-\tau)\Phi'(x)))}{\Phi(x)} =$$

$$= (1-\tau) \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} \{(x-\psi(x)) + (\psi(\varphi(\Phi'(x))) - \psi(\varphi((1-\tau)\Phi'(x))))\} =$$

$$= (1-\tau) \varlimsup_{x\to\infty} \left\{ 1 + \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} \int\limits_{(1-\tau)\Phi'(x)}^{\Phi'(x)} \Phi(\varphi(t))/t^2\, dt \right\} \le$$

$$\le (1-\tau) \varlimsup_{x\to\infty} \left\{ 1 + \int\limits_{(1-\tau)\Phi'(x)}^{\Phi'(x)} d\ln t \right\} = (1-\tau)\left(1 + \ln\frac{1}{1-\tau}\right) < 1,$$

тобто виконується умова (17), що доводить теорему 3 у цьому випадку.

Якщо $0<\alpha<1$, то аналогічно одержуємо

$$\xi(\tau) = (1-\tau) \varlimsup_{x\to\infty} \left\{ 1 + \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} \int\limits_{(1-\tau)\Phi'(x)}^{\Phi'(x)} \Phi(\varphi(t)) t^{-1/(1+\alpha)} t^{-2+1/(1+\alpha)} dt \right\} \le$$

$$\le (1-\tau) \varlimsup_{x\to\infty} \left\{ 1 + (\Phi'(x))^{\alpha/(1+\alpha)} \int\limits_{(1-\tau)\Phi'(x)}^{\Phi'(x)} t^{-2+1/(1+\alpha)} dt \right\} =$$

$$= (1-\tau)\left\{ 1 + \frac{1+\alpha}{\alpha}\left((1-\tau)^{-\alpha/(1+\alpha)} - 1\right) \right\} = \frac{1+\alpha}{\alpha}(1-\tau)^{1/(1+\alpha)} - \frac{1-\tau}{\alpha}.$$

Якщо покладемо

$$\beta(\tau) = \frac{1+\alpha}{\alpha}(1-\tau)^{1/(1+\alpha)} - \frac{1-\tau}{\alpha} - 1,$$

то $\beta(0)=0$, $\beta(1)=-1$, $\beta'(\tau) = \frac{1}{\alpha}\left(1-(1-\tau)^{-\alpha/(1+\alpha)}\right) < 0$ для $0<\tau<1$, тобто $\beta(\tau)$ спадає і, отже, $\beta(\tau)<0$. Таким чином, $\xi(\tau)<1$, що доводить теорему 3 у випадку $0<\alpha<1$.

Припустимо тепер, що функція $\Phi''(x)/(\Phi'(x))^{1+\alpha}$ незростаюча. Тоді $t^{1+\alpha}\varphi'(t)$ — неспадна функція і за правилом Лопіталя маємо

$$\xi(\tau) \le (1-\tau) \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\Phi'(x) + x\Phi''(x) - \varphi((1-\tau)\Phi'(x))\Phi''(x)}{\Phi'(x)} =$$

$$= (1-\tau) \varlimsup_{x\to\infty} \left\{ 1 + \frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)}(x - \varphi((1-\tau)\Phi'(x))) \right\} =$$

$$= (1-\tau) \varlimsup_{x\to\infty} \left\{ 1 + \frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)} \int\limits_{(1-\tau)\Phi'(x)}^{\Phi'(x)} \varphi'(t)\, dt \right\}.$$

Якщо $\alpha=0$, то

$$\xi(\tau) \le (1-\tau) \varlimsup_{x\to\infty} \left\{ 1 + \frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)} \Phi'(x)\varphi'(\Phi'(x)) \int\limits_{(1-\tau)\Phi'(x)}^{\Phi'(x)} d\ln t \right\} =$$

$$= (1-\tau)\left(1 + \ln\frac{1}{1-\tau}\right) < 1,$$

тому що функція $(1-x)\left(1+\ln\dfrac{1}{1-x}\right)$ спадає на проміжку $(0, 1)$.

Нарешті, якщо $0<\alpha<1$, то

$$\xi(\tau) \le (1-\tau)\varlimsup_{x\to\infty}\left\{1+\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)}(\Phi'(x))^{1+\alpha}\varphi'(\Phi'(x))\int\limits_{(1-\tau)\Phi'(x)}^{\Phi'(x)} t^{-1-\alpha}dt\right\} =$$

$$= (1-\tau)\left\{1+\frac{1}{\alpha}\left((1-\tau)^{-\alpha}-1\right)\right\} = \frac{1}{\alpha}\left\{(1-\tau)^{1-\alpha}-(1-\alpha)(1-\tau)\right\}.$$

Якщо покладемо $\beta(\tau)=(1-\tau)^{1-\alpha}-(1-\alpha)(1-\tau)-\alpha$, то $\beta(0)=0$, $\beta(1)=-\alpha$, $\beta'(\tau)=(1-\alpha)(1-(1-\tau)^{-\alpha})<0$ для $0<\tau<1$. Тому $\beta(\tau)<0$, а отже, $\xi(\tau)<1$. Теорему 3 повністю доведено.

Покажемо тепер, що в усьому класі Ω умови (5) та (7) не є рівносильними.

***Приклад* 1.** Нехай $\alpha_k=k-1+k2^{-k}$, а

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1-2^{-k})/\alpha_k(x-2^k)+2k-1, & 2^k\le x\le 2^k+\alpha_k;\\[2mm] \dfrac{2^{-k}}{2^k-k-\alpha_k}(x-2^k-\alpha_k)+2k-2^{-k}, & 2^k+\alpha_k\le x\le 2^{k+1}-k;\\[2mm] \dfrac{1}{k}(x-2^{k+1}+k)+2k, & 2^{k+1}-k\le x\le 2^{k+1}, \end{cases}$$

при $k\ge1$ і $\varphi(x)=1+\ln(x/2)$ при $0<x\le2$. Ясно, що φ — неперервна додатна зростаюча до $+\infty$ на $(0,+\infty)$ функція. Далі

$$(2^{k+1}-2^k)\kappa_k = \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha_k(4k-1-2^{-k})+\frac{1}{2}(2^k-k-\alpha_k)\left(4k-\frac{1}{2^k}\right)+2k^2+\frac{k}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(2^k-k)(4k-2^{-k})+4k^2+k\right\}-\frac{1}{2}\alpha_k =$$

$$= 2k2^k+\frac{1}{2}(k-1+k2^{-k})-\frac{1}{2}\alpha_k = (2^{k+1}-2^k)2k = (2^{k+1}-2^k)\varphi(2^{k+1}-k).$$

Тому, якщо покладемо $\lambda_{n_k}=n_k=2^k$, то матимемо

$$\frac{n_k}{\Phi'(\kappa_k)} = \frac{2^k}{2^{k+1}-k} \to \frac{1}{2}, \quad k\to\infty,$$

тобто умова (7) не виконується.

Оскільки $\Phi'(\sigma)=2e^{\sigma-1}$ при $\sigma\in(-\infty,1]$ і при $k\ge1$

$$\Phi'(\sigma) = \begin{cases} 2^k+\alpha_k/(1-2^{-k})(\sigma-2k+1), & 2k-1\le\sigma\le 2k-2^{-k};\\ 2^k+\alpha_k+2^k(2^k-k-\alpha_k)(\sigma-2k-2^{-k}), & 2k-2^{-k}\le\sigma\le 2k;\\ 2^{k+1}-k+k(\sigma-2k), & 2k\le\sigma\le 2k+1, \end{cases}$$

то

$$\Phi(2k+1)-\Phi(2k-1) = \int\limits_{2k-1}^{2k+1}\Phi'(\sigma)\,d\sigma =$$

$$= \left(2^k+\frac{\alpha_k}{2}\right)(1-2^{-k})+2^{-k}\left(2^k+\frac{1}{2}(2^k-k+\alpha_k)\right)+2^{k+1}-\frac{k}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha_k - \frac{1}{2}(k-1+k2^{-k}) + 2^{k+1} + 2^k = 3\cdot 2^k,$$

$$\Phi(2k+1) - \Phi(2k) = 2^{k+1} - \frac{1}{2}k$$

і, отже,

$$\Phi(2k-1) = \Phi(2k) - 2^k - \frac{k}{2}.$$

Тому

$$2^{-k}\Phi(\varphi(2^k)) - 2^{-(k+1)}\Phi(\varphi(2^{k+1})) = 2^{-(k+1)}(\Phi(2k-1) - (\Phi(2k+1) - \Phi(2k-1))) =$$

$$= 2^{-(k+1)}\left(\Phi(2k) - 2^k - \frac{1}{2}k - 3\cdot 2^k\right) = 2^{-(k+1)}\left(\Phi(2k) - 2\cdot 2^{k+1} - \frac{1}{2}k\right).$$

Оскілъки

$$\int\limits_{n_k}^{n_{k+1}} \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt = \frac{\Phi(\varphi(n_k))}{n_k} - \frac{\Phi(\varphi(n_{k+1}))}{n_{k+1}} + \varphi(n_{k+1}) - \varphi(n_k),$$

то звідси випливає

$$\frac{n_{k+1}n_k}{n_{k+1}-n_k}\int\limits_{n_k}^{n_{k+1}} \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt =$$

$$= 2^{k+1}\left(\frac{\Phi(\varphi(2^k))}{2^k} - \frac{\Phi(\varphi(2^{k+1}))}{2^{k+1}} + \varphi(2^{k+1}) - \varphi(2^k)\right) =$$

$$= 2^{k+1}\left\{2^{-k-1}\left(\Phi(2k) - 2\cdot 2^{k+1} - \frac{1}{2}k\right) + 2\right\} =$$

$$= \Phi(2k) - \frac{k}{2} = (1+o(1))\Phi(2k), \qquad k\to\infty,$$

тому що

$$\Phi(2k) \ge \Phi(2k-1) \ge \sum_{j=1}^{k-1} 3\cdot 2^j > 2^k.$$

Але

$$\Phi\left(\frac{1}{n_{k+1}-n_k}\int\limits_{n_k}^{n_{k+1}}\varphi(t)\,dt\right) = \Phi(2k),$$

тому умова (5) виконується.

4. Заміна умови (5) умовою (8). Справедливе наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай* $\Phi\in\Omega$ *і* $\Phi'(x)/\Phi(x)$ *— незростаюча функція. Для того щоб* $\ln\mu(\sigma, F) \sim \Phi(\sigma)$ *при* $\sigma\to+\infty$, *необхідно і достатньо, щоб для довільного* $\varepsilon > 0$ *виконувались властивості* 1 *та* 2 *теореми* 1 *з послідовністю* (λ_{n_k}), *що задовольняє умову* (8).

Доведення. Оскільки

$$\lambda_{n_k} \le \Phi'(\kappa_k) \le \lambda_{n_{k+1}},$$

з умови (8) випливає умова (7), а, значить, і (5), що доводить достатність в теоремі 4. Доведемо необхідність. Нерівність (3) випливає з леми 1. Доведення властивості 2 проведемо від супротивного. Припустимо, що існують числа $\tau > 0$, $\eta > 0$ і послідовність проміжків (n'_ν, n''_ν) такі, що $\lambda_{n''_\nu} > (1+\eta)\lambda_{n'_\nu}$ і

$$\ln|a_n| \leq -\lambda_n \psi(\varphi(\lambda_n/(1-\tau))), \qquad n'_\nu < n < n''_\nu. \tag{19}$$

Неважко показати, що

$$\beta = \max\left\{\frac{1+\ln(1+\eta/2)}{1+\eta/2}, \frac{1+\eta}{1+\eta/2}\ln\frac{1+\eta/2}{1+\eta}\right\} < 1.$$

Покладемо

$$l_1 = \lambda_{n'_\nu}, \quad l_2 = \lambda_{n''_\nu}, \quad \sigma_n = \varphi\left(\left(1+\frac{\eta}{2}\right)l_1\right), \quad \varepsilon = \min\left\{\frac{1-\beta}{4}, \frac{\eta}{2+\eta}\right\}.$$

Оскільки функція $\Phi(\varphi(t))/t$ неспадна, то з (3) маємо

$$\frac{\ln|a_{l_1}| + \sigma_n l_1}{\Phi(\sigma_n)} \leq \frac{l_1}{\Phi(\sigma_n)}\{\varphi((1+\eta/2)l_1) - \psi(\varphi(l_1/(1+\varepsilon)))\} =$$

$$= \frac{l_1}{\Phi(\sigma_n)}\left\{\varphi((1+\eta/2)l_1) - \psi(\varphi(1+\eta/2)l_1)) + \psi(\varphi(1+\eta/2)l_1)) - \psi(\varphi(l_1/(1+\varepsilon)))\right\} =$$

$$= l_1\left\{\frac{1}{(1+\eta/2)l_1} + \frac{1}{\Phi(\sigma_n)}\int\limits_{l_1/(1+\varepsilon)}^{(1+\eta/2)l_1}\frac{\Phi(\varphi(t))}{t}\frac{dt}{t}\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{1+\eta/2}(1+\ln(1+\eta/2)+\ln(1+\varepsilon)) \leq \frac{1+\ln(1+\eta/2)}{1+\eta/2} + \varepsilon < \frac{1+3\beta}{4}.$$

Аналогічно

$$\frac{\ln|a_{l_2}| + l_2\sigma_n}{\Phi(\sigma_n)} \leq \frac{l_2}{\Phi(\sigma_n)}\{\varphi((1+\eta/2)l_1) - \psi(\varphi(l_2/(1+\varepsilon)))\} =$$

$$= l_2\left\{\frac{1}{(1+\eta/2)l_1} + \frac{\ln((1+\eta/2)l_1/l_2 + \ln(1+\varepsilon)}{(1+\eta/2)l_1}\right\} =$$

$$= \frac{l_2}{(1+\eta/2)l_1}\left(1+\ln(1+\varepsilon) - \ln\frac{l_2}{(1+\eta/2)l_1}\right) <$$

$$< \frac{1+\eta}{1+\eta/2}\left\{1+\ln\frac{1+\eta/2}{1+\eta}+\varepsilon\right\} < \beta + 2\varepsilon < \frac{\beta+1}{2},$$

тому що функція $x(1+\ln(1+\varepsilon)-\ln x)$ спадає при $x > (1+\eta)/(1+\eta/2)$.

Неважко показати, що при $k \leq n'_\nu - 1$

$$\exp\{-\lambda_k\psi(\varphi(\lambda_k/(1+\varepsilon))) + \lambda_k\sigma_n\} \leq$$
$$\leq \exp\{-\lambda_{k+1}\psi(\varphi(\lambda_{k+1}/(1+\varepsilon))) + \lambda_{k+1}\sigma_n\},$$

а при $k \geq n''_\nu + 1$

$$\exp\{-\lambda_k\psi(\varphi(\lambda_k/(1+\varepsilon))) + \lambda_k\sigma_n\} \leq$$
$$\leq \exp\{-\lambda_{k-1}\psi(\varphi(\lambda_{k-1}/(1+\varepsilon))) + \lambda_{k-1}\sigma_n\}.$$

Отже, для всіх $k \leq n'_\nu$ і $k \geq n''_\nu$

$$\ln|a_k| + \lambda_k \sigma_n \le \frac{\beta+1}{2}\Phi(\sigma_n), \qquad 0 < \beta < 1. \tag{20}$$

Якщо ж $n'_\nu < k < n''_\nu$, то з (19) маємо

$$\ln|a_k| + \lambda_k \sigma_n \le \max\{-t\psi(\varphi(t/(1-\tau))) + \sigma_n t \colon t \ge 0\} \le (1-\tau)\Phi(\sigma_n). \tag{21}$$

З нерівностей (20) та (21) випливає

$$\ln\mu(\sigma_n, F) \le \max\{(1-\tau), (1+\beta)/2\}\Phi(\sigma_n), \qquad n \ge n_0,$$

що неможливо. Теорему 4 доведено.

Зауваження 2. При доведенні достатності в теоремі 4 ми не використовували незростання функції $\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma)$. Тому, якщо виконуються умови 1 і 2 теореми 1 з послідовністю (λ_{n_k}), що задовольняє (8), то $\ln\mu(\sigma, F) \sim \Phi(\sigma)$ при $\sigma \to +\infty$ для кожної функції $\Phi \in \Omega$.

З прикладу 1 видно, що умови (5) і (8) не є рівносильними. Покажемо також, що умови (7) та (8) не є рівносильними в класі Ω.

Приклад 2. Нехай $\lambda_{n_k} = n_k = 2^k$, тобто $n_{k+1} = 2n_k$, і виберемо довільну зростаючу до $+\infty$ послідовність $(\varphi(n_k))$. Позначимо $x_k = n_k + 1$ і $y_k = \varphi(n_{k+1}) - (1/n_k)(\varphi(n_{k+1}) - \varphi(n_k))$. Тоді $n_k < x < n_{k+1}$ і $\varphi(n_k) < y_k < \varphi(n_{k+1})$. З'єднаємо тепер точку (x_k, y_k) з точками $(n_k, \varphi(n_k))$ та $(n_{k+1}, \varphi(n_{k+1}))$ відрізками

$$y = \varphi_1(x) \equiv \varphi(n_k) + (x - n_k)(y_k - \varphi(n_k));$$

$$y = \varphi_2(x) \equiv y_k + \frac{x - x_k}{n_k - 1}(\varphi(n_{k+1}) - y_k)$$

відповідно і покладемо $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ при $n_k \le x \le x_k$ і $\varphi(x) = \varphi_2(x)$ при $x_k \le x \le n_{k+1}$. Тоді

$$\kappa_k = \frac{1}{n_k}\int_{n_k}^{n_{k+1}} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2n_k}\{(x - n_k)(y_k + \varphi(n_k)) + (n_{k+1} - x_k)(\varphi(n_{k+1}) + y_k)\} =$$

$$= \frac{1}{2n_k}\{y_k + \varphi(n_k) + (n_k - 1)(\varphi(n_{k+1}) + y_k)\} =$$

$$= \frac{1}{2n_k}\{n_k y_k - (\varphi(n_{k+1}) - \varphi(n_k)) + n_k\varphi(n_{k+1})\} = y_k = \varphi(x_k).$$

Отже,

$$\Phi'(\kappa_k) = x_k \sim n_k, \qquad k \to \infty,$$

тобто умова (7) виконується, а $n_{k+1} = 2n_k \ne (1 + o(1))n_k$, $k \to \infty$.

Зауважимо, що в прикладах 1 і 2 функція φ може мати довільну швидкість зростання. Дійсно, в прикладі 2 вибираємо довільну зростаючу до $+\infty$ послідовність $(\varphi(n_k))$, де $n_k = 2^k$. В прикладі 1 маємо

$$\varphi(n_{k+1} - k) = 2k, \qquad \varphi(n_k) = \varphi(n_{k+1} - k) - 1 = 2k - 1,$$

$$\varphi(n_{k+1}) = \varphi(n_{k+1} - k) + 1 = 2k + 1 = 2(k+1) - 1.$$

Неважко показати, що останні умови можна замінити на наступні:

$$\varphi(n_{k+1}-k) = 2\sum_{i=1}^{k} c_i, \quad \varphi(n_k) = \varphi(n_{k+1}-k) - c_k = 2\sum_{i=1}^{k} c_i - c_k,$$

$$\varphi(n_{k+1}) = \varphi(n_{k+1}-k) + c_{k+1} = 2\sum_{i=1}^{k} c_i + c_{k+1} = 2\sum_{i=1}^{k+1} c_i - c_{k+1},$$

залишивши ту саму ідею побудови функції φ.

Вибираючи довільним чином послідовність (c_k), $c_k > 0$, отримуємо, що функція φ має довільну швидкість зростання і має потрібні властивості, тобто, що φ задовольняє умову (5) і не задовольняє (7).

5. Цілі функції, зображені степеневими рядами. Нехай тепер f — ціла функція, зображена степеневим рядом (1), а $\mu_f(r) = \max\left\{|a_n| r^n : n \ge 0\right\}$ — його максимальний член. Якщо в ряді (1) зробимо заміну $z = e^s$, то отримаємо цілий ряд Діріхле з показниками $\lambda_n = n$. Очевидно, що тоді $\mu(\sigma, F) = \mu_f(e^{\sigma})$, і тому з теореми 1 випливає наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай* $\Phi \in \Omega$ *Для того щоб* $\ln \mu_f(r) \sim \Phi(\ln r)$ *при* $r \to +\infty$, *необхідно і достатньо, щоб для кожного* $\varepsilon > 0$:

1) *існувало* $n_0 \in \mathbb{N}$ *таке, що для всіх* $n \ge n_0$

$$\ln |a_n| \le -n\psi(\varphi(n/(1+\varepsilon)));$$

2) *існувала зростаюча послідовність* (n_k) *натуральних чисел така, що*

$$\ln |a_{n_k}| \ge -n_k\psi(\varphi(n_k/(1-\varepsilon)))$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k n_{k+1}}{n_{k+1}-n_k} \frac{\int_{n_k}^{n_{k+1}} \Phi(\varphi(t))/t^2)\,dt}{\Phi\left(\frac{1}{n_{k+1}-n_k}\int_{n_k}^{n_{k+1}} \varphi(t)\,dt\right)} = 1. \tag{22}$$

Якщо $\Phi \in \Omega$, $\ln \Phi(x) = O(x)$, $x \to \infty$, і $\ln M_f(r) \sim \Phi(\ln r)$, то f має скінченний порядок, а тоді $\ln \mu_f(r) \sim \ln M_f(r)$, $r \to \infty$. Тому з теореми 5 випливає наступний наслідок.

Наслідок 2. *Нехай* $\Phi \in \Omega$ *і* $\ln \Phi(x) = O(x)$, $x \to \infty$. *Для того щоб* $\ln M_f(r) \sim \Phi(\ln r)$ *при* $r \to +\infty$, *необхідно і достатньо, щоб для кожного* $\varepsilon > 0$ *виконувались умови* 1 *і* 2 *теореми* 5.

Припустимо, що функція f має нулі в точках z_k і всі $z_k \ne 0$ (це не впливає на загальність). Тоді неванліннівська рахуюча функція послідовності (z_k) запишеться у вигляді

$$N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,f)}{t}\,dt, \quad N(t,f) = \sum_{|z_n| \le t} 1.$$

З одного боку, неважко показати (і це добре відомо), що

$$N(r,f) = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{r}{|z_k|} = -\sum_{k=1}^{n} \ln |z_k| + n \ln r, \tag{23}$$

якщо тільки $|z_n| \le r \le |z_{n+1}|$. З іншого боку, якщо розглянемо степеневий ряд

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\prod_{n=1}^{k}\frac{1}{|z_n|}\right)z^k,$$

то $\tilde{f}$ — ціла функція така, що

$$\ln\mu_{\tilde{f}}(r) = \ln\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{|z_k|} + n\ln r, \tag{24}$$

якщо тільки $|z_n| \le r \le |z_{n+1}$. З (23) та (24) маємо, що $\ln\mu_{\tilde{f}}(r) = N(r, f)$. Тому з теореми 5 випливає наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай* $\Phi \in \Omega$ *Для того щоб* $N(r, f) \sim \Phi(\ln r)$ *при* $r \to \infty$, *необхідно і достатньо, щоб для кожного* $\varepsilon > 0$:

1) *існувало* $n_0 \in \mathbb{N}$ *таке, що для всіх* $n \ge n_0$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln|z_k| \ \ge\ n\psi(\varphi(n/(1+\varepsilon)));$$

2) *існувала зростаюча послідовність* (n_k) *натуральних чисел така, що*

$$\sum_{k=1}^{n_k}\ln|z_k| \ \le\ n_k\psi(\varphi(n_k/(1-\varepsilon)))$$

і виконувалось співвідношення (22).

6. Деякі наслідки і відкриті проблеми. З одного боку, для цілого ряду Діріхле (2) нехай

$$\nu(\sigma, F) = \max\{n \ge 0 : |a_n|\exp(\sigma\lambda_n) = \mu(\sigma, F)\}$$

— центральний індекс. Тоді [6, с. 182]

$$\ln\mu(\sigma, F) = \ln\mu(\sigma_0, F) + \int_{\sigma_0}^{\sigma}\lambda_{\nu(t, F)}dt$$

і, отже, $\ln\mu(\sigma, F)$ опукла на $(-\infty, +\infty)$ функція. З іншого боку, теорема 5 із [7] вказує на справедливість такої леми.

Лема 2. *Нехай* $\Phi \in \Omega$ *Для того щоб для кожної опуклої на* $(-\infty, +\infty)$ *функції* G *співвідношення* $G(\sigma) \sim \Phi(\sigma)$ *і* $G'(\sigma) \sim \Phi'(\sigma)$, $\sigma \to \infty$, *де* G' — *правостороння похідна функції, були рівносильними, необхідно і достатньо, щоб для кожного* $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{\Phi(\sigma^*) + \Phi'(\sigma^*)(\sigma - \sigma^*)}{\Phi(\sigma)} < 1, \tag{25}$$

де $\sigma^* = \varphi((1-\varepsilon)\Phi'(\sigma))$.

Умову (25) можна записати у вигляді

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\Phi(\varphi((1-\varepsilon)x)) + (1-\varepsilon)x(\varphi(x) - \varphi((1-\varepsilon)x))}{\Phi(\varphi(x))} < 1$$

і за правилом Лопіталя вона виконується, якщо

$$(1-\varepsilon)\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{x\varphi'(x) + \varphi(x) - \varphi((1-\varepsilon)x)}{x\varphi'(x)} < 1,$$

тобто, якщо для кожного $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{1}{x\varphi'(x)}\int_{(1-\varepsilon)x}^{x}\varphi'(t)\,dt \ \le\ \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{26}$$

Тому з теореми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 3. *Нехай* $\Phi \in \Omega$ *і виконується* (26). *Для того щоб* $\lambda_{\nu(\sigma, F)} \sim \Phi'(\sigma)$, $\sigma \to \infty$, *необхідно і достатньо, щоб виконувались умови* 1 *і* 2 *теореми* 1.

Виникає питання, якою має бути необхідна і достатня умова на коефіцієнти a_n для того, щоб $\lambda_{\nu(\sigma, F)} \sim \Phi'(\sigma)$, $\sigma \to \infty$, якщо (26) не виконується. На нашу думку справедлива така гіпотеза.

Гіпотеза 1. *Нехай* $\Phi \in \Omega$. *Для того щоб* $\lambda_{\nu(\sigma, F)} \sim \Phi'(\sigma)$ *при* $\sigma \to \infty$, *необхідно і достатньо, щоб для кожного* $\varepsilon > 0$ *виконувались умови* 1 *і* 2 *теореми* 1 *з послідовністю* (λ_{n_k}), *що задовольняє умову* (7).

Якщо

$$\nu_{\tilde{f}}(r) = \max\left\{n > 0: \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{|z_k|}\right)r^n = \mu_{\tilde{f}}(r)\right\}$$

— центральний індекс функції $\tilde{f}$, то ясно, що $n(r, f) = \nu_{\tilde{f}}(r)$. Тому гіпотеза 1 породжує наступне припущення.

Гіпотеза 2. *Нехай* $\Phi \in \Omega$. *Для того щоб* $n(r, f) \sim \Phi(\ln r)$ *при* $r \to +\infty$, *необхідно і достатньо, щоб виконувались умови* 1 *і* 2 *теореми* 6, *але з послідовністю* (n_k), *яка задовольняє умову*

$$n_k \sim \Phi'\left(\frac{1}{n_{k+1} - n_k}\int_{n_k}^{n_{k+1}} \varphi(t)\,dt\right), \quad k \to +\infty.$$

Нам здається, що незростання функції $\Phi'(x)/\Phi(x)$ в теоремі 4 можна послабити, тобто справедлива така гіпотеза.

Гіпотеза 3. *Нехай* $\Phi \in \Omega$ *і для деякого* $\alpha \in [0, 1)$ *функція* $\Phi'(x)/(\Phi(x))^{1+\alpha}$ *незростаюча. Тоді справедливий висновок теореми* 4.

1. *Lindelöf E.* Sur la détermination de la croissance des fonctions entiéres définies par un développement de Taylor // Bull. Soc. math. – 1903. – **27**, № 1. – P. 1 – 62.
2. *Говоров Н. В., Черных Н. М.* О признаках полной регулярности роста некоторых классов целых функций экспоненциального типа, представленных интегралами Бореля, рядами Ньютона, Дирихле и степенными рядами // Докл. АН УССР. – 1979. – **249**. – № 6. – С. 1295 – 1299 .
3. *Srivastava G. S., Junea O. P.* On entire functions of slow growth // Ann. Soc. Math. Polon. Ser. 1. – 1984. – **25**. – P. 133 – 141.
4. *Шеремета М. Н.* Двучленная асимптотика целых рядов Дирихле // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1990. – **54**. – С. 16 – 25.
5. *Шеремета М. Н.* О соотношениях между максимальным членом и максимумом модуля целого ряда Дирихле // Мат. заметки. – 1992. – **51**, № 5. – С. 141 – 148.
6. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука. – 1976. – 536 с.
7. *Братищев А. В.* Об обращении правила Лопиталя // Механика сплошной среды. – Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. гос. ун-та. – 1985. – С. 28 – 42.

Одержано 05.06.96