УДК 519.642.7

К. И. Малышев, Н. Я. Тихоненко (Одес. ун-т)

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕНУЛЕВЫМ ЯДРОМ

We justify direct methods of approximate solution of linear operator equations with nonzero kernels and apply these methods when justifying projective methods of approximate solution of the standard singular integral equations with Cauchy kernels on the unit disk with a positive index.

Робота присвячена обґрунтуванню прямих методів наближеного розв'язання лінійних операторних рівнянь з ненулевими ядрами та їх застосуванню до обґрунтування проекційних методів наближеного розв'язання нормального випадку сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші на одиничному колі при позитивному індексі.

1. Пусть X, Y — банаховы пространства. Рассматривается уравнение

$$Kx = y, \qquad x \in X, \qquad y \in Y, \tag{1}$$

где $K\colon X \to Y$ — линейный оператор такой, что $\dim \ker K = m < \infty$, т.е. однородное уравнение (1) имеет m линейно независимых решений x_j^0, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$, а общее решение уравнения (1) зависит от m произвольных постоянных. Такая ситуация очень часто встречается в приложениях. Например, в случае обыкновенных дифференциальных уравнений для однозначной разрешимости уравнения (1) задают m условий, которым должно удовлетворять его решение. Таким образом, для однозначной разрешимости уравнения (1) на его решение необходимо наложить некоторое число условий, которые можно записать в виде

$$\Gamma x = z, \qquad x \in X, \qquad z \in Z, \tag{2}$$

где Z — банахово пространство конечной размерности, а $\Gamma\colon X \to Z$ — линейный конечномерный оператор. Ниже уточним размерность пространства Z и структуру оператора Γ.

Для упрощения дальнейших рассуждений совокупность уравнений (1) и условий (2) запишем в виде

$$Nx = \langle y, z\rangle, \tag{3}$$

где N — линейный оператор, отображающий пространство X в пространство $Y + Z = \{\langle y, z\rangle \mid y \in Y,\ z \in Z\}$ и действующий по правилу $Nx = \langle Kx, \Gamma x\rangle$. При этом норму в пространстве $Y + Z$ введем следующим образом: $\|\langle y, z\rangle\|_{Y+Z} =$ $= \|y\|_Y + \|z\|_Z$. Здесь и ниже $Y + Z$ означает прямую сумму пространств Y и Z. Согласно [1], пространство $Y + Z$ является банаховым. Выясним теперь условия существования оператора $N^{-1}\colon Y + Z \to X$.

Теорема 1. *Следующие предложения равносильны*:

1. $N\colon X \to K(X) + \Gamma(X)$ — *биективное отображение*;
2. $X = \ker K \oplus \ker \Gamma$, *т. е.* $X = \ker K + \ker \Gamma$ *и* $\ker K \bigcap \ker \Gamma = \{0\}$;
3. $\Gamma(X) = \Gamma(\ker K)$, $\ker K \bigcap \ker \Gamma = \{0\}$;
4. $K(X) = K(\ker \Gamma)$, $\ker K \bigcap \ker \Gamma = \{0\}$;
5. $\Gamma_0 \overset{\text{def}}{=} (\Gamma|_{\ker K})\colon \ker K \to \Gamma(X)$ — *биекция*;
6. $K_0 \overset{\text{def}}{=} (\Gamma|_{\ker \Gamma})\colon \ker \Gamma \to K(X)$ — *биекция*.

Докажем, например, что $1 \Rightarrow 2$. Пусть оператор $N\colon X \to K(X) + \Gamma(X)$ взаимно однозначен. Покажем, что $X = \ker K \oplus \ker \Gamma$, т. е. покажем, что $X = \ker K + \ker \Gamma$ и $\ker K \bigcap \ker \Gamma = \{0\}$. Поскольку оператор N биективен, $N0 = \langle 0, 0 \rangle$ и если $x \in \ker K \bigcap \ker \Gamma$, то для такого x $N \cdot x = \langle Kx, \Gamma x \rangle = \langle 0, 0 \rangle = N \cdot 0$, откуда $x = 0$, т. е. $\ker K \bigcap \ker \Gamma = \{0\}$. Возьмем произвольный элемент $x \in X$. Тогда элементы $\langle Kx, 0 \rangle$ и $\langle 0, \Gamma x \rangle$ принадлежат пространству $K(X) + \Gamma(X)$. Подействуем на равенство $Nx = \langle Kx, \Gamma x \rangle = \langle Kx, 0 \rangle + \langle 0, \Gamma x \rangle$ оператором N^{-1} (N^{-1} существует, так как N взаимно однозначен). Тогда получим $x = N^{-1}(\langle 0, \Gamma x \rangle) + N^{-1}(\langle Kx, 0 \rangle)$. Обозначим $N^{-1}(\langle 0, \Gamma x \rangle) \in \ker K$, $N^{-1}(\langle Kx, 0 \rangle) \in \ker \Gamma$. Таким образом, любой элемент $x \in X$ представим в виде $x = x' + x''$, где $x' \in \ker K$, $x'' \in \ker \Gamma$. Так как $\ker K \bigcap \ker \Gamma = \{0\}$, то из 1 следует 2. Без особого труда устанавливается равносильность и других утверждений теоремы 1.

Таким образом, при выполнении хотя бы одного из пунктов 2 – 5 теоремы 1 существует оператор $N^{-1}: Y + Z \to X$. Для простоты дальнейших рассуждений будем считать, что $K(x) = Y$, $\Gamma(X) = Z$. Заметим, что операторы $K_0^{-1}K : X \to \ker \Gamma$, $K_0^{-1}K(x' + x'') = x'$; $\Gamma_0^{-1}\Gamma : X \to \ker K$, $\Gamma_0^{-1}\Gamma(x' + x'') = x'$, где $x' \in \ker K$, $x'' \in \ker \Gamma$ являются проекторами. При этом легко видеть, что $K_0^{-1}K + \Gamma_0^{-1}\Gamma = I_X$ — единичный оператор в пространстве X. Поскольку оператор Γ_0 устанавливает изоморфизм между пространствами $\ker K$ и Z, пространство $\Gamma(X) = Z$ имеет размерность m. Так как все конечномерные пространства одинаковой размерности изоморфны [2], то в дальнейшем будем считать, что $Z = \boldsymbol{R}^m$ (или $Z = \boldsymbol{C}^m$ в случае пространства над полем комплексных чисел). Тогда [1, 2] оператор $\Gamma: X \to \boldsymbol{R}^m$ однозначно определяется m линейными функционалами $f_1, f_2, \ldots, f_m$, заданными на пространстве X. При этом оператор Γ является ограниченным, если функционалы f_j являются ограниченными. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — базис пространства $\ker K$. Тогда, чтобы выполнялось равенство $\Gamma(X) = \boldsymbol{R}^m$, необходимо и достаточно, чтобы [2, 3] было выполнено $\det \{f_j(e_i)\}_{i,j=1}^{m} \neq 0$, т. е. функционалы $f_1, f_2, \ldots, f_m$ должны быть линейно независимыми. Таким образом, $\dim Z = \dim \ker K = m$, а оператор Γ задается системой m линейно независимых ограниченных функционалов на пространстве X.

Теорема 2. *Пусть выполняется одна из групп условий теоремы* 1. *Тогда для того, чтобы оператор N^{-1} был бы ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы были ограниченными операторы K_0^{-1} и Γ_0^{-1}. При этом*

$$\| N^{-1} \| = \max \{\| K_0^{-1} \|, \| \Gamma_0^{-1} \|\}. \tag{4}$$

Доказательство. *Необходимость.* Поскольку оператор N^{-1} ограничен, для любого $x \in X$, $x \neq 0$, выполнено неравенство $\|Nx\| \geq \|N^{-1}\|^{-1} \|x\|$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \ker K$, $x \neq 0$. Тогда $Nx = \langle 0, \Gamma x \rangle$, а значит,

$$\| Nx \|_{Y+Z} = \| 0 \|_Y + \| \Gamma x \|_Z = \| \Gamma x \|_Z \geq \| N^{-1} \|^{-1} \| x \|_X.$$

Откуда $\|\Gamma_0^{-1}\| \leq \| N^{-1} \|$, т. е. оператор Γ_0^{-1} ограничен. Аналогичным образом получается оценка $\| K_0^{-1} \| \leq \| N^{-1} \|$, т. е. оператор K_0^{-1} ограничен. Из этих оценок следует оценка

$$\max \{\| K_0^{-1} \|, \| \Gamma_0^{-1} \|\} \leq \| N^{-1} \|. \tag{5}$$

Достаточность. Поскольку операторы K_0^{-1} и Γ_0^{-1} ограничены, то для любого $x \in X$, используя разложение $x = x' + x''$, где $x' \in \ker K$, $x'' \in \ker \Gamma$, получаем

$$\| K_0 x'' \|_Y = \| K x'' \|_Y \geq \frac{1}{\| K_0^{-1} \|} \| x'' \|_X ,$$

$$\| \Gamma_0 x'' \|_Z = \| \Gamma x' \|_Z \geq \frac{1}{\| \Gamma_0^{-1} \|} \| x' \|_X .$$

Следовательно,

$$\| N x \|_{Y+Z} = \| K x'' \|_Y + \| \Gamma x' \|_Z \geq$$

$$\geq \frac{1}{\| K_0^{-1} \|} \| x'' \|_X + \frac{1}{\| \Gamma_0^{-1} \|} \| x' \|_X \geq$$

$$\geq \min \left\{ \frac{1}{\| K_0^{-1} \|}, \frac{1}{\| \Gamma_0^{-1} \|} \right\} \left(\| x'' \|_X + \| x' \|_X \right) \geq$$

$$\geq \min \left\{ \frac{1}{\| K_0^{-1} \|}, \frac{1}{\| \Gamma_0^{-1} \|} \right\} \| x \|_X = \frac{1}{\max \{ \| K_0^{-1} \|, \| \Gamma_0^{-1} \| \}} \| x \|_X .$$

Откуда следует оценка

$$\| N^{-1} \| \leq \max \{ \| K_0^{-1} \|, \| \Gamma_0^{-1} \| \} , \tag{6}$$

т. е. оператор N^{-1} ограничен. Теперь из оценок (5), (6) вытекает оценка (4).

Теорема 3. *Если существует оператор K_r^{-1}, то существует линейное нормированное пространство Z и линейный оператор $\Gamma : X \to Z$ такие, что выполнены условия теоремы* 1. *Если к тому же операторы K и K_r^{-1} ограничены, то ограничены и операторы Γ, K_0^{-1}, Γ_0^{-1} и, следовательно, ограничены операторы N и N^{-1}.*

Доказательство. Определим оператор Γ таким образом, чтобы совпадали операторы K_0^{-1} и K_r^{-1}. Для этого положим $Z = \ker K$ (с нормой $\| \cdot \|_X$) и, кроме того, оператор Γ определим так, чтобы пространство $\ker K$ совпадало со множеством $K_r^{-1}(Y)$. А именно, положим $\Gamma = I_X - K_r^{-1} K$, где I_X — тождественный оператор в X. Поскольку $K \cdot \Gamma = K \cdot (I_X - K_r^{-1} K) = 0$ — тождественно нулевой оператор в X, то множество $\Gamma(X) \subset \ker K$, т. е. $\Gamma : X \to$ $\to \ker K$. Так как для всех $x \in \ker K$ $\Gamma x = x - K_r^{-1} K x$, то $\Gamma_0 \overset{\text{def}}{=} \Gamma |_{\ker K} =$ $= I_{\ker K}$ — единичный оператор в пространстве $\ker K$. Таким образом, выполнено условие 5 теоремы 1, а следовательно, выполнены и все ее условия, т. е. оператор N^{-1} существует. Чтобы $K_r^{-1} = K_0^{-1}$ необходимо, чтобы $K_r^{-1} K = K_0^{-1} K$. Покажем это.

Для этого воспользуемся представлением $X = \ker K \oplus \ker \Gamma$. Рассмотрим произвольный $x \in X$, $x = x' + x''$, $x' \in \ker K$, $x'' \in \ker \Gamma$. Тогда $K_0^{-1} K x =$ $= K_0^{-1} K (x' + x'') = x''$. Аналогично, $K_r^{-1} K x = K_r^{-1} K x''$, и так как $x'' \in \ker \Gamma$, то $\Gamma x'' = 0$ или $x'' = K_r^{-1} K x''$. Таким образом, для любого $x \in X$ имеем $K_r^{-1} K x = K_0^{-1} K x$, т. е. $K_r^{-1} K = K_0^{-1} K x$. Поскольку $K(X) = Y$, для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $K x = y$. Тогда для этого x получим $K_r^{-1} K x = K_0^{-1} K x$ или $K_r^{-1} y = K_0^{-1} y$, т. е. $K_r^{-1} = K_0^{-1}$.

Пусть теперь операторы K и K_r^{-1} ограничены. Тогда $\|N\| \le \le \max\{\|K\|, \|\Gamma\|\} \le \max\{\|K\|, 1 + \|K_0^{-1}\|\|K\|\}$, т. е. оператор N ограничен. Следовательно,

$$\|N^{-1}\| = \max\{\|K_0^{-1}\|, \|\Gamma_0^{-1}\|\} =$$
$$= \max\left\{\|K_r^{-1}\|, \|(I_X|_{\ker K})^{-1}\|\right\} = \max\{\|K_r^{-1}\|, 1\},$$

т. е. оператор N^{-1} ограничен.

Иногда могут быть полезны оценки норм $\|N\|$ и $\|N^{-1}\|$ через другие величины. В частности, считая известными оценки для норм $\|\Gamma\|$ и $\|\Gamma^{-1}\|$, можно получить оценку для $\|K_0^{-1}\|$ через оценку $\|\overline{K}^{-1}\|$, где $\overline{K} : X/\ker K \to Y$ — фактор-оператор, индуцированный оператором K. В частности, справедливы следующие утверждения.

Теорема 4. *Для того, чтобы существовал ограниченный оператор* K_0^{-1}, *необходимо и достаточно, чтобы существовали постоянные* $m > 0$, $M > 0$ *такие, что для любого фактор-класса* $\bar{x} \in X/\ker K$ *найдется такой элемент* $x \in \bar{x}$, *что* $\|x'\| \le m\|x\|$, $\|Kx\| \ge M\|x\|$, *где* $x = x' + x''$, $x' \in \ker K$, $x'' \in \in \ker\Gamma$.

***Следствие* 1.** *Если существуют постоянные* $m > 0$, $M > 0$ *такие, что для любого элемента* $x'' \in \ker\Gamma$ *существует элемент* $x' \in \ker K$ *такой, что* $\|x'\| \le m\|x' + x''\|$, $\|Kx''\| \ge M\|x' + x''\|$, *то оператор* K_0^{-1} *ограничен.*

Теорема 5. *Если оператор* $\Gamma_0^{-1}\Gamma$ *ограничен, то для того, чтобы оператор* K_0^{-1} *был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы был ограничен оператор* $\overline{K}^{-1}$.

2. Как правило, в подавляющем большинстве случаев построение в замкнутой форме решений уравнения (1) не представляется возможным. И если это возможно, то и в этих случаях доведение результата до числа иногда наталкивается на большие трудности. Поэтому на практике строят уравнение

$$\tilde{K}\tilde{x} = \tilde{y}, \quad \tilde{x} \in \tilde{X}, \quad \tilde{y} \in \tilde{Y}, \tag{7}$$

считая, что его точное решение находится без особого труда и точное решение уравнения (7) берут в качестве приближенного решения уравнения (1). Здесь $\tilde{X} \subset X$, $\tilde{Y} \subset Y$ — линейные пространства, а $\tilde{K} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ — линейный оператор, близкий в некотором смысле к оператору K, такой, что $\dim\ker K = = \dim\ker\tilde{K} = m$. Ясно, что решение уравнения (7) должно удовлетворять условиям

$$\tilde{\Gamma}\tilde{x} = \tilde{z}, \quad \tilde{x} \in \tilde{X}, \quad \tilde{z} \in \tilde{Z}, \tag{8}$$

где $\tilde{Z} \subseteq Z$ — линейное пространство размерности m, а $\tilde{\Gamma} : \tilde{X} \to \tilde{Z}$ — линейный конечномерный оператор размерности m. Заметим, что в работах [2–8] рассмотрены различные схемы прямых методов приближенного решения уравнения (1), когда $\dim\ker K = 0$. Если же $\dim\ker K = m$, то в [9, 10] реализована конструктивная схема приближенного решения уравнения (1), не ориентированная на применение прямых методов его приближенного решения. Ясно, что совокупность уравнений (7) и условий (8) можно записать в виде

$$\tilde{N}\tilde{x} = \langle\tilde{y}, \tilde{z}\rangle, \tag{9}$$

где линейный оператор $\tilde{N} : \tilde{X} \to \tilde{Y} + \tilde{Z} = \{\langle\tilde{y}, \tilde{z}\rangle \mid \tilde{y} \in \tilde{Y}, \tilde{z} \in \tilde{Z}\}$ и определяется равенством $\tilde{N}\tilde{x} = \langle\tilde{K}\tilde{x}, \tilde{\Gamma}\tilde{x}\rangle$. Предположим, что существуют аддитивные и однородные операторы P_Y и P_Z, $P_Y\colon Y \to \tilde{Y}$, $P_Z\colon Z \to \tilde{Z}$, имеющие свойства $P_Y^2 = P_Y$, $P_Z^2 = P_Z$. Введем оператор $P\colon Y + Z \to \tilde{Y} + \tilde{Z}$, действующий по правилу $P\langle y, z\rangle = \langle P_Y y, P_Z z\rangle = \langle \tilde{y}, \tilde{z}\rangle$. Ясно, что оператор P имеет свойство $P^2 = R$.

Ниже пространства $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$, операторы $\tilde{K}$, $\tilde{\Gamma}$ подчиним следующим условиям: $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ — конечномерные пространства и $\dim \tilde{X} = \dim \tilde{Y} + \dim \tilde{Z} < \infty$.

I. Для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ $\|\tilde{K}\tilde{x} - P_Y K\tilde{x}\|_Y \le \varepsilon_1 \|\tilde{x}\|_X$, $\|\tilde{\Gamma}\tilde{x} - P_Z \Gamma\tilde{x}\|_Z \le \eta_1 \|\tilde{x}\|_X$.

II. Для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ существуют элементы $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, $\tilde{z} \in \tilde{Z}$ такие, что $\|K\tilde{x} - \tilde{y}\|_Y \le \varepsilon_2 \|\tilde{x}\|_X$, $\|\Gamma\tilde{x} - \tilde{z}\|_Z \le \eta_2 \|\tilde{x}\|_X$.

Здесь ε_1, ε_2, η_1, η_2 — положительные постоянные, не зависящие от $\tilde{x}$.

Заметим, что условия в терминах пространств $\tilde{X}$, $\tilde{Y} + \tilde{Z}$ и операторов N, $\hat{N}$, P можно записать следующим образом: $\dim \tilde{X} = \dim(\tilde{Y} + \tilde{Z}) < \infty$.

I′. Для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ $\|\tilde{N}\tilde{x} - P_Y N\tilde{x}\|_{Y+Z} \le (\varepsilon_1 + \eta_1)\|\tilde{x}\|_X$.

II′. Для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ существует элемент $\langle \tilde{y}, \tilde{z}\rangle \in \tilde{Y} + \tilde{Z}$ такой, что $\|N\tilde{x} - \langle \tilde{y} + \tilde{z}\rangle\|_{Y+Z} \le (\varepsilon_2 + \eta_2)\|\tilde{x}\|_X$.

Теорема 6. *Пусть операторы* K, K_r^{-1} *ограничены, и ограничен оператор* $I - P\colon E \to \tilde{Y} + \tilde{Z}$, *где* I *— единичный оператор в* $\tilde{Y} + \tilde{Z}$, *а* $E = \{\langle y, z\rangle \in Y + Z \mid \langle y, z\rangle = N\tilde{x} - \langle \tilde{y}, \tilde{z}\rangle,\ \tilde{x} \in \tilde{X},\ \tilde{y} \in \tilde{Y},\ \tilde{z} \in \tilde{Z}\} \subseteq Y + Z$. *Если выполнены условия* I′, II′, $P^2 = P$ *и*

$$q = [(\varepsilon_1 + \eta_1) + (\varepsilon_2 + \eta_2)\|I - P\|]\,\|N^{-1}\| < 1, \tag{10}$$

то оператор $\tilde{N}$ *имеет ограниченный обратный, причем*

$$\|\tilde{N}^{-1}\| \le \|N^{-1}\|\,(1 - q)^{-1}. \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку операторы K, K_r^{-1} ограничены, по теореме 3 ограничены операторы Γ, K_0^{-1}, Γ_0^{-1}. При этом будут выполнены условия теорем 1 и 2, согласно которым оператор N^{-1} существует и $\|N\| \le \|K\| + \|\Gamma\|$, $\|N^{-1}\| \le \max\{\|K_0^{-1}\|, \|\Gamma_0^{-1}\|\}$. Пусть $\langle \tilde{y}, \tilde{z}\rangle \in \tilde{Y} + \tilde{Z}$ — элемент, удовлетворяющий условию II′. Тогда с учетом $P^2 = P$ для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ получим

$$\|N\tilde{x} - PN\tilde{x}\|_{Y+Z} = \|(I - P)(N\tilde{x} - \langle \tilde{y}, \tilde{x}\rangle)\|_{Y+Z} \le$$
$$\le (\varepsilon_2 + \eta_2)\|I - P\|\,\|\tilde{x}\|_X.$$

Поэтому для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ находим

$$\|N\tilde{x} - \tilde{N}\tilde{x}\|_{Y+Z} \le \|N\tilde{x} - PN\tilde{x}\|_{Y+Z} + \|PN\tilde{x} - \tilde{N}\tilde{x}\|_{Y+Z} \le$$
$$\le [(\varepsilon_1 + \eta_1) + (\varepsilon_2 + \eta_2)\|I - P\|]\,\|\tilde{x}\|_X.$$

Теперь с помощью этой оценки получим

$$\|\tilde{N}\tilde{x}\|_{Y+Z} \ge \|N\tilde{x}\|_{Y+Z} - \|\tilde{N}\tilde{x} - N\tilde{x}\|_{Y+Z} \ge$$

$$\geq \frac{\|\tilde{x}\|_X}{\|N^{-1}\|} - [(\varepsilon_1 + \eta_1) + (\varepsilon_2 + \eta_2)\|I - P\|]\|\tilde{x}\|_X = \frac{1-q}{\|N^{-1}\|}\|\tilde{x}\|_X.$$

Из этой оценки вытекает существование оператора N^{-1} и справедливость оценки (11).

Теорема 7. *Пусть операторы* K, K_r^{-1} *ограничены, выполнены условия* I$'$, II$'$, $P^2 = P$ *и* $q < 1$, *где величина* q *определяется формулой* (10). *Тогда справедливы следующие оценки погрешности приближенного решения уравнения* (3):

$$\|x^* - \tilde{x}^*\|_X \leq \|N^{-1}\|\left[\|(N-\tilde{N})\,\tilde{x}^*\|_{Y+Z} + \|\langle y, z\rangle - \langle\tilde{y}, \tilde{z}\rangle\|_{Y+Z}\right],$$

$$\|x^* - \tilde{x}^*\|_X \leq \|N^{-1}\|(1-q)^{-1}\left[\|\langle y, z\rangle - \langle\tilde{y}, \tilde{z}\rangle\|_{Y+Z} + q\,\|\langle y, z\rangle\rangle\|_{Y+Z}\right]. \quad (12)$$

Доказательство. Из условий теоремы вытекает существование и ограниченность операторов N^{-1} и $\tilde{N}^{-1}$, т. е. уравнения (3) и (9) однозначно разрешимы и имеют соответственно решения x^* и $\tilde{x}^*$. Из тождества $N(x^* - \tilde{x}^*) = \langle y, z\rangle - \langle\tilde{y}, \tilde{z}\rangle - (\tilde{N} - N)\,\tilde{x}^*$ и неравенства

$$\|\langle y, z\rangle - \langle\tilde{y}, \tilde{z}\rangle\|_{Y+Z} + \|N - \tilde{N}\| \times \|N^{-1}\| \times \|\langle\tilde{y}, \tilde{z}\rangle\|_{Y+Z} \leq$$
$$\leq (1-q)^{-1}\left[\|\langle y, z\rangle - \langle\tilde{y}, \tilde{z}\rangle\|_{Y+Z} + q\,\|\langle y, z\rangle\|_{Y+Z}\right]$$

легко получаются оценки (12).

Используя представления оператора P и единичного оператора в пространстве $Y + Z$, теоремы 6 и 7 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 6$'$. *Пусть операторы* K, K_r^{-1} *ограничены и, кроме того, ограничены операторы*

$$I_Y - P_Y\colon\ Y^0 \to Y, \qquad Y^0 = \{y \in Y \mid y = K\tilde{x} - \tilde{y},\ \tilde{x} \in \tilde{X},\ \tilde{y} \in \tilde{Y}\} \subseteq Y,$$

$$I_Z - P_Z\colon\ Z^0 \to Z, \qquad Z^0 = \{z \in Z \mid z = \Gamma\tilde{x} - \tilde{z},\ \tilde{x} \in \tilde{X},\ \tilde{z} \in \tilde{Z}\} \subseteq Z.$$

Если выполнены условия I, II, $P_Y^2 = P_Y$, $P_Z^2 = P_Z$ *и*

$$q_0 = q_1 + q_2 < 1, \quad (13)$$

то существует ограниченный оператор $\tilde{N}^{-1}$, *причем*

$$\|\tilde{N}^{-1}\| \leq \|N^{-1}\|(1-q_0)^{-1}.$$

Здесь и ниже I_X, I_Y — *единичные операторы соответственно в пространствах* Y *и* X, *а*

$$q_1 = [\varepsilon_1 + \varepsilon_2\|I_Y - P_Y\|]\,\|K_0^{-1}\|, \quad q_2 = [\eta_1 + \eta_2\|I_Z - P_Z\|]\,\|\Gamma_0^{-1}\|. \quad (14)$$

Теорема 7$'$. *Пусть операторы* K, K_r^{-1} *ограничены, выполнены условия* I, II, $P_Y^2 = P_Y$, $P_Z^2 = P_Z$ *и* $q_0 < 1$, *где величина* q_0 *определяется формулой* (13). *Тогда справедлива следующая оценка погрешности приближенного решения уравнения* (3):

$$\|x^* - \tilde{x}^*\|_X \leq$$
$$\leq \left\{\|y - \tilde{y}\|_Y + \|z - \tilde{z}\|_Z + q_1\|y\|_Y + q_2\|z\|_Z\right\}\|N^{-1}\|(1-q_0)^{-1}.$$

Заметим, что теоремы 6$'$ и 7$'$ являются более удобными при установлении устойчивости прямых методов приближенного решения уравнения (1).

Поскольку $\dim Z = m < +\infty$, пространство Z изоморфно пространству $\boldsymbol{R}^m$, т. е. в качестве пространства Z можно рассматривать пространство $Z = \boldsymbol{R}^m$. Тогда очевидно, что $\tilde{Z} = \boldsymbol{R}^m$, а уравнение (8) примет вид $\Gamma\tilde{x} = z$. Ясно, что в этом случае постоянные $\eta_1 = \eta_2 = 0$, а следовательно, оценки теорем 6, 6′, 7, 7′ значительно упрощаются.

На практике чаще всего вместо уравнения (7) и условий (8) конструируют последовательность уравнений и условий

$$K_n x_n = y_n, \quad \Gamma_n x_n = z_n; \quad x_n \in X_n, \quad y_n \in Y_n, \quad z_n \in Z_n, \tag{15}$$

где $K_n\colon X_n \to Y_n$, $\Gamma_n\colon X_n \to Z_n$ — линейные конечномерные операторы; $X_n \subset \subset X_{n+1} \subset X$, $Y_n \subset Y_{n+1} \subset Y$, $Z_n = Z_{n+1} = Z$ — линейные конечномерные пространства такие, что $\dim X_n = \dim Y_n + \dim Z_n < +\infty$, а совокупность уравнений и условий (15) можно записать в виде

$$N_n x_n = \langle y_n, z_n \rangle, \tag{16}$$

где оператор $N_n\colon X_n \to Y_n + Z_n$ и действует по правилу $N_n x_n = \langle K_n x_n, \Gamma x_n \rangle$. При этом предполагается, что существуют операторы $P_{nY}\colon Y \to Y_n$, $P_{nZ}\colon Z \to Z_n$, обладающие свойством $(P_{nY})^2 = P_{nY}$, $(P_{nZ})^2 = P_{nZ}$. Тогда оператор $P_n\colon Y + + Z \to Y_n + Z_n$, действующий по правилу $P_n\langle y, z\rangle = \langle P_{nY} y, P_{nZ} z\rangle = \langle y_n, z_n\rangle$, имеет свойство $P_n^2 = P_n$. Будем считать, что условия I, II, I′, II′ выполняются с постоянными $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(n)}$, $\eta_1 = \eta_1^{(n)}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^{(n)}$, $\eta_2 = \eta_2^{(n)}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть операторы* K, K_r^{-1} *ограничены, выполнены условия* I, II, $(P_{nY})^2 = P_{nY}$, $(P_{nZ})^2 = P_{nZ}$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_1^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \eta_1^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_2^{(n)} \|P_{nY}\| = \lim_{n\to\infty} \eta_1^{(n)} \|P_{nZ}\| = 0.$$

Тогда при достаточно больших n *существуют ограниченные операторы* $N_n^{-1}\colon Y_n + Z_n \to X_n$, *а приближенные решения* x_n^* *уравнения* (1) *сходятся к точному решению* x^* *со скоростью*

$$\|x^* - \tilde{x}^*\|_X \le O(\varepsilon_1^{(n)} + \eta_1^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)} \|P_{nY}\| + \eta_1^{(n)} \|P_{nZ}\|).$$

Среди прямых методов решения уравнения (1) особое место занимают проекционные методы. В этом случае оператор $K_n = P_n K$, а $Z_n = Z = \boldsymbol{R}^m$ (или $Z_n = Z = \boldsymbol{C}^m$), т. е. $\Gamma_n = \Gamma$. Следовательно, условия I, II, I′, II′ выполняются с постоянными $\varepsilon_1^{(n)} = \eta_1^{(n)} = \eta_2^{(n)} = 0$.

3. Пусть $\gamma = \{ t \in \boldsymbol{C} \mid |t| = 1 \}$ — единичная окружность с центром в начале координат, разбивающая комплексную плоскость на две области: внутреннюю $D^+ = \{ t \in \boldsymbol{C} \mid |z| < 1 \}$ и внешнюю $D^- = \{ t \in \boldsymbol{C} \mid |z| > 1 \}$. Рассматривается сингулярное интегральное уравнение

$$K\varphi = K^0\varphi + T\varphi = f, \tag{17}$$

где

$$\begin{gathered} (K^0\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) = f, \\ (S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \end{gathered} \tag{18}$$

$$(T\varphi)(t) = \int_{\gamma} K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{19}$$

Будем предполагать, что известные функции $a(t)$, $b(t)$, $K(t,\tau)$, $f(t) \in H_{\alpha}^{(r)}$, $r \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, по всем переменным и уравнение (17) является нетеровым, т. е. $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ на γ. Обозначим $\kappa_1 = \operatorname{ind}[a(t) + b(t)]$, $\kappa_2 = \operatorname{ind}[a(t) - - b(t)]$. Тогда индекс уравнения (17) равен $\kappa = \kappa_2 - \kappa_1$. Предположим, что однородное уравнение (17) имеет m линейно независимых решений. Согласно [11, с. 236], если единица не является характеристическим числом ядра $K(t,\tau)$, то $m = \kappa$. Тогда для однозначной разрешимости уравнения (17) на его решение нужно наложить κ дополнительных условий. Положим $X = \{\varphi(t) \in \boldsymbol{C}: \varphi(t) = \Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t),\ \Phi^{\pm}(t) \in \boldsymbol{C}\}$. Здесь $\Phi^{\pm}(t)$ — краевые значения функций $\Phi^{\pm}(z)$, аналитических соответственно в $D^{\pm}$.

Заметим [4], что норма сингулярного оператора Коши в пространстве X равна единице, если

$$\|\varphi(t)\|_X = \|\Phi^{+}(t)\|_C + \|\Phi^{-}(t)\|_C,$$

$$Y = \{f(t) \in \boldsymbol{C}: f(t) = F^{+}(t) - F^{-}(t),\ F^{\pm}(t) \in \boldsymbol{C}\},$$

при этом $\|f(t)\|_Y = \|f(t)\|_C$. Тогда, согласно [11], операторы K, K_r^{-1} при заданных предположениях относительно функций $a(t)$, $b(t)$, $K(t,\tau)$, $f(t)$ ограничены. Следовательно, на основании теоремы 3 существует конечномерное пространство Z (в данном случае $Z = \boldsymbol{C}^{\kappa}$) и оператор Γ, задающий дополнительные условия для однозначного определения решения уравнения (17).

Пусть

$$\Gamma\varphi = (f_0(\varphi), f_1(\varphi), \ldots, f_{\kappa-1}(\varphi)) = (a_0, a_1, \ldots, a_{\kappa-1}) \tag{20}$$

— система линейно независимых функционалов, которым должно удовлетворять решение уравнения (17). В частности, система функционалов (19) может быть задана в виде

$$f_k(\varphi) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \varphi(\tau)\,t^{-k-1}\,dt = a_k, \quad k = \overline{0, \kappa-1}, \tag{21}$$

где a_k — некоторые вполне определенные постоянные.

Заметим, что выбор линейных функционалов, которым должно удовлетворять решение уравнения (17), диктуется условиями решаемой прикладной задачи и они могут задаваться и другими способами, отличными от (21). Уравнения (17) и условия (20) запишем в виде одного уравнения:

$$(N\varphi)(t) = \langle (K\varphi)(t), \Gamma\varphi \rangle = \langle f(t), a \rangle, \tag{22}$$

где $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{\kappa-1})$ — известный вектор рамерности κ.

Поскольку операторы K, K_r^{-1} ограничены, оператор N ограничен и существует ограниченный оператор $N^{-1}: Y + \boldsymbol{C}^{\kappa} \to X$. Приближенные решения уравнения (17) ищем в виде

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=-n-\kappa_2}^{n-\kappa_1} \varphi_k t^k, \tag{23}$$

при этом $\varphi_n(t) = \Phi_n^{+}(t) - \Phi_n^{-}(t)$, где

$$\Phi_n^+(t) = \sum_{k=0}^{n-\kappa_1} \varphi_k t^k, \qquad \Phi_n^-(t) = \sum_{k=-n-\kappa_2}^{-1} \varphi_k t^k. \tag{24}$$

Положим X_n — множество агрегатов вида (23), Y_n — множество обобщенных многочленов порядка не выше n вида $r_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k t^k$, а $Z_n = \boldsymbol{C}^{\kappa}$. Легко видеть, что $\dim X_n = \dim Y_n + \dim Z_n = 2n + 1 + \kappa$. Обозначим через Q_n оператор, котрый каждому элементу $\varphi(t) \in X$ ставит в соответствие элемент его наилучшего приближения в пространстве X вида (23). Тогда Q_n: $X \to X_n$ и обладает свойством $Q_n^2 = Q_n$.

Метод коллокации. Приближенные решения уравнения (17) при условиях (20) ищем в виде (23), а неизвестные постоянные φ_k определяем из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-\kappa_1} [a(t_j) + b(t_j)] t_j^k \varphi_k + \sum_{k=-n-\kappa_2}^{-1} [a(t_j) - b(t_j)] t_j^k \varphi_k +$$

$$+ \sum_{k=-n-\kappa_2}^{n-\kappa_1} \varphi_k \int_{\gamma} K(t,\tau) \tau^k d\tau = f_j(t), \qquad j = \overline{-n, n},$$

$$(\Gamma \varphi_n(t))_k = a_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, \kappa - 1, \tag{25}$$

где

$$t_j = \exp \frac{2\pi i}{2n+1}, \qquad j = \overline{-n, n}. \tag{26}$$

Пусть L_n — оператор, который ставит в соответствие каждой функции $f(t) \in Y$ ее интерполяционный многочлен Лагранжа

$$(L_n f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} b_k t^k, \qquad b_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} f(t_j) \exp \frac{2\pi i}{2n+1} jk, \tag{27}$$

где t_j — узлы (26).

Тогда L_n: $Y \to Y_n$ и имеет свойство $L_n^2 = L_n$. Оператор P_n определим следующим образом: $P_n \langle f(t), a \rangle = \langle (L_n)(t), Ea \rangle$, где E — единичная матрица размерности κ. Ясно, что P_n: $Y + Z \to Y_n + Z_n$ и обладает свойством $P_n^2 = P_n$. Тогда систему уравнений (25) можно записать в виде

$$(P_n N Q_n \varphi)(t) = \langle (L_n K \varphi_n)(t), \Gamma \varphi_n \rangle = \langle (L_n f)(t), Ea \rangle. \tag{28}$$

Теорема 9. *Пусть функции* $a(t)$, $b(t)$, $K(t,\tau)$, $f(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, *по всем переменным,* $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ *на* γ, $\kappa > 0$ *и единица не является характеристическим числом ядра* $K(t,\tau)$. *Тогда система уравнений* (25) *однозначно разрешима при достаточно больших* n, *а приближенные решения* $\varphi_n^*(t)$ *уравнения* (17) *сходятся к точному решению* $\varphi^*(t)$ *со скоростью*

$$\|\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)\|_X = O(n^{-r-\alpha} \ln n). \tag{29}$$

Доказательство. В условиях теоремы операторы K, K_r^{-1} ограничены. Поэтому операторы N, N^{-1} также ограничены. Сначала рассмотрим характеристическое уравнение $K^0 \varphi = f$ при условиях (20), где оператор K^0 определен формулой (18). Тогда в условиях теоремы операторы K^0, $(K^0)_r^{-1}$ также ограничены [11]. Оператор $(N_0\varphi)(t) = \langle (K^0\varphi)(t), \Gamma\varphi \rangle$ ограничен и имеет ограниченный обратный $N_0^{-1}: Y + Z \to X$. Систему алгебраических уравнений, соответствующую методу коллокации для оператора N_0, можно записать в виде

$$(P_n N_0 Q_n \varphi)(t) = \langle (L_n K^0 \varphi_n)(t), \Gamma\varphi_n \rangle = \langle (L_n f)(t), Ea \rangle. \tag{30}$$

Покажем, что система уравнений (30) однозначно разрешима при достаточно больших n, а приближенные решения характеристического уравнения сходятся к его точному решению по норме пространства X, т. е. покажем, что к оператору N_0 применим [6] проекционный процесс по системе проекторов Q_n и P_n. Поскольку функции $a(t)$, $b(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, и $a^2(t) - b^2(t) \neq$ $\neq 0$ на γ, справедливы [11] факторизации

$$a(t) + b(t) = t^{\kappa_1} \frac{M^+(t)}{M^-(t)}, \quad a(t) - b(t) = t^{\kappa_2} \frac{N^+(t)}{N^-(t)},$$

где функции $M^\pm(t) \neq 0$, $N^\pm(t) \neq 0$ на γ, $M^\pm(t)$, $N^\pm(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \geq 0$, $0 < \alpha <$ < 1; функции $M^\pm(t)$, $N^\pm(t)$ аналитически продолжимы соответственно в $D^\pm$.

Обозначим $\chi^+(t) = M^+(t)N^+(t)$, $\chi^-(t) = M^-(t)N^-(t)$. Ясно, что $\chi^\pm(t) \neq 0$ на γ, $\chi^\pm(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \geq 0$, $0 < \alpha < 1$; функции $\chi^\pm(t)$ аналитически продолжимы соответственно в $D^\pm$. Тогда оператор N_0 можно записать в виде

$$(N_0\varphi)(t) = \langle t^{\kappa_1}\chi^-(t)\Phi^+(t) - t^{\kappa_2}\chi^+(t)\Phi^-(t), \Gamma\varphi \rangle,$$
$$N_0 : X \to Y + Z,$$

где $\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$.

Пусть $\chi_n^+(t)$, $\chi_n^-(t)$ — обобщенные многочлены наилучшего равномерного приближения порядков $n - \kappa_2$ и $n - \kappa_1$ функций $\chi^+(t)$ и $\chi^-(t)$ соответственно. Согласно [4], они имеют вид

$$\chi^+(t) = \sum_{k=0}^{n-\kappa_2} c_k t^k, \quad \chi^-(t) = \sum_{k=-n-\kappa_1}^{-1} c_k t^k.$$

Тогда, согласно [4, 12], справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\chi^+(t) - \chi_n^+(t)\|_C &\leq d_1(n - \kappa_2)^{-n-r} \leq d_2 n^{-n-r}, \\ \|\chi^-(t) - \chi_n^-(t)\|_C &\leq d_3(n - \kappa_1)^{-n-r} \leq d_4 n^{-n-r}. \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь и далее d_i — вполне определенные постоянные, не зависящие от n.

Рассмотрим вспомогательный оператор

$$(N_1\varphi)(t) = \langle t^{\kappa_1}\chi_n^-(t)\Phi^+(t) - t^{\kappa_2}\chi_n^+(t)\Phi^-(t), \Gamma\varphi \rangle,$$
$$N_1 : X \to Y + Z.$$

Тогда на основе оценок (31) и определения нормы в пространствах X и $Y + Z$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\|(N_0\varphi)(t) - (N_1\varphi)(t)\|_{Y+Z} =$$
$$= \|t^{\kappa_1}[\chi^-(t) - \chi_n^-(t)]\Phi^+(t) - t^{\kappa_2}[\chi^+(t) - \chi_n^+(t)]\Phi^-(t)\|_Y \leq$$

$$\le \|\chi^-(t) - \chi_n^-(t)\|_C \|\Phi^+(t)\|_C - \|\chi^+(t) - \chi_n^+(t)\|_C \|\Phi^-(t)\|_C \le$$
$$\le d_5 n^{-r-a} \|\varphi(t)\|_X,$$

из которой следует оценка

$$\| N_0 - N_1 \|_{X \to Y+Z} = d_5 n^{-r-a}, \tag{32}$$

а из нее, в свою очередь, следует существование и ограниченность при достаточно больших n оператора $N_1^{-1}: Y + Z \to X$. Легко проверить, что оператор $N_1: X_n \to Y_n + Z_n$. Следовательно, при достаточно больших n существует оператор $N_1^{-1}: Y_n + Z_n \to X_n$. Однако на пространстве X_n операторы N_1 и $P_n N_0 Q_n$ совпадают. Следовательно, при достаточно больших n существуют ограниченные операторы $(P_n N_0 Q_n)^{-1}: Y_n + Z_n \to X_n$, т. е. система уравнений (30) ознозначно разрешима при достаточно больших n. На основании определения нормы в пространстве $Y + Z$ и работ [4, 12]

$$\| \langle f(t), a \rangle - \langle L_n(f)(t), a \rangle \|_{Y+Z} =$$
$$= \| f(t) - L_n(f)(t) \|_Y \le d_6 n^{-r-a} \ln n, \tag{33}$$

так как $f(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \ge 0$, $0 < \alpha < 1$. Теперь на основании оценок (32), (33) и первой оценки теоремы 9 следует оценка погрешности приближенного решения характеристического уравнения

$$\| \varphi(t) - \varphi_n(t) \|_X = d_7 n^{-r-a} \ln n.$$

Таким образом, к оператору N_0 применим проекционный процесс по системе проекторов Q_n и P_n. Поскольку функция $K(t, \tau) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \ge 0$, $0 < \alpha < 1$, на основании [6] оператор $T: X \to Y$, определенный формулой (19), компактен. Поскольку при каждом n операторы Q_n и P_n ограничены, а операторы N_0 и $N_0 + T = N$ обратимы, на основании теоремы 1.1 гл. XI работы [6] к оператору N также применим проекционный процесс по системе проекторов Q_n и P_n. Это означает, что система уравнений (28), а вместе с ней и система (25), однозначно разрешима при достаточно больших n, а приближенные решения уравнения (17), удовлетворяющие условиям (20), сходятся к его точному решению со скоростью (29).

Метод редукции. Предположим, что функция $f(t) \in L_2^{(r)}$, $r \ge 0$. Тогда $X = Y = L_2$, $Z = \boldsymbol{C}^\kappa$ с обычной нормой. Пространства X_n, Y_n, Z_n имеют прежний смысл. Приближенные решения уравнения (17), удовлетворяющие условиям (20), ищем в виде (23), а неизвестные постоянные φ_k определяем из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-\kappa_1} A_{jk} \varphi_k + \sum_{k=-n-\kappa_2}^{-1} B_{jk} \varphi_k + \sum_{k=-n-\kappa_2}^{n-\kappa_1} C_{jk} \varphi_k = f_j, \quad j = \overline{-n, n},$$
$$(\Gamma \varphi_n(t))_k = a_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \kappa - 1, \tag{34}$$

где A_{jk}, B_{jk}, C_{jk}, f_j — коэффициенты Фурье соответственно функций $[a(t) + b(t)]\, t^k$, $[a(t) - b(t)]\, t^k$, $\int_\gamma K(t, \tau)\, \tau^k d\tau$, $f(t)$; например,

$$f_j = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(t)\, t^{-j-1} dt.$$

Оператор Q_n имеет прежний смысл. Обозначим через U_n оператор, который ставит в соответствие каждой функции $f(t) \in L_2$ отрезок ее ряда Фурье, т. е.

$$(U_n f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} f_k t^k, \quad f_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(t) t^{-k-1} dt.$$

Тогда оператор P_n определим следующим образом: $P_n \langle f(t), a \rangle = \langle (U_n f)(t), Ea \rangle$. Легко видеть, что P_n: $X_n \to Y_n + Z_n$ и имеет свойство $P_n^2 = P_n$. Систему уравнений (34) можно записать в виде

$$(P_n N Q_n \varphi)(t) = \langle (U_n K \varphi_n)(t), \Gamma \varphi_n \rangle = \langle (U_n f)(t), Ea \rangle.$$

Теорема 10. *Пусть функции* $a(t)$, $b(t)$, $K(t, \tau) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, *по всем переменным*, $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ *на* γ, $\kappa > 0$ *и единица не является характеристическим числом ядра* $K(t, \tau)$. *Тогда система уравнений* (34) *однозначно разрешима при достаточно больших* n. *Если функция* $f(t) \in L_2^{(r)}$, $r \geq 0$, *то при* $r = 0$ *приближенные решения* $\varphi_n^*(t)$ *уравнения* (17), *удовлетворяющие условиям* (20), *сходятся в пространстве* L_2 *к точному решению* $\varphi^*(t)$, *т. е.*

$$\| \varphi^*(t) - \varphi_n^*(t) \|_{L_2} = 0, \quad n \to \infty,$$

а при $r \geq 1$ *приближенные решения* $\varphi_n^*(t)$ *уравнения* (17) *сходятся к точному решению* $\varphi^*(t)$ *со скоростью*

$$\| \varphi^*(t) - \varphi_n^*(t) \|_{L_2} = O(n^{-r}).$$

Доказательство этого утверждения проводится по схеме доказательства теоремы 9.

Следствие 2. *Если функция* $f(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, *то в условиях теоремы* 10 *приближенные решения* $\varphi_n^*(t)$ *уравнения* (17), *удовлетворяющие условиям* (20), *сходятся в пространстве* L_2 *к точному решению* $\varphi^*(t)$ *со скоростью*

$$\| \varphi^*(t) - \varphi_n^*(t) \|_{L_2} = O(n^{-r-a}).$$

1. *Эдвардс Э.* Функциональный анализ: теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 724 с.
3. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 486 с.
4. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1980. – 486 с.
5. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решения линейных задач. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
6. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 469 с.
7. *Вайникко Г. М.* Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. – Тарту: Изд-во Тартус. ун-та, 1970. – 142 с.
8. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. В., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
9. *Черский Ю. А.* Две теоремы об оценке погрешности и некоторые их приложения // Докл. АН СССР. – 1963. – **150**, № 2. – С. 271–274.
10. *Тихоненко Н. Я.* О методе приближенной факторизации // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 4. – С. 74–86.
11. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
12. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

Получено 11.11.96