УДК 519.21

В. І. Масол (Київ. ун-т ім. Т. Шевченка)

ГРАНИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ЧИСЛА РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ БУЛЕВИХ РІВНЯНЬ, ЯКА МАЄ ЛІНІЙНУ ЧАСТИНУ

We prove two theorems on the Poisson limit distribution of a number of solutions to a beforehand consistent system of the nonlinear random Boolean equations with stochastically independent coefficients. In particular, we assume that this system contains a linear part.

Доведено дві теореми про пуассонівський граничний розподіл числа розв'язків наперед сумісної системи нелінійних випадкових булевих рівнянь зі стохастично незалежними коефіцієнтами. Припускається, зокрема, що система має лінійну частину.

1. Вступ. Розглянемо систему рівнянь

$$\sum_{k=1}^{g_i(n)} \sum_{1\le j_1\ldots j_k\le n} a^{(i)}_{j_1\ldots j_k} x_{j_1}\ldots x_{j_k} = b_i, \quad i=\overline{1,N}, \tag{1}$$

у полі $GF(2)$ за умовою (A):

коефіцієнти $a^{(i)}_{j_1\ldots j_k}$, $1\le j_1\ldots j_k\le n$, $k=\overline{1,g_i(n)}$, $i=\overline{1,N}$, — незалежні випадкові величини, $P\left\{a^{(i)}_{j_1\ldots j_k}=1\right\} = p_{ik} = 1 - P\left\{a^{(i)}_{j_1\ldots j_k}=0\right\}$;

елементи b_i, $i=\overline{1,N}$, є результатом підстановки у ліву частину (1) фіксованого n-вимірного $(0,1)$-вектора $\bar{x}^0$;

функція $g_i(n)$ — невипадкова, $g_i(n)\in\{2,\ldots,n\}$, $i=\overline{1,N}$.

Систему (1), яка задовольняє умови (A), будемо називати наперед сумісною системою нелінійних випадкових булевих рівнянь. Огляд результатів для лінійного $(g_i(n)\equiv 1,\ i=\overline{1,N})$ варіанта (1) наведено в [1].

У роботах [2, 3] вивчено розподіл числа розв'язків системи (1) при спеціальних обмеженнях на індекси $1,\ldots,n$ невідомих $x_1,\ldots,x_n$.

2. Формулювання теорем. Позначимо через ν_n число розв'язків системи (1), відмінних від $\bar{x}^0$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (A),

$$n-N=m, \quad n\to\infty, \quad m=\text{const}, \quad -\infty<m<\infty; \tag{2}$$

$$\delta_{i1}(n) \le p_{i1} \le 1-\delta_{i1}(n), \quad i=\overline{1,N}; \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \exp\left\{-\varepsilon n\delta_{i1}(n)\right\} = o(1), \quad n\to\infty, \quad \varepsilon=\text{const}, \quad \varepsilon\in(0,1); \tag{4}$$

для довільного $i\in\{1,\ldots,N\}$ *існує множина* T_i *така, що при* $n\to\infty$

$$T_i\subseteq\{2,\ldots,g_i(n)\}, \quad T_i\ne\varnothing; \tag{5}$$

$$\delta_{it}(n) \le p_{it} \le 1-\delta_{it}(n), \quad t\in T_i; \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \exp\left\{-2\sum_{t\in T_i}\delta_{it}(n)\, C^t_{f(n)}\right\} = o(1), \tag{7}$$

де функція $f(n)$ *набуває цілих додатних значень,* $f(n)=o(n)$. *Тоді для* $k=0$, $1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\nu_n = k\} = e^{-\lambda}\lambda^k / k!, \tag{8}$$

де $\lambda = 2^m$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (*A*), (2), (3), (5) – (7) (*при* $f(n) = o(n/\ln n)$) *та*

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{N} \delta_i(n,\varepsilon) - \ln n \to \infty, \quad n\to\infty, \quad \varepsilon = \mathrm{const}, \quad \varepsilon \in (0,1), \tag{9}$$

де $\delta_i(n,\varepsilon) = \min\left\{\delta_{i1}(n), 2(\ln n)/\varepsilon n\right\}$, $i = \overline{1,N}$. *Тоді має місце* (8).

Сформульовані теореми анонсовані в [4].

3. Допоміжні твердження. Нехай W — сукупність усіх непорожніх підмножин множини Ω, потужність якої дорівнює $|\Omega| = k$, $1 \le k < \infty$. Визначимо дві підмножини W_Δ та I_s множини W:

$$W_\Delta \subseteq W, \quad W_\Delta = \{\omega_1, \ldots, \omega_\Delta\}, \quad |W_\Delta| = \Delta, \quad \Delta \ge 1, \quad \omega_i \ne \omega_j,$$

для $i \ne j$, $i,j \in \{1, \ldots, \Delta\}$;

$$I_s \subseteq W, \quad I_s = \{m_1, \ldots, m_s\}, \quad |I_s| = s, \ s \ge 0, \quad m_i \ne m_j$$

для $i \ne j$, $i,j \in \{1, \ldots, s\}$.

***Твердження* 1.** *Нехай*

$$\left| m_i \cap \omega_j \right| \equiv 0 \pmod 2, \quad i = \overline{1,s}, \quad j = \overline{1,\Delta}; \tag{10}$$

$$\Delta \in \left[2^{r-1}, 2^r - 1\right], \quad 1 \le r \le k. \tag{11}$$

Тоді

$$s \le 2^{k-r} - 1. \tag{12}$$

Доведення. Якщо $s = 0$, то, очевидно, (12) виконується. Нехай $s > 0$. Покладемо $L_{\alpha_1,\ldots,\alpha_z}$ – сукупність усіх елементів, які належать $\omega_{\alpha_1}, \ldots, \omega_{\alpha_z}$ і тільки, $\left|L_{\alpha_1,\ldots,\alpha_z}\right| = l_{\alpha_1,\ldots,\alpha_z}$, де $1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_z \le \Delta$, $z = \overline{1,\Delta}$. Позначимо через φ загальну кількість додатних (непорожніх) елементів множини

$$\left\{ l_{\alpha_1,\ldots,\alpha_z} : 1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_z \le \Delta, \ z = \overline{1,\Delta} \right\}$$

$$\left(\left\{ L_{\alpha_1,\ldots,\alpha_z} : 1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_z \le \Delta, \ z = \overline{1,\Delta} \right\} \right).$$

Визначимо вектор $\overline{x}(v) = \{x_1(v), \ldots, x_\varphi(v)\}$, $v \in W$, наступним правилом (П):

$$x_t(v) = \left\{1, \text{ якщо } \left|v \cap L_{k_t}\right| \equiv 1 \pmod 2; \ 0, \text{ якщо } \left|v \cap L_{k_t}\right| \equiv 0 \pmod 2\right\},$$

де $t = \overline{1,\varphi}$, $k_1, \ldots, k_\varphi$ — попарно відмінні елементи множини

$$\left\{ \{\alpha_1 < \ldots < \alpha_z\} : 1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_z \le \Delta, \ z = \overline{1,\Delta} \right\},$$

кожному з яких відповідає додатне (непорожнє) $l_{k_1}, \ldots, l_{k_\varphi}$ $\left(L_{k_1}, \ldots, L_{k_\varphi}\right)$.

За допомогою (П) для довільного $\tilde{m} \in I_s$ можна побудувати вектор $\overline{x}(\tilde{m})$, який є розв'язком однорідної системи лінійних рівнянь

$$\sum_{t=1}^{\varphi} a_q^{(t)} x_t = 0, \quad q = \overline{1,\Delta}, \tag{13}$$

у полі $GF(2)$, де коефіцієнт $a_q^{(t)} = \{ 1,$ якщо $q \in k_t$; $0,$ якщо $q \notin k_t \}$, $t = \overline{1, \varphi}$, $q = \overline{1, \Delta}$. (Матрицю A, $A = \left\| a_q^{(t)} \right\|_{q=\overline{1,\Delta}}^{t=\overline{1,\varphi}}$, будемо називати матрицею, яка побудована на множині W_Δ). Дійсно, з того, що $\tilde{m} \in I_s$, випливає внаслідок (10) $\left| \tilde{m} \cap \omega_j \right| \equiv 0 \pmod 2$, $j = \overline{1, \Delta}$, але $\omega_j = \bigcup_{t=1}^{\varphi} L_{k_t}^{(j)}$, де $L_{k_t}^{(j)} = \{ L_{k_t}$; якщо $a_j^{(t)} = 1$; $\varnothing$, якщо $a_j^{(t)} = 0 \}$, отже, $\left| \tilde{m} \cap \omega_j \right| = \sum_{t=1}^{\varphi} \left| \tilde{m} \cap L_{k_t}^{(j)} \right|$, $j = \overline{1, \Delta}$, звідки $a_j^{(1)} x_1(\tilde{m}) \oplus \ldots \oplus a_j^{(\varphi)} x_\varphi(\tilde{m}) = 0$, $j = \overline{1, \Delta}$, де символ $\oplus$ позначає додавання за модулем 2.

Для сукупності всіх елементів множини I_s, які відповідають побудованому за допомогою правила (П) розв'язку $\bar{x}(\tilde{m})$ системи (13), де $\tilde{m} \in I_s$, приймемо запис $M(\tilde{m})$, тобто $M(\tilde{m}) \subseteq I_s$, $M(\tilde{m}) = \{v_1, \ldots, v_\mu\}$, $v_i \neq v_j$ для $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, \mu\}$, $\bar{x}(v_t) = \bar{x}(\tilde{m})$ для $t = \overline{1, \mu}$, $\bar{x}(v) \neq \bar{x}(\tilde{m})$ для $v \in I_s \setminus M(\tilde{m})$. Нехай вектор $\bar{x}(\tilde{m})$ має κ, $0 \leq \kappa \leq \varphi$, одиничних компонент, які розташовані на місцях з номерами $i_1, \ldots, i_\kappa$, та $\varphi - \kappa$ нульових компонент, які розташовані на місцях з номерами $j_1, \ldots, j_{\varphi-\kappa}$. Тоді, очевидно, потужність μ множини $M(\tilde{m})$ задовольняє нерівності

$$\mu \leq 2^{k - s_1 + s_2 + s_3} - \chi \quad (\kappa = 0), \tag{14}$$

де $s_1 = \sum_{t=1}^{\varphi} l_{k_t}$, 2^{k-s_1} — кількість усіх підмножин множини

$$\Omega \setminus \left\{ \bigcup_{t=1}^{\varphi} L_{k_t} \right\}; \qquad s_2 = \sum_{i \in \{ i_1, \ldots, i_\kappa \}} \left(l_{k_i} - 1 \right), \qquad 2^{l_{k_i} - 1}$$

— кількість усіх підмножин множини L_{k_i}, $i \in \{ i_1, \ldots, i_\kappa \}$, кожна з яких містить непарне число елементів з Ω;

$$s_3 = \sum_{j \in \{ j_1, \ldots, j_{\varphi-\kappa} \}} \left(l_{k_j} - 1 \right),$$

$2^{l_{k_i} - 1}$ — кількість усіх підмножин множини L_{k_j}, $j \in \{j_1, \ldots, j_{\varphi-\kappa}\}$, кожна з яких містить парне число елементів з Ω; $\chi(\kappa = 0) = \{ 1,$ якщо $\kappa = 0$; $0,$ якщо $\kappa \neq 0 \}$. Із (14) та визначень сум s_1, s_2, s_3 випливає $\mu \leq 2^{k-\varphi} - \chi\ (\kappa = 0)$. Отже, кожному $\tilde{m} \in I_s$ відповідає побудований за допомогою правила (П) розв'язок системи (13) і число елементів з-поміж I_s, які відповідають цьому розв'язку, не перевищує $2^{k-\varphi} - \chi\ (\kappa = 0)$. Звідси отримуємо

$$s \leq 2^{k-\varphi} R - 1, \tag{15}$$

де R — кількість розв'язків системи (13). Внаслідок (11) ранг f матриці A коефіцієнтів системи (13), $\operatorname{rang}(A) = f$, у полі $GF(2)$ задовольняє нерівність $f \geq r$. Тому $R = 2^{\varphi - f} \leq 2^{\varphi - r}$. Звідси з урахуванням (15) маємо (12). Твердження 1 доведено.

***Зауваження* 1.** Із доведення твердження 1 випливає, що коли мають місце (10), (11) та $f > r$, то $s < 2^{k-r} - 1$. Отже, при виконанні умов (10), (11) та $s = 2^{k-r} - 1$, $1 \leq r \leq k$, справедлива рівність $\operatorname{rang}(A) = r$.

Твердження 2. *Нехай* $\Omega = \{1, \ldots, k\}$, $3 \le k < \infty$. *Якщо для множин* W_Δ *та* I_s *виконуються умови* (10),

$$\Delta = 2^r - 1, \quad s = 2^{k-r} - 1, \quad 1 \le r \le k-2; \tag{16}$$

$$|\omega_j| \ge 3, \quad j = \overline{1, \Delta}, \tag{17}$$

то існує число $\alpha \in \{1, \ldots, \Delta\}$ *таке, що для деяких* $m_{i_\nu} \in I_s$, $\nu = \overline{1, 3}$,

$$|\omega_\alpha \cap m_{i_\nu}| = 2, \quad \nu = \overline{1, 3}, \quad |\omega_\alpha \cap (a \cup b)| = 3, \tag{18}$$

де $a \ne b$, $a, b \in \{m_{i_\nu} : \nu = \overline{1, 3}\}$.

Доведення. Нехай матриця A побудована на множині W_Δ. На основі умов (10), (16) та зауваження 1 робимо висновок, що $\operatorname{rang}(A) = r$. Позначимо через B матрицю, яка має Δ рядків та k стовпців, $B = \left\| b_q^{(\kappa)} \right\|_{q = \overline{1, \Delta}}^{\kappa = \overline{1, k}}$, де $b_q^{(\kappa)} = \{1$, якщо $\kappa \in \omega_q$; 0, якщо $\kappa \notin \omega_q\}$, $\kappa = \overline{1, k}$, $q = \overline{1, \Delta}$. Використовуючи визначення матриць A і B та метод математичної індукції за параметром $r \ge 1$, неважко встановити, що у полі $GF(2)$ $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B) = r$. Оскільки матриця B має $\Delta = 2^r - 1$ ненульових рядків і $\operatorname{rang}(B) = r$, то її перші r рядків можна вибрати так, щоб вони утворювали канонічний базис r-вимірного підпростору k-вимірного простору у полі $GF(2)$. Тоді згідно з правилом задання канонічного базису (один з варіантів викладення цього правила див., наприклад, в [5, с.219]) у перших r рядках матриці B існує одинична $r \times r$ матриця. Нехай стовпці з номерами $1 < a_1 < \ldots < a_r \le k$ утворють зазначену $r \times r$ матрицю. Застосуємо побудований канонічний базис до формування множин m_{i_1}, m_{i_2} та m_{i_3}, які задовольняють (18). Покладемо $\alpha = 1$. Внаслідок (17) у першому рядку матриці B на позиціях з номерами j_1 та j_2 розташовані одиниці, де j_1 та j_2 деякі два цілі числа, що задовольняють співвідношення $1 \le j_1 < j_2 < a_1$. Далі використаємо метод математичної індукції.

Нехай $\operatorname{rang}(B) = 1$. Тоді до m_{i_1}(m_{i_2}; m_{i_3}) залучимо лише наступні елементи: $u_{j_1}^{(1)}$ та $u_{j_2}^{(1)}$ ($u_{j_1}^{(1)}$ та $u_{a_1}^{(1)}$; $u_{j_2}^{(1)}$ та $u_{a_1}^{(1)}$), де $u_{j_1}^{(1)}$, $u_{j_2}^{(1)}$ та $u_{a_1}^{(1)}$ — елементи множини ω_1 ($u_{j_1}^{(1)}$, $u_{j_2}^{(1)}$, $u_{a_1}^{(1)} \in \omega_1$), які за побудовою відповідають одиницям першого рядка матриці B, розташованим на позиціях з номерами j_1, j_2 та a_1. Обгрунтуємо індукційний крок від $\operatorname{rang}(B) = r - 1$, $r \ge 2$, до $\operatorname{rang}(B) = r$. Якщо $|m_{i_\nu} \cap \omega_r| \equiv 0 \pmod 2$, то множину m_{i_ν} залишаємо без змін, інакше доповнюємо її елементом $u_{a_r}^{(r)} \in \omega_r$, який відповідає одиниці, що розташована в r-му рядку матриці B на позиції з номером a_r, $\nu = \overline{1, 3}$. Зрозуміло, що побудована таким чином множина m_{i_ν}, $\nu = \overline{1, 3}$, задовольняє співвідношення (18) та

$$|m_{i_\nu} \cap \omega_j| \equiv 0 \pmod 2, \quad j \in \{1, \ldots, \Delta\}, \quad \nu = \overline{1, 3}. \tag{19}$$

Із (19) випливає, що $m_{i_\nu} \in I_s$, $\nu = \overline{1, 3}$, оскільки на підставі твердження 1 та умови (16) множина I_s містить, очевидно, усі сукупності $m_1, \ldots, m_s$, для яких виконується (10). Твердження 2 доведено.

Зауваження 2. При $r = k - 1$ і $s = 1$ умова (17) не виконується. Дійсно, в i-му рядку, $i \in \{1, \ldots, r\}$, канонічного базису на позиціях з номерами $j > a_i$ стоять нулі, а позиції з номерами $j < a_i$, $j \notin \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$, $i \in \{2, \ldots, r\}$, та

$j < a_1$ можуть бути заповнені елементами поля $GF(2)$ довільним чином. (Тут збережені позначення, які введені при обгрунтуванні твердження 2.) Тому, якщо $r = k-1$ та $s = 1$, то існує значення параметра $j \in \{1, \dots, \Delta\}$ таке, що $|\omega_j| < 3$.

Надалі $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k$ — попарно відмінні n-вимірні $(0, 1)$-вектори, що не співпадають з $\bar{x}^0$, $\bar{x}^\nu = (\bar{x}_1^\nu, \dots, \bar{x}_n^\nu)$, $\nu = \overline{0, k}$, $1 \le k < \infty$. Для параметра $t \in \{1, \dots, n\}$, набору $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$, $1 \le \alpha_1 < \dots < \alpha_t \le n$, параметра $\nu \in \{1, \dots, k\}$ і набору $\{u_1, \dots, u_\nu\}$, $1 \le u_1 < \dots < u_\nu \le k$, розглянемо множину

$$m(\alpha_1, \dots, \alpha_t;\ u_1, \dots, u_\nu) = \{x_{\alpha_1}^{u_z} \dots x_{\alpha_t}^{u_z} \oplus x_{\alpha_1}^0 \dots x_{\alpha_t}^0 \colon z = \overline{1, \nu}\}.$$

Будемо казати, що $m(\alpha_1, \dots, \alpha_t;\ u_1, \dots, u_\nu)$ має властивість E, якщо $x_{\alpha_1}^{u_z} \dots x_{\alpha_t}^{u_z} \oplus x_{\alpha_1}^0 \dots x_{\alpha_t}^0 = 1$, $z = \overline{1, \nu}$, і для довільного $v \in \{1, \dots, k\} \setminus \{u_1, \dots, u_\nu\}$ $x_{\alpha_1}^v \dots x_{\alpha_t}^v \oplus x_{\alpha_1}^0 \dots x_{\alpha_t}^0 = 0$. Позначимо через $\gamma_t^{\{u_1, \dots, u_\nu\}}$ число усіх попарно відмінних елементів множини $\{m(\alpha_1, \dots, \alpha_t;\ u_1, \dots, u_\nu) \colon 1 \le \alpha_1 < \dots < \alpha_t \le n\}$, які мають властивість E. Нехай для $1 \le u_1 < \dots < u_\nu \le k$, $\nu = \overline{1, k}$, $t = \overline{1, n}$

$$\Gamma_{t,k}^{\{u_1, \dots, u_\nu\}} = \sum_{\psi=1}^{\nu} 2^{-1}\left(1 - (-1)^\psi\right) \times$$

$$\times \sum_{\substack{1 \le \sigma_1 < \dots < \sigma_\psi \le k,\\ \sigma_z \in \{u_1, \dots, u_\nu\},\\ z = \overline{1, \psi}}} \ \sum_{l=0}^{k-\nu} \ \sum_{\substack{1 \le \mu_1 < \dots < \mu_l \le k,\\ \mu_z \notin \{u_1, \dots, u_\nu\},\\ z = \overline{1, l}}} \gamma_t^{\{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi, \mu_1, \dots, \mu_l\}}. \tag{20}$$

Нас цікавлять оцінки суми $\Gamma_{t,k}^{\{u_1, \dots, u_\nu\}}$, введеної рівністю (20), та окремих її доданків. Нехай $i_{\{u_1, \dots, u_s\}}$ $(j_{\{u_1, \dots, u_s\}})$ — кількість одиниць (нулів), розташованих на тих і тільки тих позиціях усіх векторів $\bar{x}^{u_1}, \dots, \bar{x}^{u_s}$, на яких в усіх векторах $\bar{x}^{u_{s+1}}, \dots, \bar{x}^{u_k}, \bar{x}^0$ розташовані нулі (одиниці), $u_1, \dots, u_k \in \{1, \dots, k\}$, $u_i \ne u_j$ для $i \ne j$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $1 \le s \le k$. Для сукупності $\{u_1, \dots, u_\nu\}$, $1 \le u_1 < \dots < u_\nu \le k$, $\nu = \overline{1, k}$, позначимо

$$I_{\{u_1, \dots, u_\nu\}} = \left\{ i_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi, \mu_1, \dots, \mu_l\}} : A(\psi,\ l,\ \nu) \right\};$$

$$J_{\{u_1, \dots, u_\nu\}} = \left\{ j_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi, \mu_1, \dots, \mu_l\}} : A(\psi,\ l,\ \nu) \right\},$$

де $A(\psi,\ l,\ \nu)$ — скорочений запис наступного набору обмежень:

$$1 \le \sigma_1 < \dots < \sigma_\psi \le k, \quad \sigma_z \in \{u_1, \dots, u_\nu\}, \quad z = \overline{1, \psi}, \quad \psi = \overline{1, \nu}, \quad \psi = 1 \pmod 2,$$

$$1 \le \mu_1 < \dots < \mu_l \le k, \quad \mu_1, \dots, \mu_l \notin \{u_1, \dots, u_\nu\}, \quad l = \overline{0, k - \nu}.$$

Нехай $J = \left\{ j_{\{u_1, \dots, u_\nu\}} : 1 \le u_1 < \dots < u_\nu \le k,\ \nu = \overline{1, k} \right\}$ та $s' = \sum_{j \in J} j$.

Твердження 3. *Для* $1 \le u_1 < \dots < u_\nu \le k$, $\nu = \overline{1, k}$, *та* $t \in \{1, \dots, n\}$ *виконується нерівність*

$$\Gamma_{t,k}^{\{u_1,\dots,u_\nu\}} \geq \sum_{i\in I_{\{u_1,\dots,u_\nu\}},\ j\in J_{\{u_1,\dots,u_\nu\}}} (C_i^t + C_j^t). \tag{21}$$

Нехай $1 \leq u_1 < \ldots < u_\nu \leq k$, $\nu \in \{3, 4, \ldots, k\}$; $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \subseteq \{u_1, \ldots, u_\nu\}$, $1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 \leq k$; $\{u_1, \ldots, u_\nu\} \cap \{\mu_1, \ldots, \mu_l\} = \varnothing$, $1 \leq \mu_1 < \ldots < \mu_l \leq k$, $l = \overline{0,\ k-\nu}$.
Якщо

$$j_* \geq t, \tag{22}$$

де t *— ціле число,* $t \geq 1$, $j_* = \min\{j_a, j_b\}$, $a = \tilde\sigma \cup \tilde\mu$, $b = \hat\sigma \cup \hat\mu$, $\tilde\sigma \cup \hat\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tilde\sigma \neq \hat\sigma$, $|\tilde\sigma| = |\hat\sigma| = 2$, $\tilde\mu \cup \hat\mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_l\}$, *то*

$$\gamma_t^{\{a\cup b\}} \geq t^{-1} j_*(j^* - 2^{-1}(j_*-1))\, C^{t-2}_{(j^*/2)+(3j_*/4)-(5/4)}, \tag{23}$$

де $j^* = \max\{j_a, j_b\}$. *Якщо*

$$i_* \geq t, \tag{24}$$

де $i_* = \min\{i_a, i_b\}$, *то*

$$\gamma_t^{\{a\cup b\}} \geq t^{-1} i_*(i^* - 2^{-1}(i_*-1))\, C^{t-2}_{(i^*/2)+(3i_*/4)-(5/4)}, \tag{25}$$

де $i^* = \max\{i_a, i_b\}$.

Доведення. Використовуючи визначення чисел $\gamma_t^{\{u_1,\dots,u_\nu\}}$, $i_{\{u_1,\dots,u_\nu\}}$ та $j_{\{u_1,\dots,u_\nu\}}$, знаходимо наступні оцінки для доданків з правої частини (20):

$$\gamma_t^{\{\sigma_1,\dots,\sigma_\psi,\mu_1,\dots,\mu_l\}} \geq C^t_{i_{\{\sigma_1,\dots,\sigma_\psi,\mu_1,\dots,\mu_l\}}} + C^t_{j_{\{\sigma_1,\dots,\sigma_\psi,\mu_1,\dots,\mu_l\}}}, \tag{26}$$

$$\gamma_t^{\{a\cup b\}} \geq C^t_{j_a+j_b} - C^t_{j_a} - C^t_{j_b}. \tag{27}$$

Із (20) та (26) безпосередньо випливає (21). Внаслідок (22) та встановленої в [6] нерівності $C^t_\alpha - C^t_{\alpha-\beta} \geq \beta\, C^{t-1}_{\alpha-2^{-1}(1+\beta)}$, де α, β і t — цілі додатні числа, $\alpha - \beta \geq t$, маємо

$$C^t_{j^*+j_*} - C^t_{j^*} \geq j_*\, C^{t-1}_{j^*+2^{-1}(j_*-1)},$$

$$C^{t-1}_{j^*+2^{-1}(j_*-1)} - C^{t-1}_{j_*-1} \geq (j^* - 2^{-1}(j_*-1))\, C^{t-2}_{(j^*/2)+(3j_*/4)-(5/4)}.$$

На підставі останніх двох нерівностей можна дійти висновку, що

$$C^t_{j^*+j_*} - C^t_{j^*} - C^t_{j_*} \geq t^{-1} j_*(j^* - 2^{-1}(j_*-1))\, C^{t-2}_{(j^*/2)+(3j_*/4)-(5/4)}.$$

Звідси з урахуванням (27) випливає (23). Аналогічно нерівності (23) обгрунтовується (25) за умови (24). Твердження 3 доведено.

Надалі запис $S(n, k; Q)$ буде означати

$$S(n,k;Q) = \sum_{s=0}^{n-\rho(n)} \sum (n-\rho(n))! \left((n-\rho(n)-s)! \prod_{i\in I} i!^{-1}\right) \times$$

$$\times \sum_{\substack{s'=0,\\ s'+s\geq 1}}^{\rho(n)} {\sum}' \rho\left((n)!\,(\rho(n)-s')! \prod_{j\in J} j!\right)^{-1} Q, \tag{28}$$

де $\rho(n)$ — кількість ненульових компонент вектора $\bar{x}^0$,

$$Q = \prod_{i=1}^{N} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{1 \le u_1 < \ldots < u_\nu \le k} \prod_{t=1}^{g_i(n)} (1 - 2p_{it})^{\Gamma_{t,k}^{\{u_1, \ldots, u_\nu\}}}\right),$$

додавання $\sum \left(\sum' \right)$ виконується за всіма $i \in I$ $(j \in J)$, де

$$I = \{ i_{\{u_1, \ldots, u_\nu\}} : 1 \le u_1 < \ldots < u_\nu \le k, \ \nu = \overline{1, k} \},$$

таким, що

$$\sum_{i \in I} i = s \qquad \left(\sum_{j \in J} i = s' \right); \tag{29}$$

в рівності (28) числа $i \in I$ та $j \in J$ задовольняють співвідношення

$$\sum_{i \in I_{\{u\}},\, j \in J_{\{u\}}} (i + j) \ge 1, \quad u = \overline{1, k}, \tag{30}$$

$$\sum_{l=0}^{k-2} \sum_{1 \le \mu_1 < \ldots < \mu_l \le k} (i_{\{u_1, \mu_1, \ldots, \mu_l\}} + j_{\{u_1, \mu_1, \ldots, \mu_l\}} +$$

$$+ \ i_{\{u_2, \mu_1, \ldots, \mu_l\}} + j_{\{u_2, \mu_1, \ldots, \mu_l\}}) \ge 1, \quad 1 \le u_1 < u_2 \le k; \tag{31}$$

для $\Gamma_{t,k}^{\{u_1, \ldots, u_\nu\}}$, $1 \le u_1 < \ldots < u_\nu \le k$, $\nu = \overline{1, k}$, $t = \overline{1, g_i(n)}$, $i = \overline{1, N}$, справедливо (20).

Позначимо через $M \nu_n^{[k]}$ k-й, $k \ge 0$, факторіальний момент випадкової величини ν_n; покладемо $M \nu_n^{[0]} \equiv 1$.

***Твердження* 4.** *Якщо виконується умова* (A), *то для* $k \ge 1$

$$M \nu_n^{[k]} = 2^{-kN} S(n, k; Q), \tag{32}$$

де $S(n, k; Q)$ *визначається рівністю* (28).

Доведення твердження 4 проводиться аналогічно доведенню теореми 1 з роботи [6]. (Зазначимо, що в [6] твердження 4 обгрунтовано при додатковому припущенні $g_i(n) = n$, $i = \overline{1, N}$).

У подальшому запис $S^{(\Delta)}(n, k; Q)$, $1 \le \Delta < 2^k$, означатиме

$$S^{(\Delta)}(n, k; Q) = S(n, k; Q) \tag{33}$$

для всіх тих значень $s, s', i \in I$ та $j \in J$, при яких існує тільки Δ попарно відмінних наборів

$$\omega_\alpha = \{ u_1^{(\alpha)}, \ldots, u_{\xi_\alpha}^{(\alpha)} \}, \quad 1 \le u_1^{(\alpha)} < \ldots < u_{\xi_\alpha}^{(\alpha)} \le k, \quad \xi_\alpha \in \{1, \ldots, k\}, \quad \alpha = \overline{1, \Delta},$$

для кожного з яких знайдеться $t^{(\alpha)} \in \{2, \ldots, r\}$ таке, що виконується нерівність

$$\Gamma_{t^{(\alpha)}, k}^{\omega_\alpha} < C_r^{t^{(\alpha)}}, \tag{34}$$

і для наборів $\{v_1, \ldots, v_\gamma\}$, $1 \le v_1 < \ldots < v_\gamma \le k$, $\gamma = \overline{1, k}$, що задовольняють співвідношення $\{v_1, \ldots, v_\gamma\} \ne \omega_\alpha$, $\alpha = \overline{1, \Delta}$, справедлива оцінка

$$\Gamma_{t,k}^{\{v_1, \ldots, v_\gamma\}} \ge C_r^t \tag{35}$$

для всіх $t \in \{2, \ldots, r\}$, де

$$r = [\varepsilon\varphi(n)], \quad 2 < \varphi(n) \le n. \tag{36}$$

Твердження 5. *Якщо виконуються умови* (2), (5) – (7) *при* $f(n) = o(\varphi(n))$, *то*

$$2^{-kN} S^{(0)}(n, k; Q) \to 2^{km}, \quad n \to \infty, \quad k \in \{1, 2, \ldots\}, \quad k = \text{const}, \quad k < \infty.$$

Доведення. Спочатку зазначимо, що при достатньо малому $\varepsilon > 0$ принаймні одна з двох нерівностей $i \ge r$ або $j \ge r$ може виконуватись для всіх $i \in I$ або всіх $j \in J$. Але, якщо $i \ge r$ та (або) $j \ge r$ для всіх $i \in I$ та (або) всіх $j \in J$, то внаслідок (21) оцінка (35) має місце для всіх наборів $\{v_1, \ldots, v_\gamma\}$, $1 \le v_1 < \ldots < v_\gamma \le k$, $\gamma = \overline{1, k}$, та $t \in \{2, \ldots, r\}$. Значить, в рівності (33) параметр Δ може набувати значення $\Delta = 0$.

При $\Delta = 0$ з урахуванням (35), умов (5) та (6) знаходимо

$$\prod_{i=1}^{N} (1 - (2^k - 1) B_n(i)) \le Q \le \prod_{i=1}^{N} (1 + (2^k - 1) B_n(i)), \tag{37}$$

де $B_n(i) = \exp\{-2 \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^t\}$, $i = \overline{1, N}$.

Із умови (7) при $f(n) = o(\varphi(n))$ та нерівності $r > f(n)$ випливає

$$\sum_{i=1}^{N} B_n(i) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{38}$$

Використовуючи (37), (38) та співвідношення $\ln(1+u) = u + O(u^2)$, $u \to 0$, $\max\limits_{1 \le i \le N} B_n(i) \to 0$, $n \to \infty$, неважко отримати

$$Q \to 1, \quad n \to \infty. \tag{39}$$

Якщо для деякого набору $\{u_1, \ldots, u_\nu\}$, $1 \le u_1 < \ldots < u_\nu \le k$, $\nu = \overline{1, k}$, і деякого $t \in \{2, \ldots, r\}$

$$\Gamma_{t,k}^{\{u_1, \ldots, u_\nu\}} < C_r^t, \tag{40}$$

то оцінка (21) дозволяє дійти висновку, що

$$0 \le i < r, \quad i \in I_{\{u_1, \ldots, u_\nu\}}; \qquad 0 \le j < r, \quad j \in J_{\{u_1, \ldots, u_\nu\}}. \tag{41}$$

Тому сума $S^{(0)}(n, k; 1)$ (тут $S^{(\Delta)}(n, k; 1) = S^{(\Delta)}(n, k; Q)$ за умови $Q \equiv 1$, $\Delta \ge 0$; аналогічно $S(n, k; 1) = S(n, k; Q)$ за умови $Q \equiv 1$) дорівнює $2^{nk} - \sigma_0$, де σ_0 відрізняється від $S(n, k; 1)$ тим, що додавання $\sum \left(\sum{}' \right)$ (див. (28)), виконується для всіх $i \in I$ ($j \in J$) таких, що справджується (29) і хоча б один з елементів множини $\left\{ \Gamma_{t,k}^{\{u_1, \ldots, u_\nu\}} : 1 \le u_1 < \ldots < u_\nu \le k,\ \nu = \overline{1, k},\ t = \overline{2, r} \right\}$ задовольняє (40). Оскільки при виконанні (40) має місце (41), то в лівій частині кожної із рівностей (29) знайдеться 2^{k-1} доданків, обмежених величиною r. Отже, $0 \le \sigma_0 \le \exp\{(\sigma(\varepsilon) + o(1))\, n\}\, 2^{n(k-1)}$, де $\sigma(\varepsilon) > 0$, $\sigma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. (Було використано, зокрема, нерівність

$$\sum_{i=1}^{r} C_n^i \le \exp\{(\sigma(\varepsilon) + o(1))\, n\}, \quad n \to \infty, \tag{42}$$

яку легко перевірити). Значить,

$$S^{(0)}(n,k;1) = 2^{nk}(1+o(1)), \quad n\to\infty. \tag{43}$$

Із співвідношень (2), (39) та (43) випливає, очевидно, твердження 5.

Твердження 6. *Якщо виконуються умови* (2) *та* (4), *то для* $\varepsilon\in(0,1)$, $\varepsilon=\mathrm{const}$,

$$\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\delta_i(n,\sqrt{\varepsilon})-\ln n \to \infty, \quad n\to\infty. \tag{44}$$

Доведення. Внаслідок умов (2), (4) маємо

$$\sum_{i=1}^{N}\exp\{-\sqrt{\varepsilon}\,n\,\delta_i(n,\sqrt{\varepsilon})\} \le \sum_{i=1}^{N}\exp\{-\varepsilon\,n\,\delta_{i1}(n)\}+Nn^{-2}\to 0, \quad n\to\infty. \tag{45}$$

Із нерівності Йенсена для випуклої функції маємо оцінку

$$\sum_{i=1}^{N}\exp\{-\sqrt{\varepsilon}\,n\,\delta_i(n,\sqrt{\varepsilon})\} \ge \exp\{(\ln N)-\sqrt{\varepsilon}\,N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\delta_i(n,\sqrt{\varepsilon})\},$$

із якої з урахуванням (2) та (45) безпосередньо випливає (44).

4. Доведення теореми 1. Покажемо, що для $k=1,2,\ldots$

$$M\,\nu_n^{[k]} \to 2^{km}, \quad n\to\infty. \tag{46}$$

З цією метою вираз (32) для $M\,\nu_n^{[k]}$ розіб'ємо на скінченне число доданків:

$$M\,\nu_n^{[k]} = 2^{-kN}\sum_{\Delta\ge 0}S^{(\Delta)}(n,k;Q), \tag{47}$$

де $S^{(\Delta)}(n,k;Q)$ визначається рівністю (33) з параметром $\varphi(n)=n$ у співвідношеннях (36). Як наслідок твердження 5 маємо при виконанні умов (2), (5) – (7)

$$2^{-kN}S^{(0)}(n,k;Q) \to 2^{km}, \quad n\to\infty. \tag{48}$$

Покажемо, що для $\Delta\ge 1$ та $k=1,2,\ldots$

$$2^{-kN}S^{(\Delta)}(n,k;Q) \to 0, \quad n\to\infty. \tag{49}$$

Дійсно, нехай $I=M_1\cup M_2$ та $J=\tilde M_1\cup\tilde M_2$, де

$$M_1 = \bigcup_{i\in I,\ i\notin I_{\omega_\alpha},\ \alpha=\overline{1,\Delta}} i, \qquad \tilde M_1 = \bigcup_{j\in J,\ j\notin J_{\omega_\alpha},\ \alpha=\overline{1,\Delta}} j$$

і $M_2=I\setminus M_1$, $\tilde M_2=J\setminus\tilde M_1$. Потужність множини M_1 ($\tilde M_1$) позначимо R_1 ($\tilde R_1$). Нехай z — найменше ціле число, для якого виконується нерівність $\Delta\le 2^z-1$. Ясно, що

$$1 \le z \le k. \tag{50}$$

На основі твердження 1 отримуємо

$$R_1 \le 2^{k-z}-1; \qquad \tilde R_1 \le 2^{k-z}-1. \tag{51}$$

Далі, із (34) внаслідок (40) та (41) випливає

$$0\le i\le r \quad (0\le j\le r) \tag{52}$$

для всіх $i\in M_2$ ($j\in\tilde M_2$). Використовуючи (3), для $i=\overline{1,N}$ та $\alpha=\overline{1,\Delta}$ знаходимо

$$\left| \prod_{t=1}^{g_i(n)} (1-2\rho_{it})^{\Gamma_{t,k}^{\omega_\alpha}} \right| \le (1-2\delta_{i1}(n))^{\Gamma_{1,k}^{\omega_\alpha}}. \tag{53}$$

Нехай виконується обмеження (Ч_1): існує $i \in M_2$ та (або) існує $j \in \tilde{M}_2$ таке, що $i \in (n E_n^{-1}, r]$ та (або) $j \in (n E_n^{-1}, r]$, де при $n \to \infty$

$$E_n \to \infty, \quad E_n = o(\ln n). \tag{54}$$

При виконанні (Ч_1) внаслідок (21) для деякого $\alpha \in \{1, \ldots, \Delta\}$ маємо

$$\Gamma_{1,k}^{\omega_\alpha} \ge n E_n^{-1}. \tag{55}$$

За допомогою (53) і (55) отримуємо оцінку

$$\left| \prod_{t=1}^{g_i(n)} (1-2p_{it})^{\Gamma_{t,k}^{\omega_\alpha}} \right| \le \exp\{-2\delta_{i1}(n) n E_n^{-1}\}$$

для $i = \overline{1, N}$ та деякого $\alpha \in \{1, \ldots, \Delta\}$, з урахуванням якої знаходимо

$$|Q| \le 2^{zN} \exp\{-2^z (N - \sum_{i=1}^{N} \exp\{-2\delta_{i1}(n) n E_n^{-1}\} - (2^k - \Delta - 1) \sum_{i=1}^{N} B_n(i))\}. \tag{56}$$

На основі нерівності Гельдера справедливе співвідношення

$$\sum_{i=1}^{N} \exp\{-2\delta_{i1}(n) n E_n^{-1}\} \le \left(\sum_{i=1}^{N} \exp\{-n\delta_{i1}(n)\} \right)^{A_n} N^{1-A_n},$$

де $A_n = 2E_n^{-1}$, використання якого разом з умовами (4) та (38) дозволяє перейти від (56) до оцінки

$$|Q| \le 2^{zN} \exp\{-2^{-z}(N - N^{1-A_n}) + o(1)\}, \quad n \to \infty. \tag{57}$$

Неважко перевірити,що при виконанні (51) та (52) з урахуванням (42) виконується нерівність

$$S^{(\Delta)}(n, k; 1) \le 2^{n(k-z)} \exp\{(\sigma(\varepsilon) + o(1)) n\}, \quad n \to \infty. \tag{58}$$

Співвідношення (54), (57), (58) і умова (2) дозволяють дійти висновку, що при достатньо малому $\varepsilon > 0$

$$2^{-kN} \left| S^{(\Delta)}(n, k; Q) \right| \le \exp\{-2^{-z} N (1 - N^{-A_n} - \sigma(\varepsilon) + o(1))\} \to 0, \quad n \to \infty,$$

тобто (49) виконується при обмеженні (Ч_1).

Нехай виконується обмеження (Ч_2): існує $i \in M_2$ та (або) існує $j \in \tilde{M}_2$ таке, що $i \in (\varepsilon n (\ln n)^{-1}, n E_n^{-1}]$, та (або) $j \in (\varepsilon n (\ln n)^{-1}, n E_n^{-1}]$.

При виконанні (Ч_2) аналогічно (57) (з тією лише відмінністю, що в (57) замість A_n буде $\tilde{A}_n = 2\varepsilon / \ln n$) отримуємо

$$|Q| \le 2^{zN} \exp\{-\sigma(\varepsilon) n\}, \quad n \to \infty. \tag{59}$$

Якщо параметри i та j змінюються так, як зазначено в (Ч_2), то, використовуючи (51) і варіант нерівності (42), а саме

$$\sum_{i=1}^{n/E_n} C_n^i \le \exp\{|o(n)|\}, \quad n \to \infty,$$

маємо

$$S^{(\Delta)}(n, k; 1) \le 2^{n(k-z)} \exp\{|o(n)|\}, \quad n \to \infty. \tag{60}$$

Із (59) та (60) з урахуванням (2) випливає (49) при обмеженні $(Ч_2)$.

Нехай виконується обмеження $(Ч_3)$: для всіх $i \in M_2$ та всіх $j \in \tilde{M}_2$ $0 \le i \le r / \ln n$, $0 \le j \le r / \ln n$.

За допомогою (53) та (21) для $i = \overline{1, N}$ та $\alpha = \overline{1, \Delta}$ отримуємо

$$\left| \prod_{t=1}^{g_i(n)} (1 - 2p_{it})^{\Gamma_{t,k}^{\omega_\alpha}} \right| \le \exp\left\{ -2\delta_{i1}(n) \left(S^{(\alpha)} + \tilde{S}^{(\alpha)} \right) \right\}, \tag{61}$$

де $S^{(\alpha)} = \sum_{i \in I_{\omega_\alpha}} i$, $\tilde{S}^{(\alpha)} = \sum_{j \in J_{\omega_\alpha}} j$. Співвідношення (61) зважаючи на $(Ч_3)$ і рівність $e^{-y} = 1 - y + O(y^2)$, $0 \le y < \infty$, можна подати наступним чином:

$$\left| \prod_{t=1}^{g_i(n)} (1 - 2p_{it})^{\Gamma_{t,k}^{\omega_\alpha}} \right| \le 1 - 2\delta_i\left(n, \sqrt{\varepsilon}\right) \left(S^{(\alpha)} + \tilde{S}^{(\alpha)} \right) \left(1 + O(\sqrt{\varepsilon}) \right). \tag{62}$$

Використовуючи (6), (35) та (62), неважко переконатися в тому, що при $n \to \to \infty$

$$2^{-kN} \left| S^{(\Delta)}(n, k; Q) \right| \le 2^{-kN} (\Delta + 1)^N \sum_{s=0}^{n-\rho(n)} C_{n-\rho(n)}^s \sum_{s_*=0}^{s} R_1^{s-s_*} \times$$

$$\times \left(\sum_{\sum_{i \in M_2} i = s_*} s! / (s - s_*)! \prod_{i \in M_2} i! \right) \sum_{\substack{s'=0, \\ s'+s \ge 1}}^{\rho(n)} C_{\rho(n)}^{s'} \sum_{\tilde{s}_*=0}^{s'} \tilde{R}_1^{s-\tilde{s}_*} \times$$

$$\times \left(\sum_{\sum_{j \in \tilde{M}_2} j = \tilde{s}_*} s'! / (s' - \tilde{s}_*)! \prod_{j \in \tilde{M}_2} j! \right) \exp\left\{ -2^{-z+1} \left(1 + O(\sqrt{\varepsilon}) \right) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{i=1}^{N} \delta_i\left(n, \sqrt{\varepsilon}\right) \sum_{\alpha=1}^{\Delta} \left(S^{(\alpha)} + \tilde{S}^{(\alpha)} \right) + \left(2^k - \Delta - 1 \right) 2^{-z} \sum_{i=1}^{N} B_i(i) \right\}. \tag{63}$$

Якщо $\Delta < 2^z - 1$, то із (63) з урахуванням (2), (38), (51) та $\max\{s_*, \tilde{s}_*\} \le \le \sigma(\varepsilon)\, n / \ln n$ легко отримати (49). Нехай $\Delta = 2^z - 1$. Тоді, використовуючи (2), (38), (51) та очевидну нерівність $\sum_{\alpha=1}^{\Delta} \left(S^{(\alpha)} + \tilde{S}^{(\alpha)} \right) \ge s_* + \tilde{s}_*$, де

$$s_* = \sum_{i \in M_2} i, \quad \tilde{s}_* = \sum_{j \in \tilde{M}_2} j,$$

знаходимо оцінку

$$2^{-kN} \left| S^{(\Delta)}(n, k; Q) \right| \le (1 + o(1)) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \left(|M_2| (n - \rho(n)) \exp\left\{ -2^{-z+1} \times \right. \right. \right.$$

$$\times\,(1+O(\sqrt{\varepsilon}))\sum_{i=1}^{N}\delta_i\big(n,\sqrt{\varepsilon}\,\big)\big\}\big)^{q}\,/\,q!\Big)\sum_{\substack{\tilde q=0,\\ \tilde q+q\ge 1}}^{\infty}\Big(\big|\tilde M_2\big|\,\rho(n)\exp\big\{-2^{-z+1}\times$$

$$\times\,(1+O(\sqrt{\varepsilon}))\sum_{i=1}^{N}\delta_i\big(n,\sqrt{\varepsilon}\,\big)\big\}\big)^{\tilde q}\,/\,\tilde q!,\qquad n\to\infty, \tag{64}$$

для випадку

$$s_* + \tilde s_* \;\ge\; 1. \tag{65}$$

Приймаючи до уваги твердження 6, неважко з (64) отримати співвідношення (49).

Покажемо, що (65) виконується, коли в (50) маємо або $k\in\{1,2\}$, або $z\in\in\{k,k-1\}$. Дійсно, якщо $z=k$ (або $k\in\{1,2\}$), то, очевидно, існує $\alpha\in\in\{1,\ldots,\Delta\}$, для якого $|\omega_\alpha|\le 2$. Якщо $z=k-1$, то на основі зауваження 2 переконуємося в існуванні $\alpha\in\{1,\ldots,\Delta\}$ такого, що $|\omega_\alpha|\le 2$. Далі, співвідношення (30) і (31) дозволяють встановити, що коли для деякого $\alpha\in\in\{1,\ldots,\Delta\}$ $|\omega_\alpha|\le 2$, то $s^{(\alpha)}+\tilde s^{(\alpha)}\ge 1$ і звідси випливає (65).

Отже, для завершення доведення (49) залишилося перевірити, що воно має місце при обмеженнях ($Ч_4$):

$$s_* + \tilde s_* \;=\; 0; \tag{66}$$

$$|\omega_\alpha|\ge 3,\quad \alpha=\overline{1,\Delta},\quad \Delta=2^z-1,\quad 1\le z\le k-2,\quad 3\le k<\infty. \tag{67}$$

Якщо виконуються (66), $\Delta=2^z-1$ $R_1<2^{k-z}-1$ та $\tilde R_1<2^{k-z}-1$, то оцінку (63) можна переписати у вигляді

$$2^{-kN}\Big|S^{(\Delta)}(n,k;Q)\Big| \;\le\; (1+o(1))\Big(1-2^{z-k}\Big)^{n},\qquad n\to\infty. \tag{68}$$

Звідси тривіально випливає (49). Якщо виконується (67) та

$$R_1 \;=\; \tilde R_1 \;=\; 2^{k-z}-1, \tag{69}$$

то згідно з твердженням 2 множина M_1 $(\tilde M_1)$ містить не менше трьох елементів $i_{m_\nu}\in M_1$ $(j_{m_\nu}\in\tilde M_1)$, $\nu=\overline{1,3}$, таких, що для деякого $\alpha\in\{1,\ldots,\Delta\}$ $(\tilde\alpha\in\{1,\ldots,\Delta\})$

$$\Big|\omega_\zeta\cap m(\zeta,\nu)\Big|=2,\quad \nu=\overline{1,3};\qquad \Big|\omega_\zeta\cap(a_\zeta\cup b_\zeta)\Big|=3,\quad \zeta\in\{\alpha,\tilde\alpha\}, \tag{70}$$

для довільних $a_\zeta, b_\zeta\in\{m(\zeta,\nu):\nu=\overline{1,3}\}$, $a_\zeta\ne b_\zeta$, де $m(\zeta,\nu)=\{m_\nu$, якщо $\zeta=\alpha$; $\tilde m_\nu$, якщо $\zeta=\tilde\alpha\}$, $\nu=\overline{1,3}$. Для зазначеного ζ внаслідок (20) і (70)

$$\Gamma_{t,k}^{\omega_\zeta} \;\ge\; \gamma_t^{\{a_\zeta\cup b_\zeta\}},\quad t\in\{2,\ldots,r\},\quad \zeta\in\{\alpha,\tilde\alpha\}. \tag{71}$$

Оцінюючи праву частину (71) з допомогою (23) та (25), знаходимо

$$\gamma_t^{\{a_\zeta\cup b_\zeta\}} \;\ge\; t^{-1}c_*(\zeta)\,(c^*(\zeta)-2^{-1}(c_*(\zeta)-1))\;C^{t-2}_{(c^*(\zeta)/2)+(3c_*(\zeta)/4)-(5/4)} \tag{72}$$

за умови, що $c_*(\zeta)\ge t$, де $\zeta\in\{\alpha,\tilde\alpha\}$, $c_*(\alpha)=\min\{i_{a_\alpha}, i_{b_\alpha}\}$, $c^*(\alpha)=\max\{i_{a_\alpha}, i_{b_\alpha}\}$, $c_*(\tilde\alpha)=\min\{j_{a_{\tilde\alpha}}, j_{b_{\tilde\alpha}}\}$, $c^*(\tilde\alpha)=\max\{j_{a_{\tilde\alpha}}, j_{b_{\tilde\alpha}}\}$. Якщо $c_*(\zeta)\ge\sqrt{\varepsilon}\,n$, то нерівність $c_*(\zeta)\ge t$, $t\in\{2,\ldots,r\}$, очевидно, виконується для $0<\varepsilon<1$ і тому із (71) та (72) випливає

$$\Gamma_{t,k}^{\omega_\zeta} \geq \varepsilon(2t)^{-1} n^2 C_{(5\sqrt{\varepsilon}\, n/4)-(5/4)}^{t-2}, \quad n \to \infty, \quad \zeta \in \{\alpha, \tilde{\alpha}\}, \tag{73}$$

що суперечить (34) при достатньо малому $\varepsilon > 0$ і $t \in \{2, \ldots, r\}$.

Таким чином, при обмеженнях (67) та (69) принаймні один елемент $c_*(\alpha)$ множини M_1, $c_*(\alpha) \in M_1$ (один елемент $c_*(\tilde{\alpha}) \in \tilde{M}_1$) задовольняє нерівності $c_*(\alpha) < \sqrt{\varepsilon}\, n$ $(c_*(\tilde{\alpha}) < \sqrt{\varepsilon}\, n)$. Звідси при обмеженнях $(Ч_4)$ та (69) в умовах теореми 1 отримуємо при $n \to \infty$

$$2^{-kN} \left| S^{(\Delta)}(n, k; Q) \right| \leq \exp\left\{ (\sigma(\sqrt{\varepsilon}) + o(1))\, n \right\} (1 - 2^{z-k})^n \to 0. \tag{74}$$

Із співвідношення (74) випливає (49) у припущеннях $(Ч_4)$ і (69). Якщо $R_1 = 2^{k-z} - 1$, $\tilde{R}_1 < 2^{k-z} - 1$ або $R_1 < 2^{k-z} - 1$, $\tilde{R}_1 = 2^{k-z} - 1$, то, комбінуючи міркування, за допомогою яких отримані (68) та (73), приходимо до (74).

Аналізуючи обмеження $(Ч_i)$, $i = \overline{1, 4}$, неважко переконатися у тому, що встановлене при цих обмеженнях співвідношення (49) справедливо для всіх значень параметрів s, s', i, j $(i \in I,\ j \in J)$ підсумовування в (28), при яких нерівність (34) має місце для $\Delta \geq 1$. Із (47) – (49) негайно випливає (46) для $k = 1, 2, \ldots$. Оскільки λ^k є k-й, $k \geq 1$, факторіальний момент для розподілу Пуассона з параметром λ і виконується (46), то, як відомо [7, с. 260], розподіл випадкової величини ν_n прямує при $n \to \infty$ до розподілу Пуассона з тим же параметром λ. Співвідношення (8) встановлено. Теорему 1 доведено.

5. Доведення теореми 2 можна виконати аналогічно доведенню теореми 1. При цьому доцільно, зокрема, покласти в (36) $\varphi(n) = n / \ln n$, а замість (44) використати умову (9).

1. *Коваленко И. Н., Левитская А. А.* Вероятностные свойства систем случайных линейных уравнений над конечными алгебраическими структурами // Кибернетика. – 1993. – № 3. – С. 100 – 105.
2. *Балакин Г. В.* Графы систем двучленных уравнений с булевыми неизвестными // Теория вероятностей и ее применения. – 1995. – **40**, вып. 2. – С. 241 – 259.
3. *Копытцев В. А.* О распределении числа решений случайных заведомо совместных систем уравнений // Там же. – С. 430 – 437.
4. *Масол В. И.* Пуассоновские теоремы для предельного распределения числа решений системы нелинейных случайных булевых уравнений // Вторая Всерос. школа-коллоквиум по стохастическим методам: Тез. докл. – М.: Научн. изд-во ТВП, 1995. – С. 95 – 96.
5. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
6. *Masol V. I.* Moments of the number of solutions of a system of random Boolean equations // Random operators and Stoch. equations. – 1993. – **1**, № 2. – P. 171 – 179.
7. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982. – 384 с.

Одержано 19.04.96