УДК 517.5

Ю. В. Крякин (Одес. ун-т)

О ПРИБЛИЖЕНИИ ЧЕБЫШЕВСКИМИ СПЛАЙНАМИ В МЕТРИКЕ L_p, $p > 0$

The direct Jackson estimate is proved for the approximation by Chebyshev splines in the classes L_p, $p > 0$.

Доведено пряму оцінку Джексона для наближення чебишевськими сплайнами в класах L_p, $p > 0$.

1. Введение. Обобщение основных результатов теории сплайн–приближений по полиномиальной системе на чебышевские системы осуществлялось в работах С. Карлина [1], Х. Йонена и К. Шерера [2], Л. Шумакера [3], З. Вронича [4, 5]. Так, З. Вронич [4], используя соответствующие разделенные разности по равномерному набору узлов, определил модули непрерывности высоких порядков для чебышевских систем и перенес на них ряд классических теорем теории сплайн–приближений. В частности, им было доказано неравенство типа Джексона с k–м модулем непрерывности в равномерной метрике. Вопрос о справедливости этого неравенства в интегральной метрике оставался открытым [4, 5]. Мы ликвидируем этот пробел и установим прямую оценку для приближения сплайнами по чебышевским системам функций в метрике L_p, $p > 0$. При этом применяется подход промежуточного кусочно–полиномиального приближения. Этот подход основан на оценке Х. Уитни и в метрике L_p, $p > 0$, ранее использовался Э. Стороженко и П. Освальдом [6, 7].

При этом существенными являются два момента:

а) оценка Уитни в интегральной метрике для чебышевских систем;

б) доказательство Освальда оценки типа Джексона в случае алгебраических сплайн-приближений.

Оценка Уитни в интегральной метрике для чебышевских систем получена методом „усреднения по узлам интерполяции", предложенным в [8, 9]. Доказательство этой оценки приведено в третьем пункте.

Основные этапы доказательства Освальда — неравенства Маркова и разных метрик для полиномов, использование B-сплайнов (конструкция Попова – Сендова), для промежуточного приближения, оценка модуля непрерывности через скачки производной и т.д. допускают перенос на случай чебышевских систем и рассмотрены в пункте четыре. Там же дано доказательство основного результата.

Второй пункт посвящен основным обозначениям и определениям.

2. Обозначения, определения, вспомогательные факты.

2.1. Чебышевские системы. Пусть $U = U_n = \{ u_i(x) \in C^n,\ i = 0, \dots, n \}$ — обобщенная полная система Чебышева функций на отрезке $[0, 1]$. Как известно [4, 5], функции этой системы можно записать так:

$$u_0(x) = w_0(x);$$

$$u_i(x) = w_0(x) \int_0^x w_1(t_1) \int_0^{t_1} w_2(t_2) \dots \int_0^{t_{i-1}} w_i(t_i) dt_i \dots dt_1, \tag{1}$$

где весовые функции $w_i \in C^{n-i}(I)$, $w_i > 0$. В дальнейшем будем считать, что $w_0(t) = 1$. Сопряженная система $V = V_n = v_i$, $i = 0, \dots, n$, определяется следующим образом:

$$v_0(x) = 1;$$

$$v_i(x) = \int_0^x w_n(t_1) \int_0^{t_1} w_{n-1}(t_2) \dots \int_0^{t_{i-1}} w_{n-i+1}(t_i) dt_i \dots dt_1.$$

Положим

$$D_j f(x) = f'(x)\big(w_j(x)\big)^{-1}; \qquad D_j^* f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{w_j(x)}\right), \qquad j = 0, \ldots, n;$$

$$L_j f = D_j \ldots D_1 f; \qquad L_j^* f = D_1^* \ldots D_j^* f, \qquad j = 1, \ldots, n;$$

$$Lf = D_0 L_n f; \qquad L^* f = L_n^* D_0 f.$$

Функции систем U_n, V_n образуют нуль–пространства операторов L, L^*.

2.2. Модули непрерывности. Введем обозначение

$$D_U\begin{pmatrix} u_0 & \ldots & u_k \\ x_0 & \ldots & x_k \end{pmatrix} = \det\left[L_{d_j} u_i(x_i)\right]_{i,j=0}^{k},$$

где $k = 0, \ldots, n$, $d_j = \max\{l : x_j = \ldots = x_{j-l},\ \ j = 1, \ldots, k\}$.

Следуя [10], определяем разделенную разность функции f в точках $\{x_i\}$ относительно системы U_n:

$$[x_0, \ldots, x_{n+1}; f]_U = \frac{D_U\begin{pmatrix} u_0 & \ldots & u_n & f \\ x_0 & \ldots & x_n & x_{n+1} \end{pmatrix}}{D_U\begin{pmatrix} u_0 & \ldots & u_{n+1} \\ x_0 & \ldots & x_{n+1} \end{pmatrix}},$$

где u_{n+1} вычисляется по формуле (1) с $w_{n+1} = 1$. Отметим, что определенная таким образом разделенная разность не зависит от порядка узлов x_i и для полинома по системе U_n, интерполирующего функцию f в точках $\{x_i\}_0^n$, имеем

$$f(x) - P^U(x) = [x, x_0, \ldots, x_n; f]_U\, W(x), \tag{2}$$

где $W(x)$ — полином по системе U_{n+1}, равный нулю в точках $\{x_i\}_0^n$ и такой, что $LW = 1$ [4, 5].

Определим таже конечную разность [4, 5]

$$\Delta_h^U f(x) = n!\, h^{n+1}[x, x+h, \ldots, x+(n+1)h; f]_U$$

и модули непрерывности функции f относительно системы U в классах L_p, $p > 0$:

$$\omega_U(f, \delta)_p = \sup_{0<h<\delta} \left\|\Delta_h^U f\right\|_p \left(I_{(n+1)h}\right), \quad I_h = [0, 1-h],$$

где

$$\|f\|_p(J) = \left(\int_J |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

В силу (2) для полиномов по чебышевской системе U_n имеем $\omega_U(P^U, \delta)_p = 0$.

Модули непрерывности ω_U имеют обычные, известные свойства модулей непрерывности n–го порядка [5]. Нам понадобятся следующие соотношения*:

$$\omega_U(P^U, \delta)_p \preccurlyeq \|f\|_p;$$

$$\omega_U(f+g, \delta)_p \preccurlyeq \omega_U(f, \delta)_p + \omega_U(g, \delta)_p.$$

---

* Пишем $A \preccurlyeq B$, если $0 < A \le C(U, p)B$, то же касается символов $\succcurlyeq$ и $\asymp$.

При $p \geq 1$ их доказательство приведено в [5]. Эти неравенства при $0 < p < 1$ доказываются так же, как и в алгебраическом случае.

2.3. Чебышевские сплайны, *B*-сплайны. Пусть $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^N : 0 = x_0 < < x_1 < \ldots < x_N = 1$ — произвольное разбиение отрезка I. Совокупность чебышевских сплайнов по системе U_n дефекта $k = 1, \ldots, n+1$ обозначим через $U_n^k(\Delta)$, т.е. функция $u(x) \in U_n^k(\Delta)$, если

$$u(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{j,i} u_j(x), \quad x \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \ldots, N,$$

и при $N \geq 1$ имеет место условие

$$L_{n-k} f(x) \in C(I).$$

Функции из $U_n^{n+1}(\Delta)$, не удовлетворяющие условию склеивания в точках разбиения, будем называть кусочно-чебышевскими функциями порядка n.

Для заданного разбиения Δ положим

$$\Delta_i = (x_{i-1}, x_i), \quad \overline{\Delta} = \max_i |\Delta_i|, \quad \underline{\Delta} = \min_i |\Delta_i|, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Назовем разбиение „почти равномерным”, если $|\overline{\Delta}|/|\underline{\Delta}| \leq 3$.

Доопределим узлы $x_i = 0$, $i < 0$, и $x_i = 1$ при $i > N$. Можно доказать [5], что для достаточно гладкой функции f разделенная разность по чебышевской системе V_n допускает представление

$$[x_i, \ldots, x_{i+n+1}; f]_V = \int_{x_i}^{x_{i+n+1}} L^* f(t) M_{i,n}(t)\, dt.$$

Здесь $M_{i,n}(x)$ так называемый B-сплайн, т. е. сплайн по системе $U_n^1(\Delta)$, удовлетворяющий условиям

$$\operatorname{supp} M_{i,n} = [x_i, \ldots, x_{i+n+1}];$$

$$M_{i,n}(x) \geq 0, \qquad x \in I;$$

$$\int_I M_{i,n}(t)\, dt = 1.$$

Явное выражение для $M_{i,n}$ через разделенные разности можно найти в [5].

2.4. Неравенство разных метрик и неравенство Маркова. Для каждого полинома P^U по чебышевской системе U_n на отрезке J и при $0 < p < q \leq \infty$ имеет место соотношение

$$\|P^U\|_q(J) \preccurlyeq |J|^{1/p - 1/q} \|P^U\|_p(J).$$

Доказательство вытекает из оценки

$$\|P^U\|_p(J) \asymp \|P^U\|_\infty |J|^{1/p}, \tag{3}$$

которую в свою очередь нетрудно получить из неравенства Маркова в равномерной метрике [2, 5]:

$$\|D_1 P^U\|_\infty(J) \preccurlyeq |J|^{-1} \|P^U\|_\infty.$$

Для полноты изложения, дадим эскиз доказательства неравенства (3). Очевидно, достаточно проверить оценку снизу. Пусть $\|P^U\|_\infty(J) = P^U(a)$. Применяя теорему Лагранжа и неравенство Маркова, получаем

$$|P^U(t) - P^U(a)| \leqslant \|(P^U)'\|_\infty |(t-a)| \leqslant \|D_1 P^U\|_\infty |(t-a)| \leqslant$$
$$\leqslant |P^U(a)||(t-a)/|J|,$$
$$|P^U(t)| \geq |P^U(a)|(1 - C_U|t-a|/|J|).$$

Последнюю оценку достаточно проинтегрировать по отрезку длины $|J|/(2C_U)$ с концом в точке a. Из неравенства разных метрик и неравенства Маркова в равномерной метрике вытекает следующее неравенство Маркова в интегральной метрике:

$$\| L_i P^U \|_p(J) \leq |J|^{-i} \| P^U \|_p(J), \quad i = 1, \dots, n.$$

3. Оценка Уитни. Ключевую роль в дальнейшем играет следующая оценка типа Уитни для чебышевских полиномов.

Теорема 1. *Для каждой функции* $f \in L_p(J)$, $p > 0$, $J = (a, b)$ *существует полином* $P^U \in U_n(J)$ *такой, что*

$$\left\| f(t) - P^U(t) \right\|_p^p(J) \leqslant I_{n+1}(f)_p(J).$$

Здесь

$$I_n(f)_p(J) = n|J|^{-1} \int_0^{|J|/n} dh \int_a^{b-nh} \left| \Delta_h^U f(y) \right|^p dy.$$

Сразу отметим, что доказательство теоремы в случае $n = 1$ незначительно отличается от случая полиномиальной аппроксимации [8] и мы его опустим. В [8, 9] предложен метод, позволяющий получить приведенную оценку для $n \geq 2$ „интегрируя по параметру тождества Уитни". Этот метод применим для вывода оценки в интегральной метрике в том случае, когда справедлив аналог оригинального доказательства Уитни. Рассуждения, примененные Х. Уитни, являются достаточно гибкими и в случае чебышевских сплайнов приводят к нужному результату в равномерной метрике [4, 5]. Покажем, как, используя тождества Уитни для чебышевских сплайнов, получить оценку и в интегральной метрике. Нам потребуются следующие обобщения лемм Уитни.

Лемма А [11, 4]. *Пусть* $n, v \in N$, $n, v \geq 1$, $X = \{0, 1, \dots, vn\}$. *Тогда существуют числа*

$$a_i = a_i(s, v, n), \quad i = 0, \dots, vn - n - 1;$$

$$b_i = b_i(s, v, n), \quad j = 0, \dots, n,$$

такие, что

$$f(s) = \sum_{j=0}^{vn-n-1} a_j \Delta_1^U f(j) + \sum_{j=0}^{n} b_j f(jv), \quad s \in X.$$

Кроме того, при $s = 1$ *для любого положительного* $\varepsilon > 0$ *найдется* v *такое, что*

$$\sum_{j=1}^{n} |b_i(s, v, n)| < \varepsilon.$$

Непосредственным следствием леммы А, является такое утверждение.

Лемма В. *Пусть* $t_k = b - a/2^k n$, $k \in N$, $S' = \{a + t_k j, \ j = 0, \dots, 2^k n\}$; $S_0 = S'_0$, $S_k = S'_k - S'_{k-1}$, *и* $f(i) = 0$, $i = 0, \dots, n$. *Тогда для* $x \in S_k$ *справедливо неравенство*

$$f(x) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{2^k n-n-1} \left| \Delta_{t_i}^{U} (a + j t_i) \right|.$$

***Схема доказательства теоремы* 1.** Перейдем от отрезка $[a, b]$ к меньшему отрезку

$$[a(t), b(t)], \quad a(t) = a + c_1 t, \quad b(t) = b - c_2 t, \quad c_1, \quad c_2 = 0,$$

и определим полиномы $Q^U(x, t)$ условиями

$$Q^U(a_j(t)) = f(a_j(t)),$$

где $a_j(t) = a(t) + (b(t) - a(t)) j/n$, $j = 0, \ldots, n$.

Положим $f_t = f - Q^U$ и выберем $v = v(n, p)$ так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{n} \left| b_j(1, v, n) \right|^p (j^{-1}) < (4n)^{-1}.$$

Для фиксированного v определим μ из условия $v < 2^{\mu} \leq 2v$ и положим $m = 2^{\mu} n$.

Обозначим $\beta_k(t) = a(t) + (b(t) - a(t)) k/m$ и выберем $c_1 = 1/2m$. При таком выборе неподвижная точка преобразования $[a, b]$ в $[a(t), b(t)]$ не совпадает с точкой $\beta_k(t)$.

Введем обозначения

$$h_1(t) = \frac{(m-k)(b(t) - a(t))}{m(m+1)}; \quad h_2(t) = \frac{(k+1)(b(t) - a(t))}{m(m+1)};$$

$$\Delta_1(t) = \int_a^{a(t)} \left| \Delta_{a(t)-x}^{U} \quad f(x) \right|^p dx; \quad \Delta_2(t) = \int_{b(t)}^{b} \left| \Delta_{b(t)-x}^{U} \quad f(x) \right|^p dx;$$

$$\Delta_3(t) = \Delta(k, j, t) = \int_0^{h_1(t)} \left| \Delta_x^U f(\beta_k(x) + jx) \right|^p dx;$$

$$\Delta_4(t) = \Delta(k, j, t) = \int_0^{h_2(t)} \left| \Delta_{-x}^U f(\beta_k(x) - jx) \right|^p dx, \quad j = 0, \ldots, nv - n - 1.$$

В этих обозначениях справедливы следующие оценки:

$$\int_a^b |f_t(x)|^p dx \leqslant \Delta_1(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} |f_t(x)|^p dx + \Delta_2(t); \tag{4}$$

$$\int_{a(t)}^{b(t)} |f_t(x)|^p dx \leqslant (b-a) \sum_{k=1}^{m-1} \left| f_t(\beta_k(t)) \right|^p +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{nv-n-1} (\Delta_3(k, j, t) + \Delta_4(k, j, t)); \tag{5}$$

$$(n+1)(b-a)^{-1} \int_0^{(b-a)/(n+1)} \Delta_r(t) dt \leqslant I_{n+1}(f)_p(J), \quad r = 1, 2, 3, 4; \tag{6}$$

$$\int_0^{(b-a)/(n+1)} \left| f_t(\beta_k(t)) \right|^p dt \leqslant I_{n+1}(f)_p(J), \quad k = 1, \ldots, m-4. \tag{7}$$

Доказательство этих оценок аналогично их доказательству для полиномиального приближения [8, 9]. Теорема 1 — непосредственное следствие неравенств (4)–(7):

$$\inf_{pU} \| f(t) - P^U(t) \|_p^p(J) \le (n+1)(b-a)^{-1} \int_0^{(b-a)/(n+1)} dt \int_a^b |f_t(x)|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant I_{n+1}(f)_p(J).$$

4. Теорема типа Джексона для сплайн–аппроксимации. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого разбиения* Δ и *функции* $f \in L_p(I)$, $p > 0$, *найдется чебышевский сплайн* $S_f \in U_n^1(\Delta)$ *такой, что*

$$\|f - S_f\|_p(I) \leqslant \omega_U(f, |\overline{\Delta}|/N)_p(I).$$

Доказательство теоремы 2 существенным образом опирается на следующее вспомогательное утверждение.

Основная лемма. *Для данных* $n \in N$, $p > 0$, *почти равномерного разбиения* Δ *и каждой функции* $S \in U_n^k(\Delta)$, $k = 2, \ldots, n+1$, *найдется функция* $\tilde{S} \in U_n^{k-1}(\Delta)$, *для которой*

$$\|S - \tilde{S}\|_p \leqslant \omega_U(S, |\overline{\Delta}|/(n+1))_p.$$

Отметим, что в случае полиномиального приближения, при $0 < p < 1$, эта лемма доказана в [7]. Докажем лемму позже, а сейчас покажем, как ее использовать для получения доказательства теоремы 2.

Доказательство оценки Джексона. Согласно результату П.Освальда [7] для любого разбиения Δ найдется разбиение Δ^*, которое получается из Δ выбрасыванием точек и такое, что $\left|\underline{\Delta^*}\,\overline{\Delta}\right| \le 3$. Поэтому можно сразу считать разбиение почти равномерным. Для упрощения записи будем предполагать, что S_i — сплайн дефекта i, и писать $\omega_U(f)$ вместо $\omega_U(f, |\overline{\Delta}|/(n+1))_p$.

Применяя теорему 1 для каждого интервала разбиения Δ_j и складывая полученные неравенства, имеем

$$\|f - S_{n+1}\|_p^p \leqslant \sum_{j=1}^{N} I_{n+1}(f)_p(\Delta_j) \leqslant \omega_U(f)^p.$$

Из основной леммы вытекает

$$\|S_{n+1} - S_n\|_p^p \leqslant \omega_U(S_{n+1})^p \leqslant \omega_U(S_{n+1} - f)^p + \omega_U(f)^p \leqslant$$

$$\leqslant \|f - S_{n+1}\|_p^p + \omega_U(f)^p \leqslant \omega_U(f)^p.$$

Следовательно,

$$\|f - S_n\|^p \leqslant \|f - S_{n+1}\|^p + \|S_{n+1} - S_n\|^p \leqslant \omega_U(f)^p.$$

Доказательство теоремы 2 завершается итерацией подобных рассуждений.

Доказательство основной леммы. Доказательство леммы удобно разбить на несколько частей.

1. Прежде всего оценим снизу модуль непрерывности с помощью скачков производной в точках разбиения. Для $S = \sum_{i=1}^N P_i^U(x)\chi(\Delta_i) \in U_n^k(\Delta)$ обозначим

$$a_i = L_s P_{i+1}^U(x_i) - L_s P_i^U(x_i), \quad s = n - k + 1, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

и докажем, что

$$|\Delta|^{1+sp}\sum_{i=1}^{N-1}|a_i|^p \leqslant \omega_U(S,|\Delta|/(n+1))_p^p. \tag{8}$$

Положив $h = (k+1)^{-1}\underline{\Delta}$, определим интервалы $\Delta_i' = (x_i, x_i + h)$ и их сдвиги $\Delta_i'' = (x_i - (n+1)h, x_i - nh)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Интервалы выбраны так, что для x из Δ_i'' хорошо подсчитывается разность Δ_h^U:

$$\Delta_h^U S(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j(x,h) P_i^U(x+jh) + c_{n+1}(x,h) P_{i+1}^U(x+(n+1)h) =$$

$$= \Delta_h^U P_i(x) + c_{n+1}(x,h)\left(P_{i+1}^U(x+(n+1)h) - P_i^U(x+(n+1)h)\right) =$$

$$= c_{n+1}(x,h)\left(P_{i+1}^U(x+(n+1)h) - P_i^U(x+(n+1)h)\right).$$

Учитывая ограниченность $|c_{n+1}(x,h)|$ константой, зависящей только от системы U [5], и выбор величин $a_i, h, \Delta_i', \Delta_i''$, используя неравенства Маркова и разных метрик, получаем

$$\omega_U\left(S, \frac{\overline{\Delta}}{n+1}\right)_p^p \geqslant I_{n+1}(S,h)_p \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{N-1}\int_{\Delta_i''}|\Delta_U S(x)|^p dx \geqslant \sum_{i=1}^{N-1}\int_{\Delta_i'}\left|P_i^U(x) - P_{i+1}^U(x)\right|^p dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{N-1} h\left\|P_i^U(x) - P_{i+1}^U(x)\right\|_\infty^p(\Delta_i') \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{N-1}\overline{\Delta}^{1+sp}\left\|L_s P_i^U(x) - L_s P_{i+1}^U(x)\right\|_\infty^p(\Delta_i') \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\Delta}^{1+sp}\sum_{i=1}^{N-1}|a_i|^p.$$

2. Теперь оценим с помощью скачков производной норму разности между кусочно-чебышевским S и непрерывным $\tilde{S}$ сплайнами. Пусть

$$S(x) = \sum_{j=0}^{N-1} P_j^U(x)\chi(\Delta_i), \qquad P_j^U(x_{j-1}) - P_{j-1}^U(x_{j-1}) = a_j, \quad j = 2, \ldots, N.$$

Определим на каждом интервале $\Delta_i = (x_{i-1}, x_i)$ кусочно-чебышевскую функцию $Q_i(x)$ первого порядка условиями

$$Q_1(0) = 0, \qquad Q_1(x_1) = a_1,$$

$$Q_i(x_{i-1}) = -a_i/2, \quad Q_i(x_i) = a_i/2, \quad i = 2, \ldots, N-1,$$

$$Q_N(x_{N-1}) = -a_{N-1}/2, \quad Q_N(1) = 0.$$

Их L_p-квазинорма эквивалентна [5, с. 13] квазинорме кусочно-полиномиальных функций, определяемых теми же условиями. Положим

$$\tilde{S}(x) = S(x) + \sum_{i=1}^{N} Q_i(x)\chi(\Delta_i).$$

По построению $\tilde{S}(x)$ является непрерывным чебышевским сплайном. Норма разности $|S - \tilde{S}|$ легко оценивается

$$\left\| S - \tilde{S} \right\|_p^p \leqslant \sum_{i=1}^{N} \int_{\Delta_i} |Q_i(x)|^p \, dx \leqslant \overline{\Delta} \sum_{i=1}^{N-1} \left| a_i \right|^p . \tag{9}$$

3. И наконец, используя идеи В.Попова и Б.Сендова [12], докажем оценку, позволяющую провести индукцию. Обозначим через $D_1 U_{n-1}$ чебышевскую систему, возникающую после дифференцирования функций системы U_n:

$$D_1 U_{n-1} = \{ D_1 u_{j+1}, \ j = 0, \dots, n-1 \}.$$

Легко видеть, что система $D_1 U_{n-1}$ порождается функциями $1, w_2(t), \dots$ $\dots, w_n(t)$. Соответствующее множество сплайнов дефекта k обозначим $D_1 U_{n-1}^k(\Delta)$. Докажем, что для чебышевских сплайнов $S \in U_n^k(\Delta)$, $S^* \in$ $\in D_1 U_{n-1}^k(\Delta)$ дефекта k найдется чебышевский сплайн $\tilde{S} \in U_n^{k-1}(\Delta)$, дефекта $k-1$ такой, что

$$\left\| S - \tilde{S} \right\|_p^p \leqslant \overline{\Delta}^p \left\| D_1 S - S^* \right\|_p^p . \tag{10}$$

Положим

$$A_i = \int_{\Delta_i} \left(D_1 S(t) - S^*(t) \right) w_1(t) \, dt;$$

$$\overline{A}_i = \int_{\Delta_i} \left| D_1 S(t) - S^*(t) \right| dt, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\tilde{S}(x) = S(0) + \int_0^x \left(S^*(t) + \sum_{i=1}^{N} A_i \, c_i \, M_{i-n, n-1}(t) \right) w_1(t) \, dt.$$

Здесь $M_{i-n, n-1}(t)$ — B-сплайн по системе

$$D_1 U_{n-1}(\Delta); \ c_i = \sum_{j=0}^{N-1} P_j^U \left(\int_0^1 M_{i-n, n-1}(t) \, w_1(t) \, dt \right)^{-1}.$$

Оценим $|S(x) - \tilde{S}(x)|$ для $x \in \Delta_i$, $i = 1, \dots, N$,

$$S(x) - \tilde{S}(x) = \left(S(0) + \int_0^x D_1 S(t) \, w_1(t) \, dt \right) -$$

$$- \left(S(0) + \int_0^x \left(S^*(t) + \sum_{i=1}^{N} A_i \, c_i \, M_{i-n, n-1} \quad (t) \right) w_1(t) \, dt \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{i-1} A_j + \int_{x_{i-1}}^x \left(D_1 S(t) + S^*(t) \right) w_1(t) \ -$$

$$- \sum_{j=1}^{i-1} A_j - \sum_{j=i}^{\min(i+n, N)} \overline{A}_j \int_{x_{j-n}}^x c_j \, M_{j-n, n-1} \quad (t) \, w_1(t) \, dt.$$

Поэтому

$$\left| S(x) - \tilde{S}(x) \right| \leqslant \sum_{j=i}^{\min(i+n, N)} \overline{A}_j .$$

Применяя эту оценку и неравенство разных метрик, получаем

$$\|S-\tilde{S}\|_p^p = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Delta_i} |S(x)-S^*(x)|^p dx \leqslant \overline{\Delta}\sum_{i=1}^{N} \overline{A}_i^p \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\Delta}\sum_{i=1}^{N} |\Delta_i|^{p-1} \int_{\Delta_i} |D_1 S(x) - S^*(x)|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\Delta}^p \|D_1 S - S^*\|_p^p.$$

Последовательное использование неравенств типа (10) для систем U_n, $D_1 U_{n-1}$, $D_2 D_1 U_{n-2}, \ldots$ и оценки (9) устанавливает существование функции $\tilde{S}$ из U_n^{k-1} такой,что

$$\|S-\tilde{S}\|_p^p \leqslant \overline{\Delta}^{1+sp} \sum_{j=1}^{N-1} |a_j|^p .$$

Вместе с неравенством (8) это доказывает основную лемму.

1. *Karlin S.* Total positivity and applications. – Stanford: Stanford univ. press,1968. – 576 p.
2. *Johnen H. and Sherer K.* Direct and inverse theorems for best approximation by Λ–splines. Spline Functions (K. Böhmer, G. Meinardus and W. Schemp, eds.) // Lect. Notes Math. – 1975. – **501**. – P. 116–131.
3. *Shumaker L. .L.* Spline Functions: Basic Theory. – New York: Wiley, 1968.
4. *Wronich Z.* Moduli of smoothness associate with Chebyshev systems and approximation by *L*–splines // Constr. Theory Functions'84 / Bl. Sendov, P. Petrushev, R. Maleev, S. Tashev, eds. – Sofia, 1984. – P. 906–916.
5. *Wronich Z.* Chebyshevian splines // Jisse. math. CCCV. – Warszawa, 1990. – 98 p.
6. *Стороженко Э. А., Освальд П.* Теорема Джексона в пространствах $L^p(R^k)$, $0<p<1$ // Сиб. мат. журн. – 1978. – **4**. – С. 888–901.
7. *Освальд П.* Приближение сплайнами в метрике Lp, $0<p<1$ // Math. Nachr. – 1980. – **94**. – С. 69–96.
8. *Стороженко Э. А., Крякин Ю.В.* О теореме Уитни в L^p-метрике, $0<p<\infty$ // Мат. сб. – 1995. – **186**, № 3. – С. 131–142.
9. *Крякин Ю.В.* Приблежение функций на единичной окружности в пространствах L_p и H^p: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1985.
10. *Popoviciu T.* Sur la reste dans certaines formules lineaires d'approximation de l'analyse // Math. (Cluj). – 1959. – **1** (24). – P. 95–142.
11. *Whitney H.* On function with bounded n-th differences // J. Mat. Pure and Appl. – 1955. – **36**. – P. 67–95.
12. *Сендов В. Х., Попов В. А.* О классах характеризуемых наилучшим приближением сплайн-функциями // Мат. заметки – 1970. – **8**, № 2. – С. 137–148.

Получено 14.05.96