УДК 519. 21

І. К. Мацак (Держ. акад. лег. пром-сті України, Київ)

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ НОРМИ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ НОРМАЛЬНИХ ВИПАДКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ПРОСТОРІ $C[0, 1]$

We prove that almost surely

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|Z_n\| - (2\ln(n))^{1/2}\|\sigma\|\right) = 0,$$

where X is a normal random element in the space $C[0,1]$, $MX = 0$, $\sigma = \left\{\left(M|X(t)|^2\right)^{1/2}, t\in[0,1]\right\}$, (X_n) are independent copies of X and $Z_n = \max\limits_{1\le k\le n} X_k$.

Under additional restrictions on the random element X, this equality can be strengthened.

Доведено, що майже напевно

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|Z_n\| - (2\ln(n))^{1/2}\|\sigma\|\right) = 0,$$

де X — нормальний випадковий елемент у просторі $C[0,1]$, $MX = 0$, $\sigma = \left\{\left(M|X(t)|^2\right)^{1/2}, t\in[0,1]\right\}$, (X_n) — незалежні копії X і $Z_n = \max\limits_{1\le k\le n} X_k$.

При додаткових обмеженнях на випадковий елемент X ця рівність посилюється.

Вступ та основні результати. Розглянемо банахів простір $C[0, 1]$ неперервних функцій $x(t)$ на відрізку $[0, 1]$ з нормою $\|x\| = \sup_{t\in[0,1]}|x(t)|$, X — центрований нормальний випадковий елемент (в. е.) в $C[0, 1]$, тобто $X = X(t)$, $t\in[0, 1]$, це нормально розподілений випадковий процес, вибіркові функції якого належать $C[0, 1]$ майже напевне (м. н.) і $MX(t) = 0$. Простір $C[0, 1]$ із поточковим відношенням порядку буде сеперабельною банаховою граткою і в ньому можна розглядати максимум двох або більше в. е.

Позначимо через R та σ відповідно кореляційну функцію та середнє квадратичне відхилення процесу $X(t)$:

$$R = (R(t,s) = MX(t)X(s), \quad t, s\in[0,1]),$$

$$\sigma = (\sigma(t) = (R(t,t))^{1/2},\ t\in[0,1]),$$

X_n, $n\ge 1$, — незалежні копії в. е. X:

$$Z_n = \left(Z_n(t) = \max_{1\le k\le n} X_k(t), t\in[0,1]\right),$$

$$b_n = (2\ln(n))^{1/2}, \qquad d_n = \begin{cases}(2\ln(n))^{-1/2}\ln(\ln(n)), & n\ge 3,\\ 1, & n<3.\end{cases}$$

Звичайно в наших умовах $\sigma(t)\in C[0,1]$.

Наша ціль — дослідження асимптотичної поведінки величини $\|Z_n\|$ при $n\to\infty$. Із близьких за тематикою робіт відзначимо [1 – 4]. Так, у роботі [3] встановлено відносну стійкість величини Z_n у просторі $C[0, 1]$, а саме:

$$\|Z_n/a_n - \sigma\| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{м. н.}} 0 \quad \text{при} \quad a_n = \sqrt{2\ln(n)}.$$

На дійсній прямій відомі [1, 2] значно сильніші твердження: м. н.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{z_n - b_n}{d_n} = 1/2,$$
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - b_n}{d_n} = -1/2, \tag{1}$$

де $z_n = \max\limits_{1\le k\le n} \gamma_k$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, — послідовність стандартних нормальних незалежних випадкових величин (н. в. в.), $M\gamma_i = 0$, $M\gamma_i^2 = 1$.

Узагальнення рівностей (1) на банахові простори з безумовним базисом, які не містять рівномірно l_∞^n, одержано в [4]. Виявляється, що для таких просторів при досить широких умовах м. н. виконується співвідношення

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| \frac{Z_n - b_n\sigma}{d_n} \right\| = \|\sigma\|/2. \tag{2}$$

Звернемо увагу на те, що в роботах [2, 4] розглядається більш загальна задача про граничні точки послідовності $\left(\dfrac{Z_n - b_n\sigma}{d_n}\right)$.

Докладний огляд та бібліографію з екстремумів нормальних послідовностей і процесів можна знайти в [5 – 8].

Повертаючись до простору $C[0, 1]$ відзначимо, що тут ситуація більш складна. Так, для стандартного вінерівського процесу $X(t) = W(t)$, $(\sigma(t) = t^{1/2}$, $\|\sigma\| = 1)$ мають місце рівності типу (1):

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|Z_n\| - b_n}{d_n} = 1/2,$$
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\|Z_n\| - b_n}{d_n} = -1/2.$$

Але в загальному випадку (наприклад, для процесів в теоремах 3, 4) ці рівності, і рівність (2) не виконуються.

Сформулюємо основні результати.

Теорема 1. *Якщо* X — нормальний в. е. у просторі $C[0, 1]$, $MX = 0$, *то м. н.*

$$\lim_{n\to\infty} (\|Z_n\| - b_n\|\sigma\|) = 0. \tag{3}$$

***Наслідок* 1.** *Якщо* $f = f(t) \in C[0, 1]$ *і для всіх* $t \in [0, 1]$ $f(t) > 0$, *то в умовах теореми* 1

$$P(D_n(\varepsilon) \text{ н. ч. р.}) = \begin{cases} 0, & \varepsilon > 0, \\ 1, & \varepsilon = 0, \end{cases}$$

де $D_n(\varepsilon) = \{\exists t \in [0, 1] : |Z_n(t)| > (b_n + \varepsilon)\|\sigma/f\| f(t)\}$ *(н. ч. р. — нескінченне число разів).*

Теорема 2. *Нехай* X *— нормальний в. е. у просторі* $C[0, 1]$, $MX = 0$ *і для* $t, s \in [0, 1]$, *деякого* α, $0 < \alpha \le 2$,

$$M|X(t) - X(s)|^2 \le C_1 |t - s|^\alpha, \quad C_1 > 0. \tag{4}$$

Тоді м. н.

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\|Z_n\|-b_n\|\sigma\|}{d_n}\right| \le C_2\|\sigma\|, \tag{5}$$

де $C_2 = C_2(C_1, \alpha)$, $1/2 \le C_2 < \infty$.

Для стаціонарних процесів в умовах типу (4) нерівність (5) можна посилити. Розглянемо нормальний стаціонарний процес $X(t)$ з кореляційною функцією $R(t, s) = R(t-s)$, яка задовольняє умови:

для деякого α, $0 < \alpha \le 2$,

$$R(t) = 1 - C|t|^\alpha + o(|t|^\alpha), \qquad C > 0, \tag{6}$$

і для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\varepsilon \le t \le 1} R(t) < 1. \tag{7}$$

Звичайно при виконанні цих умов $\sigma(t) = 1$.

Теорема 3. *Нехай X — нормальний в. е. у просторі $C[0, 1]$, $MX = 0$ і виконуються умови* (6), (7). *Тоді*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|Z_n\|-b_n}{d_n} = 1/\alpha + 1/2, \tag{8}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\|Z_n\|-b_n}{d_n} = 1/\alpha - 1/2, \tag{9}$$

Теорема 4. *Нехай X — нормальний в. е. у просторі $C[0, 1]$, $MX = 0$, $\sigma(t) = 1$ і для деяких $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $\delta > 0$, $\alpha > 1$, для всіх $s, t \in [0, 1]$, $|s-t| < \delta$ виконуються нерівності*

$$C_1(-\ln|t-s|)^{-\alpha} \le M|X(t)-X(s)|^2 \le C_2(-\ln|t-s|)^{-\alpha}.$$

Тоді м. н.

$$\limsup_{n\to\infty}|\|Z_n\|-b_n|\,b_n^{1-2/(\alpha+1)} = C,$$

де $0 < C = C(C_1, C_2, \alpha) < \infty$.

Допоміжні леми. Далі через $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ будемо позначати послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $F(x) = P(\eta < x)$, $z_n = z_n(\eta) = \max\limits_{1\le k\le n}\eta_k$.

Лема 1. i) *Якщо при* $x \to \infty$

$$1 - F(x) \sim Cx^\beta \exp(-x^2/2),$$

то м. н.

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{z_n-b_n}{d_n} = \beta/2 + 1. \tag{10}$$

ii) *Якщо при* $x > x_0$

$$1 - F(x) \le Cx^\beta \exp(-x^2/2),$$

то м. н.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{z_n - b_n}{d_n} \le \beta/2 + 1. \tag{11}$$

***Доведення леми* 1.** i). Покладемо $u_n(t) = (\beta/2 + t)d_n + b_n$. Неважко переконатись, що для будь-якого t при досить великих n $u_n(t)$ неспадна по n функція. Для будь-якого фіксованого $\varepsilon > 0$ обчислюємо

$$(u_n(1+\varepsilon))^2/2 = \ln(n) + (\beta/2 + 1 + \varepsilon)\ln(\ln(n)) + O\left(\frac{|\ln(\ln(n))|^2}{\ln(n)}\right).$$

Звідси

$$1 - F(u_n(1+\varepsilon)) =$$

$$= (C + o(1))n^{-1}(\ln(n))^{-(\beta/2+1+\varepsilon)}\left((2\ln(n))^{1/2} + O\left(\frac{\ln(\ln(n))}{(\ln(n))^{1/2}}\right)\right)^\beta =$$

$$= (C_1 + o(1))n^{-1}(\ln(n))^{-1-\varepsilon}\left(1 + O\left(\frac{\ln\ln(n)}{\ln(n)}\right)\right)^\beta. \tag{12}$$

Із рівності (12) випливає, що ряд $\sum_{n\ge 1}(1 - F(u_n(1+\varepsilon)))$ збігається при $\varepsilon > 0$ і розбігається при $\varepsilon = 0$. Тому [5, с. 190]

$$P(z_n \ge u_n(1+\varepsilon) \text{ н. ч. р.}) = \begin{cases} 0, & \varepsilon > 0, \\ 1, & \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Остання рівність еквівалентна наступним нерівностям: м. н.

для $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{z_n - b_n}{d_n} \le \beta/2 + 1 + \varepsilon, \tag{13}$$

для $\varepsilon = 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{z_n - b_n}{d_n} \ge \beta/2 + 1. \tag{14}$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне число, то оцінки (13), (14) дають рівність (10).

Доведення нерівності (11) і твердження ii) випливає із наведених вище міркувань.

Лема 2. *Нехай* η *— в. в. з неперервною функцією розподілу* $F(x)$.

i) *Якщо при* $x \to \infty$ $1 - F(x) \sim Cx^\beta \exp(-x^2/2)$, *то м. н.*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - b_n}{d_n} = \beta/2. \tag{15}$$

ii) *Якщо при* $x > x_0$ $1 - F(x) \ge Cx^\beta \exp(-x^2/2)$, *то м. н.*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - b_n}{d_n} \ge \beta/2. \tag{16}$$

***Доведення леми* 2.** i) Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді в позначеннях леми 1

$$(u_n(-\varepsilon))^2/2 = \ln(n) + (\beta/2 - \varepsilon)\ln(\ln(n)) + O\left(\frac{|\ln(\ln(n))|^2}{\ln(n)}\right).$$

Отже, в умовах леми маємо

$$1-F(u_n(-\varepsilon)) = (C+o(1))\left|u_n(-\varepsilon)\right|^{\beta} n^{-1}(\ln(n))^{-(\beta/2-\varepsilon)} =$$

$$= (C_1+o(1))n^{-1}(\ln(n))^{\varepsilon}\left(1+O\left(\frac{|\ln(\ln(n))|}{\ln(n)}\right)\right)^{\beta}. \tag{17}$$

Рівність (17) означає, що існує число n_ε таке, що при $n \geq n_\varepsilon$

$$1-F(u_n(-\varepsilon)) \geq 2\frac{\ln\ln(n)}{n}, \qquad \varepsilon > 0, \tag{18}$$

$$1-F(u_n(0)) \leq \frac{\ln\ln(n)}{n}, \qquad \varepsilon = 0. \tag{19}$$

Далі скористаємось відомим результатом для послідовності (ν_k) н. в. в., які рівномірно розподілені на відрізку $[0, 1]$ [5, с. 199]:

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} \nu_k \leq 1-(1+y)\frac{\ln\ln(n)}{n} \text{ н. ч. р.}\right) = \begin{cases} 0, & y > 0, \\ 1, & y \leq 0. \end{cases} \tag{20}$$

Покладемо

$$v_n(y) = F_{-1}\left(1-(1+y)\frac{\ln\ln(n)}{n}\right),$$

$F_{-1}(x)$ — обернена функція до $F(x)$, тобто $F(F_{-1}(x)) = x$. Оскільки функція розподілу $F(x)$ неперервна, то в. в. ξ_n та $\xi_n' = F_{-1}(\nu_n)$ будуть мати однаковий розподіл для $n \geq 1$. Тому, враховуючи рівність (20), одержуємо

$$P(z_n \leq v_n(y) \text{ н. ч. р.}) = \begin{cases} 0, & y > 0, \\ 1, & y \leq 0. \end{cases} \tag{21}$$

За означенням функція $v_n(y)$ задовольняє рівність

$$1-F(v_n(y)) = (1+y)\frac{\ln\ln(n)}{n}. \tag{22}$$

Тоді із (18), (19), (22) та монотонності функції $F(x)$ випливає, що при $n \geq n_\varepsilon$

$$u_n(-\varepsilon) \leq v_n(1), \qquad \varepsilon > 0,$$

$$u_n(0) \geq v_n(0), \qquad \varepsilon = 0.$$

Звідси та рівності (21) отримуємо

$$P(z_n \leq u_n(-\varepsilon) \text{ н. ч. р.}) = \begin{cases} 0, & \varepsilon > 0, \\ 1, & \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Остання рівність означає, що м. н.

для $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - b_n}{d_n} \geq \beta/2 - \varepsilon, \tag{23}$$

для $\varepsilon = 0$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - b_n}{d_n} \leq \beta/2. \tag{24}$$

Оцінки (23), (24) еквівалентні рівності (15).

Доведення нерівності (16) твердження леми 2 ii) міститься в міркуваннях, використаних при встановленні нерівності (23).

Лема 3. *Нехай* $\lambda > 0$, $1 \geq \beta > 0$.

i) *Якщо для* $x \geq x_0$

$$1 - F(x) \leq C \exp(-x^2/2 + \lambda x^\beta),$$

то м. н.

$$\limsup_{n\to\infty} (z_n - b_n) b_n^{1-\beta} \leq \lambda. \tag{25}$$

ii) *Якщо* $F(x)$ *неперервна функція і для* $x \geq x_0$

$$1 - F(x) \geq C \exp(-x^2/2 + \lambda x^\beta),$$

то м. н.

$$\liminf_{n\to\infty} (z_n - b_n) b_n^{1-\beta} \geq \lambda. \tag{26}$$

Доведення леми 3. i) Позначимо через $\hat{u}_n(t) = b_n + (\lambda + t) b_n^{\beta-1}$. Легко перевірити, що для фіксованого $\varepsilon > 0$

$$|\hat{u}_n(\varepsilon)|^2/2 = \ln(n) + (\lambda+\varepsilon) b_n^\beta + \frac{(\lambda+\varepsilon)^2 b_n^{2(\beta-1)}}{2} = \ln(n) + (\lambda+\varepsilon) b_n^\beta + O(1).$$

Тому

$$1 - F(\hat{u}_n(\varepsilon)) \leq C n^{-1} \exp\left\{-(\lambda+\varepsilon) b_n^\beta + \lambda b_n^\beta \left(1 + O\left(b_n^{\beta-2}\right)\right)^\beta + O(1)\right\} \leq$$

$$\leq C n^{-1} \exp\left\{-\varepsilon b_n^\beta + O(1)\right\}. \tag{27}$$

За допомогою оцінки (27), повторюючи доведення леми 1, одержимо нерівність (25).

ii) Аналогічно (27) отримуємо наступну нерівність

$$1 - F(\hat{u}_n(-\varepsilon)) \geq C n^{-1} \exp\left\{\varepsilon b_n^\beta + O(1)\right\}. \tag{28}$$

Для $\varepsilon > 0$ із оцінки (28) методом, використаним в лемі 2 (див. оцінки (18) – (24)), виводимо

$$P(z_n \leq \hat{u}_n(-\varepsilon) \text{ н. ч. р.}) = 0.$$

Ця рівність означає, що для $\varepsilon > 0$ м. н.

$$\liminf_{n\to\infty} (z_n - b_n) b_n^{1-\beta} \geq \lambda - \varepsilon. \tag{29}$$

Внаслідок довільності $\varepsilon > 0$ (29) $\Rightarrow$ (26).

***Доведення теореми* 1.** Покладемо

$$A_n = \left\{ \left\| \max_{1\leq k\leq n} X_k(t) \right\| \geq u_n \right\},$$

$$A_n' = \left\{ \sup_{t\in[0,1]} \max_{1\leq k\leq n} X_k(t) \geq u_n \right\},$$

$$A_n'' = \{ \| X_1(t) \| \geq u_n \},$$

де u_n — числова послідовність, $u_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Легко бачити, що

$$A'_n \subset A_n \subset A'_n \cup A''_n. \tag{30}$$

В. е. $X \in C[0, 1]$, тому очевидна рівність

$$P(A''_n \text{ н. ч. р}) = 0. \tag{31}$$

Далі, враховуючи співвідношення (30), (31), одержуємо

$$P(A_n \text{н. ч. р}) = P(A'_n \text{ н. ч. р}) = P\left\{ \max_{1 \le k \le n} \sup_{t \in [0,1]} X_k(t) \ge u_n \text{ н. ч. р.} \right\}. \tag{32}$$

Через Ω позначимо простір елементарних подій. Тоді, переходячи до протилежних подій

$$B_n = \Omega \setminus A_n, \quad B'_n = \Omega \setminus A'_n, \quad B''_n = \Omega \setminus A''_n,$$

маємо

$$B'_n \supset B_n \supset B'_n \cap B''_n,$$

$$P(\exists\, n_0, \text{ що } \forall\, n \ge n_0 \;\; B''_n) = 1,$$

і відповідно

$$P\left(\left\| \max_{1 \le k \le n} X_k(t) \right\| \le u_n \;\text{ н. ч. р.} \right) =$$

$$= P(B_n \text{ н. ч. р}) = P(B'_n \text{ н. ч. р}) =$$

$$= P\left(\max_{1 \le k \le n} \sup_{t \in [0,1]} X_k(t) \le u_n \text{ н. ч. р.} \right). \tag{33}$$

Без обмеження загальності при доведенні теорем 1 – 4 будемо вважати, що $\| \sigma(t) \| = 1$. Нехай $\xi = \sup_{t \in [0,1]} X(t)$, $G(x) = P(\xi < x)$. Тоді в наших умовах виконується асимптотична рівність [7, с. 118]:

$$\ln(1 - G(x)) = -x^2/2 + o(x) \qquad \text{при } x \to \infty.$$

Звідси для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$, $x > 0$ існує $C > 0$ таке, що

$$1 - G(x) = \exp\left(-x^2/2 + o(x)\right) \le C \exp\left(-x^2/2 + \varepsilon x\right).$$

Остання нерівність дозволяє застосувати оцінку (25) леми 3 при $\beta = 1$, $\lambda = \varepsilon$: м. н.

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\max_{1 \le k \le n} \sup_{t \in [0,1]} X_k(t) - b_n \right) \le \varepsilon. \tag{34}$$

Число $\varepsilon > 0$ довільне, тому із співвідношень (32) та (34) випливає нерівність: м. н.

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\| Z_n \| - b_n \right) \le 0. \tag{35}$$

Функція $\sigma(t)$ неперервна. Отже, існує точка $t_0 \in [0, 1]$ така, що $\sigma(t_0) = \| \sigma \| = 1$. Тоді згідно з рівністю (1) м. н.

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\max_{1\le k\le n}\ \sup_{t\in[0,1]} X_k(t)-b_n\right)d_n^{-1} \ge$$

$$\ge \liminf_{n\to\infty}\left(\max_{1\le k\le n} X_k(t_0)-b_n\right)d_n^{-1} \ge -1/2. \qquad (36)$$

Оскільки $d_n\to\infty$ при $n\to\infty$, то, враховуючи (33), (36), маємо: м. н.

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\| Z_n \| - b_n\right) \ge 0. \qquad (37)$$

Із нерівностей (35), (37) випливає рівність (3).

Доведення теореми 2. У роботі [9] із нерівності (4) виводиться наступна оцінка

$$P\left(\sup_{t\in[0,1]} X(t)>x\right) \le C x^{\beta}\exp(-x^2/2), \qquad (38)$$

де $\beta=\beta(C_1,\alpha)$, $\|\sigma\|=1$.

Стандартна асимптотична оцінка для нормального розподілу

$$1-\Phi(x) \sim (2\pi)^{-1/2}x^{-1}\exp(-x^2/2),$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy, \quad \varphi(y) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2),$$

показує, що в нерівності (38) $\beta\ge -1$.

Рівність (32) та нерівність (38) за лемою 1 (оцінка (11)) дають: м. н.

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|Z_n\|-b_n}{d_n} \le \beta/2+1. \qquad (39)$$

Оцінку знизу одержуємо із (33) та (36): м. н.

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\|Z_n\|-b_n}{d_n} \ge -1/2. \qquad (40)$$

Нерівність (5) — прамий наслідок (39), (40).

Доведення теореми 3. При виконанні умов (6), (7) функція

$$G(x) = P\left(\sup_{t\in[0,1]} X(t)<x\right)$$

буде неперервною [10] і має місце асимптотичне співвідношення [6, c. 274]

$$1-G(x) \sim C x^{(-1+2/\alpha)}\exp(-x^2/2).$$

Для одержання рівностей (8), (9) залишається застосувати леми 1, 2 (рівності (10), (15)) та (32), (33).

Доведення теореми 4. Як і в теоремі 3 функція розподілу в. в. $\sup\limits_{t\in[0,1]} X(t)$ неперервна [10] і для досить великих x

$$C_3\exp\left(-x^2/2+\lambda_1 x^{\frac{2}{\alpha+1}}\right) \le P\left(\sup_{t\in[0,1]} X(t)>x\right) \le C_4\exp\left(-x^2/2+\lambda_2 x^{\frac{2}{\alpha+1}}\right),$$

де $\lambda_1 = \lambda_1(C_1, C_2, \alpha)$, $\lambda_2 = \lambda_2(C_1, C_2, \alpha)$, C_1, C_2 — константи в умові теореми 4 [7, с. 145, 156].

Звідси, рівностей (32), (33) та оцінок (25), (26) леми 3 одержуємо твердження теореми 4.

Наслідок випливає із міркувань, наведених у доведенні теореми 1.

Зауваження. У роботі [11] побудований приклад нормально розподіленого випадкового процесу $X(t)$, $t \in [0, 1]$, для якого $MX = 0$, $\|\sigma\| = 1$, $P(\|X\| < < \infty) = 1$ і

$$M \exp\left(\|X\|^2/2 - (1+\varepsilon)\|X\|\right) = \begin{cases} +\infty, & \varepsilon = 0, \\ <\infty, & \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Звичайно $X(t) \notin C[0, 1]$. Для обмеженого нормального процесу $X(t)$ існує [7, с. 113] число d таке, що

$$\lim_{r \to \infty} r^{-1}\left(\ln P(\|X\| > r) + (r+d)^2/2\right) = 0.$$

Із двох останніх рівностей випливає $d = -1$ і

$$\lim_{r \to \infty} r^{-1}\left(\ln P(\|X\| - 1 > r) + r^2/2\right) = 0.$$

Аналогічно доведенню теореми 1 звідси можна отримати

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\|Z_n\| - b_n\right) = 1,$$

Таким чином, для процесу $X(t)$ не виконується рівність (3).

1. *Pickands J.* An iterated logarithm law for the maximum in a stationary Gaussian sequence // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1969. – **12**, № 3. – P. 344 – 355.
2. *Hebbar H. V.* Almost sure limit points of maximum of stationary Gaussian sequences // Ann. Probab. – 1980. – **8**, № 2. – P. 393 – 399.
3. *Мацак І. К.* Гранична теорема для максимуму гаусівських випадкових величин у просторі C // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 7. – С. 1006 – 1008.
4. *Мацак І. К.* Про граничні точки послідовності екстремальних значень нормальних випадкових елементів у банахових просторах з безумовним базисом // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1996. – Вип. 55. – С. 136 – 143.
5. *Галамбош Я.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. – М.: Наука, 1984. – 304 с.
6. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. – М.: Мир, 1989. – 392 с.
7. *Лифшиц М. А.* Гауссовские случайные функции. – Киев: ТВіМС, 1995. – 246 с.
8. *Галамбош Я.* О развитии математической теории экстремумов за последние полвека // Теория вероятностей и ее примен. – 1994. – **39**, № 2. – С. 272 – 293.
9. *Дмитровский В. А.* Оценки распределения максимума гауссовского поля // Случайные процессы и поля. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. – С. 22 – 31.
10. *Ylvisaker D.* A note of the absense of tangencies in Gaussion sample paths // Ann. Math. Statist. – 1968. – **39**. – P. 261 – 262.
11. *Talagrand M.* Sur l'integrabilite' des vecteur gaussiens // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1984. – **68**, № 1. – P. 1 – 8.

Одержано 17.05.96