УДК 519.6

В. Л. Мельник (Чернігів. пед. ін-т)

ТОПОЛОГІЧНА КЛАСИФІКАЦІЯ $(n-1)$-ОПУКЛИХ МНОЖИН

The properties of $(n-1)$-convex sets associated with properties of a conjugate set are investigated. The complete topological classification of $(n-1)$-convex sets is given.

Досліджуються властивості $(n-1)$-опуклих множин, які пов'язані з властивостями спряженої множини. Дається повна топологічна класифікація $(n-1)$-опуклих множин.

$(n-1)$-опуклі множини утворюють один з класів узагальнено опуклих множин. Дослідження властивостей узагальнено опуклих множин спирається на двоїстість між точками та гіперплощинами. Основою теорії двоїстості опуклих множин є полярна відповідність для опуклих конусів, що розповсюджуються до полярної відповідності між довільними множинами, які містять початок координат. З поняттям полярних множин тісно пов'язане поняття спряженої множини.

Метою даної роботи є продовження дослідження властивостей $(n-1)$-опуклих множин, які проводили Ю. Б. Зелінський [1] та О. І. Герасін [2].

Основним результатом роботи є повна топологічна класифікація $(n-1)$-опуклих множин з гладкою межею.

Задачі, пов'язані з вивченням $(n-1)$-опуклих множин, розглядаємо в просторі $\mathbb{R}^n$ — векторному просторі n-вимірних векторів

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Скалярний добуток двох векторів x^* і x задається формулою

$$\langle x, x^* \rangle = x_1 x_1^* + x_2 x_2^* + \ldots + x_n x_n^* .$$

Сукупність точок вигляду $(1-\lambda)x + \lambda y = x + \lambda(y-x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, будемо називати *прямою*, яка проходить через дві різні точки x і y в $\mathbb{R}^n$.

Вимірність порожньої множини вважається рівною -1. Афінні множини вимірностей 0, 1, 2 називаються відповідно *точками*, *прямими*, *площинами*. Афінна множина вимірності $n-1$ називається *гіперплощиною*.

Означення 1. *Підмножина C в $\mathbb{R}^n$ називається опуклою, якщо $(1-\lambda)x + \lambda y \subset C$ для довільних $x \in C$, $y \in C$, $0 < \lambda < 1$.*

Означення 2. *Множина $\tilde{E}$ називається спряженою до множини $E \subset \mathbb{R}^n$, якщо $\tilde{E} = \{ y | \langle x, y \rangle \neq 1, \ \forall x \in E \}$.*

Означення 3. *Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається $(n-1)$-опуклою, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ існує гіперплощина L, яка переходить через точку x, але не перетинає E, $L \bigcap E = \varnothing$.*

Якщо кожній точці $y_0 \neq \Theta$, де $\Theta = (0, 0, \ldots, 0, 0)$ — початок координат, поставимо у відповідність гіперплощину $\{ x | \langle x, y_0 \rangle = 1 \}$, то спряжену множину $\tilde{E}$ для множини E, яка містить початок координат, можна інтерпретувати як множину гіперплощин, що не перетинають множину E.

Означення 4. *Опукла множина K називається опуклим конусом, якщо з того, що $x \in K$, $\lambda > 0$ випливає $\lambda x \in K$.*

Означення 5. *Множина векторів $\tilde{x} \in \tilde{X}$ таких, що $\langle x, \tilde{x} \rangle \geq 0$ для всіх $x \in K$, називається конусом, спряженим до конуса K і позначається $\tilde{K}$.*

© В. Л. МЕЛЬНИК, 1998

Означення 6. *Множина всіх векторів, яка задовольняє співвідношення* $x + \lambda y \subset C$ *для довільних* $\lambda \geq 0$, $x \in C$ *з приєднаним до нього початком координат, називається рецесивним конусом множини* C *і позначається* $0^+ C$.

Властивість 1. *Якщо* $E_1 \subset E_2$, *то* $\tilde{E}_2 \subset \tilde{E}_1$.

Доведення. За означенням спряженої множини

$$\tilde{E}_2 = \{ y | \langle x, y \rangle \neq 1, \ \forall x \in E_2 \}.$$

Нехай $y \in \tilde{E}_2$. Оскільки $E_1 \subset E_2$, то $\langle x, y \rangle \neq 1$ справджується і для всіх $x \in E_1$, звідки одержимо, що $y \in \tilde{E}_1$, а також $\tilde{E}_2 \subset \tilde{E}_1$.

Властивість 2. *Для відкритої кулі* $I_r = \left\{ x | \langle x, x \rangle < r^2 \right\}$ *спряженою множиною є замкнена куля* $\tilde{I}_r = \bar{I}_{1/r} = \left\{ x | \langle x, x \rangle \leq \frac{1}{r^2} \right\}$.

Доведення відразу випливає з нерівності Коші – Буняковського $\langle x, y \rangle \leq |x||y|$. Нехай $x \in I_r$, $y \in I_{1/r}$, тоді $\langle x, y \rangle \leq |x||y| < r\frac{1}{r} = 1$.

З іншого боку, якщо $y \notin \bar{I}_{1/r}$, то для точки $x = \frac{y}{|y|^2}$ маємо $\langle x, y \rangle = \left\langle \frac{y}{|y|^2}, y \right\rangle = 1$. Очевидно, що $\langle x, x \rangle = \left\langle \frac{y}{|y|^2}, \frac{y}{|y|^2} \right\rangle = \frac{1}{|y|^2} < r^2$, тобто $x \in I_r$.

Властивість 3. 1. *Якщо* $E \ni \Theta$ *— відкрита множина, то* $\tilde{E}$ *— компакт.*
2. *Якщо* E *— компакт, то* $\tilde{E}$ *— відкрита множина.*

Доведення. 1. Нехай E — відкрита множина. Перш ніж встановити, що $\tilde{E}$ — компакт, покажемо, що $\tilde{E}$ — замкнена множина.

Нехай $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus E$. Існує як завгодно малий окіл U_0 точки x_0 такий, що площина $\langle x, y \rangle = 1$ буде перетинати E $\forall x \in U_0$. Маємо $U_0 \subset \mathbb{R}^n \setminus \tilde{E}$, звідки випливає, що доповнення $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{E}$ — відкрита множина, а це в свою чергу доводить замкненість $\tilde{E}$. Залишилось показати, що $\tilde{E}$ — компакт. Дійсно, оскільки E відкрита і містить початок координат існує куля радіуса r така, що $I_r \subset E$. Тоді згідно з другою властивістю $\tilde{E} \subset \bar{I}_{1/r}$, що доводить компактність замкненої множини $\tilde{E}$.

2. Спряжену множину $\tilde{E}$ можемо подати у вигляді $\tilde{E} = \mathbb{R}^n \setminus \Phi(E)$, де $\Phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathring{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup (\infty)$,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \{ y | \langle x, y \rangle = 1 \} \cup (\infty), & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$

Згідно з умовою E — компакт, тому з цього і неперервності Φ випливає, що $\Phi(E)$ — компакт. Тоді $\tilde{E} = \mathbb{R}^n \setminus \Phi(E)$ — відкрита множина, що і треба було довести.

Теорема 1. *Для непорожньої множини* $E \subset \mathbb{R}^n$, *яка містить початок координат,* $E = \tilde{\tilde{E}}$ *тоді і тільки тоді, коли* E *—* $(n-1)$*-опукла множина.*

Доведення. I. Нехай множина E — $(n-1)$-опукла. Впевнимось, що має місце рівність $E = \tilde{\tilde{E}}$. Для цього потрібно показати справджуваність включень $E \subset \tilde{\tilde{E}}$ і $\tilde{\tilde{E}} \subset E$:

а) нехай $y \in E$. За означенням спряженої множини $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \neq 1$ для всіх $x \in \tilde{E}$, тому $y \in \tilde{\tilde{E}}$. Звідки $E \subset \tilde{\tilde{E}}$.

б) доведемо правильність включення $\tilde{\tilde{E}} \subset E$. Для цього спочатку покажемо, що $\mathbb{R}^n \setminus E \subset \mathbb{R}^n \setminus \tilde{\tilde{E}}$.

Нехай $y \in \mathbb{R}^n \setminus E$. Це означає, що $y \notin E$. Тоді існує гіперплощина, яка проходить через y і не перетинає E (з умови $(n-1)$-опуклості множини E). Ця гіперплощина не містить початок координат, оскільки, згідно з умовою, $\Theta \in E$. Звідси випливає, що рівняння гіперплощини можна записати у вигляді $\langle y_0, x\rangle = 1$, $y_0 \in \tilde{E}$. Тоді $\langle y_0, x\rangle \neq 1$ для всіх $x \in E$, $y_0 \in \tilde{E}$, звідки $y \notin \tilde{\tilde{E}}$, тому що $\langle y_0, y\rangle = \langle y, y_0\rangle = 1$ для $y_0 \in \tilde{\tilde{E}}$. З того, що $y \notin \tilde{\tilde{E}}$, маємо $y \in \mathbb{R}^n \setminus \tilde{\tilde{E}}$.

Таким чином, одержимо включення $\mathbb{R}^n \setminus E \subset \mathbb{R}^n \setminus \tilde{\tilde{E}}$. А це означає, що $\tilde{\tilde{E}} \subset E$. З а) і б) випливає шукана рівність $E = \tilde{\tilde{E}}$.

II. Нехай $E = \tilde{\tilde{E}}$. Покажемо, що множина E — $(n-1)$-опукла, тобто через довільну точку доповнення множини E до $\mathbb{R}^n$ можна провести гіперплощину таку, що не перетинає E.

Нехай $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus E$, тоді $y_0 \notin E$, а це означає, що $y_0 \notin \tilde{\tilde{E}}$. Звідси одержимо існування $x_0 \in \tilde{E}$ такого, що $\langle x_0, y_0\rangle = 1$. Площина $\langle y, x_0\rangle = 1$ проходить через точку y_0, але множину E не перетинає ($y \notin E$, $y \notin \tilde{\tilde{E}}$, $x_0 \in \tilde{E}$, тому жодна точка площини не належить множині $\tilde{\tilde{E}}$). Теорему доведено.

Властивість 4. *Для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ кожна зв'язна компонента спряженої множини $\tilde{E}$ є опуклою множиною.*

Доведення. Згідно з теоремою 1 $\tilde{E}$ — $(n-1)$-опукла множина.

Покажемо, що кожна зв'язна компонента множини $\tilde{E}$ — опукла. Припустимо, що це не так і нехай $E' \subset \tilde{E}$ — неопукла компонента. Тоді існує пара точок $x^1 \in E'$, $x^2 \in E'$ така, що відрізок $[x^1, x^2] \not\subset E'$. Внаслідок $(n-1)$-опуклості множини E' існує гіперплощина $L \ni x_0$, $L \cap E' \subset L \cap E = \varnothing$. Але гіперплощина L розбиває простір $\mathbb{R}^n$ на два півпростори і звідси маємо, що не існує в E' зв'язної підмножини, яка містить пару точок x^1, x^2, що суперечить зв'язності множини E'.

Цим доведено опуклість кожної зв'язної компоненти спряженої множини $\tilde{E}$.

Властивіть 5. *Якщо $E \ni \Theta$ — обмежена відкрита множина, то точка x_0 належить межі $\partial\tilde{E}$ компакту $\tilde{E}$ тоді і тільки тоді, коли гіперплощина $L = \{ y \mid \langle x_0, y\rangle = 1\}$ проходить через точку межі ∂E, але не перетинає E.*

Доведення. I. Нехай $L \cap E = \varnothing$, але $L \cap \partial E \ni y_0$, $\langle x_0, y_0\rangle = 1$. Необхідно показати, що $x_0 \in \partial\tilde{E}$. Очевидно, що $x_0 \in \tilde{E}$. Якщо $x_0 \in \operatorname{Int}\tilde{E}$, то $x_0 \in \tilde{E}$ разом зі своїм деяким околом U_0. Отже, гіперплощина вигляду $\langle x, y\rangle = 1$ для довільного $x \in U_0$ не перетинає множину E, що суперечить тому, що переріз $L \cap \partial E$ непорожній. Із одержаної суперечності випливає належність точки x_0 межі $\partial\tilde{E}$.

II. Нехай $x_0 \in \partial\tilde{E}$. Отже, $x_0 \in E$, $L \cap E = \varnothing$, де $L = \{ y | \langle x_0, y \rangle = 1 \}$. Покажемо, що L проходить через деяку точку межі ∂E множини E. Якщо L не перетинає замкненої області $\overline{E}$, то x_0 належить відкритій множині $\tilde{\tilde{E}} \subset \subset \tilde{E}$, і тому не лежить на межі $\partial\tilde{E}$, що суперечить умові. Отже, L не перетинає E, але перетинає $\overline{E}$, звідси L проходить через деяку точку межі ∂E. Властивість доведено.

Лема 1. *Якщо E — $(n-1)$-опукла множина, то* $\operatorname{Int} E$ *також $(n-1)$-опукла.*

Доведення. Не порушуючи загальності, припустимо, що $\Theta \in \operatorname{Int} E$. Оскільки E — $(n-1)$-опукла множина, для довільної точки, що належить $\mathbb{R}^n \setminus E$, існує гіперплощина, яка проходить через цю точку, але не перетинає E. Залишилось показати, що це виконується для довільної точки $x_0 \in \partial E$, тобто $\exists L$, $x_0 \in L$, $L \cap \operatorname{Int} E = \varnothing$.

Виберемо в $\mathbb{R}^n \setminus E$ деяку послідовність точок $\{ x_k \}$ таку, що $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x_0$. Для кожної точки x_k існує гіперплощина $L_k = \{ x | \langle y_k, x_k \rangle = 1 \}$, де $y_k \subset \subset \tilde{E} \subset \operatorname{Int} E$ така, що L_k проходить через точку x_k і не перетинає E. Одержимо послідовність точок $\{ y_k \}$. Оскільки $\operatorname{Int} E$ відкрита і $\Theta \in \operatorname{Int} E$, то згідно з властивістю 3 спряжена з нею множина $\operatorname{Int} E$ — компакт. Тому зі збіжної послідовності $\{ y_k \}$ виберемо збіжну до y_0 підпослідовність $\{ y_{k_\nu} \} \to y_0$, $y_0 \in \operatorname{Int} E$. Тоді гіперплощина $L = \{ x | \langle y_0, x \rangle = 1 \}$ не перетинає $\operatorname{Int} E$ і проходить через точку x_0, тому що $\langle y_0, x_0 \rangle = \lim\limits_{k \to \infty} \langle y_k, x_k \rangle = 1$.

Таким чином, $\operatorname{Int} E$ — $(n-1)$-опукла множина, що і треба було довести.

Відмітимо одну властивість $(n-1)$-опуклих множин, яка у випадку опуклості виконується тільки для замкнених множин.

Теорема 2. *Будь-яка $(n-1)$-опукла множина $E \subset \mathbb{R}^n$, що містить хоча б одну пряму, є циліндром з твірними у вигляді паралельних один одному m-вимірних $(1 \le m \le n)$ афінних підпросторів і не більше, ніж $(n-m)$-вимірною та $(n-m-1)$-опуклою основою Q, яка вже не містить жодної прямої.*

Доведення. Неважко впевнитись, що множина E разом з прямою l і точкою x неодмінно містить пряму $l_x \| l$, яка проходить через x. Всі прямі, що проходять через x і лежать в E, заповнюють m-вимірну твірну B_x множини E, $1 \le m \le n$. Тому E повинно бути циліндром з паралельними B_x твірними і основою $Q = E \times \mathbb{R}^{n-m}$, де $\mathbb{R}^{n-m}$ — підпростір, що доповнює B_x до $\mathbb{R}^n$. Теорему доведено.

Перейдемо до доведення основного результату, який дає повну топологічну класифікацію $(n-1)$-опуклих множин.

Нагадаємо, що множина E має k-гладку межу, якщо в околі будь-якої точки $z_0 \in \partial D$, ∂D задається рівнянням $f(z, \bar{z}) = 0$, де f — дійсна, k раз неперервно диференційовна функція, $\operatorname{grad} f \neq 0$ в околі цієї точки.

Теорема 3. $(n-1)$*-опукла множина $E \subset \mathbb{R}^n$ з гладкою межею є*: 1) *опуклою множиною, або* 2) *подається декартовим добутком $E = E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, або* 3) *складається не більше як з двох необмежених компонент.*

***Зауваження* 1.** Класи 1 – 3 не є взаємно виключними. Множина може належати двом і навіть трьом класам.

Доведення. Нехай E — $(n-1)$-опукла множина з гладкою межею, $E \subset \subset \mathbb{R}^n$. Розглянемо наступні випадки:

1) E — зв'язна множина, 2) $\mathbb{R}^n \setminus E$ — незв'язна множина, 3) $\mathbb{R}^n \setminus E$ — зв'язна множина.

1. Нехай E — зв'язна множина. Покажемо, що E — опукла.

Припустимо обернене, що E — неопукла множина. Тоді існують дві точки x_1 і x_2 множини E такі, що відрізок, який їх з'єднує, не повністю належить E. Виберемо точку $x_0 \in [x_1, x_2]$, $x_0 \notin E$. Внаслідок $(n-1)$-опуклості множини E існує гіперплощина L, яка проходить через точку x_0, але не перетинає E: $L \cap E = \varnothing$. Маємо, що L розбиває простір на два півпростори $E_1 \cup E_2$, які містять точки x_1 і x_2, $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, що суперечить зв'язності E.

Таким чином, одержана суперечність доводить перший випадок.

2. Нехай доповнення $\mathbb{R}^n \setminus E$ — незв'язне, тоді $E = E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, де E^1 — основа.

Виберемо дві довільні точки z_1 і z_2, які належать різним компонентам множини $\mathbb{R}^n \setminus E$. Очевидно, існують в $\mathbb{R}^n \setminus E$ гіперплощини $L(z_1)$ і $L(z_2)$, які містять точки z_1 і z_2 відповідно і такі, що не перетинаються. Тому вони паралельні між собою внаслідок довільності вибору точок z_1 та z_2, і довільна гіперплощина, яка не перетинає E, паралельна гіперплощинам $L(z_1)$ і $L(z_2)$.

З цього видно, що якщо $z \in E$, то всі точки гіперплощини $L(z)$, яка проходить через z і паралельна $L(z)$, належать множині E.

Множина таких гіперплощин, які задані деякою точкою, що належить E, заповнюють $(n-1)$-вимірну твірну B_z множини E. Тому E повинно бути циліндром з паралельними B_z твірними і основою E^1: $E = E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$.

3. Якщо доповнення $\mathbb{R}^n \setminus E$ зв'язне, то можна вважати, що E може бути незв'язне, інакше одержимо перший випадок.

Нехай спочатку E — відкрита множина. Покажемо, що незв'язна множина E складається з двох необмежених компонент.

А. Нехай множина E містить хоча б одну обмежену компоненту $E_1 \subset E$. Виберемо довільну точку $x \in \mathbb{R}^n \setminus E_1$ і розглянемо множину гіперплощин, які проходять через цю точку. Це проективний простір $\mathbb{R}P^{n-1}$, який складається з двох множин $M_1 \cup M_2$, де M_1 — множина гіперплощин, які перетинають множину E_1; M_2 — множина гіперплощин, які не перетинають E_1.

Легко бачити, що обидві множини M_1 і M_2 — непорожні. M_1 — внаслідок непорожності E_1, а M_2 — внаслідок опуклості E_1, що легко показати аналогічно першому пункту. Очевидно, що довільній точці з $M = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2$ відповідає гіперплощина, дотична до E_1. З умови гладкості межі ∂E випливає єдиність дотичної гіперплощини в кожній точці дотику. На підставі довільності вибору точки x, через кожну точку $x \notin E_1$ проходить гіперплощина, яка не перетинає множину E, а з цього випливає, що $x \notin E$. Цим встановлюється можливість існування другої компоненти. Отже, якщо множина E містить обмежену компоненту, то вона зв'язна.

Покажемо, що необмежених компонент може бути не більше двох. Доведення проведемо спочатку для $E \in \mathbb{R}^2$. Розглянемо наступні можливі випадки розташування f.

Нехай $E_1 \subset E$ — зв'язна компонента. Можна припустити, що E_1 не містить прямих, інакше, аналогічно пункту 2, одержимо, що $E = E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$. Внаслідок необмеженості опуклої відкритої множини E_1 для неї існує рецесивний напрямок. Нехай промінь $Ol \in E_1$. Приймемо точку O за початок координат, а направлення променя Ol за додатний напрямок осі ординат. Вісь абсцис виберемо перпендикулярно до Ol. Тоді $\overline{E}_1$ буде надграфіком опуклої функції f, яка задається межею ∂E_1.

Б. Нехай графік функції f не має асимптот. В такому випадку $E = E_1$. Покажемо це. Виберемо деяку довільну точку $x \in \mathbb{R}^2 \backslash E_1$. Через точку x проходить множина прямих, яка утворює коло S^1. Множина S^1 складається з двох непорожніх підмножин M_1 і M_2 (M_1 — множина прямих, які перетинають E_1, а M_2 — множина прямих, які не перетинають E_1).

Внаслідок того, що f не має асимптот, довільній точці α з $M = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2$ відповідає пряма, дотична до E_1 і така, що містить точку x. З умови гладкості межі ∂E випливає єдиність дотичної в кожній точці дотику. На підставі довільності вибору точки x маємо, як і в пункті А, що через кожну точку $x \notin$ $\notin E_1$ проходить пряма, яка не перетинає множину E. Отже, $x \notin E$ і $E = E_1$.

Легко уточнити, що для точок $x \notin \overline{E}_1$ таких прямих буде дві. Дійсно, кожній прямій з M_1 поставимо у відповідність першу точку її перетину з ∂E_1. Позначимо множину таких точок A. Тоді множина точок $B = \partial E_1 \backslash A$ має межовими з множиною A деякі точки α і β: $\overline{A} \cap \overline{B} = \{\alpha, \beta\}$. Очевидно вони являються точками дотику. Оскільки такі точки існують, то внаслідок гладкості існують і єдині прямі, дотичні до E_1 в точках α і β, які проходять через точку $x \in \mathbb{R}^2 \backslash E_1$.

В. Нехай функція f має одну асимптоту l. Покажемо, що в даному випадку також $E = E_1$. Асимптота l розбиває площину на дві півплощини: C — замкнена півплощина, яка не перетинається з E_1, і півплощина C_1, яка складається з двох підмножин E_1 і D, $E_1 \cap D = \emptyset$, $E_1 \cup D = C_1$. Легко бачити, що $\mathbb{R}^2 \backslash E_1 = C \cup D$. Покажемо, що ні C, ні D не можуть містити точки, які належать E.

Як і в пункті Б, для довільної точки $x \in C \cup D$ розглянемо множини M_1 і M_2 прямих, які відповідно перетинають і не перетинають E_1. Межовим точкам $\alpha \subset M = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2$ будуть відповідати прямі, дотичні до E_1, або паралельні асимптоті l_1. Очевидно, що точкам x, які лежать в C, відповідають два значення M: одне задає дотичну до E_1, друге — лінію, паралельну асимптоті, а точкам $x \in D \setminus \overline{E}_1$ — обидва значення M задають дотичні до E_1. Як і в пункті Б, єдиність дотичних в точках дотику доводить спочатку, що $x \notin E$, і звідси випливає, що $E = E_1$.

Нехай функція f має дві асимптоти. Можливі два випадки.

Г. Обидві асимптоти паралельні ($l_1 \parallel l_2$). Нехай l_1 і l_2 розбивають $\mathbb{R}^2 \backslash E_1$ на три підмножини, які попарно не перетинаються $\mathbb{R}^2 \backslash E_1 = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, причому C_1 і C_3 — замкнені півплощини, що не містять E_1. Покажемо, що ні в одній з множин C_1, C_2 і C_3 не може бути точок множини E.

Повторюючи міркування, викладені в пункті В, встановимо, що через довільну точку $x \in C_1 \cup C_2$ можна провести єдину дотичну до E_1 і що існує пряма $t \parallel l_1 \parallel l_2$. Для точок $x \in C_2 \setminus \overline{E}_1$ існують дві дотичні до E_1. Це означає, що в даному випадку попередні міркування приводять до висновку, що $E = E_1$.

Д. Нехай функція f має дві непаралельні асимптоти l_1 та l_2. Прямі l_1 і l_2, перетинаючись в деякій точці A, розділяють площину $\mathbb{R}^2$ на чотири підмножини C_i, $i = 1, 2, 3, 4$, одна з яких містить E_1, $E_1 \subset C_4$. Для точок з множин C_1, C_3, C_4, повторюючи міркування пункту Г, одержимо, що їхні точки не можуть належати множині E. Залишаються точки замкненого кута C_2. Природно, що точки межі C_2 не можуть належати множині E внаслідок її відкритості.

***Зауваження* 2.** В пунктах Б і Д ми не розглядали точок межі ∂E_1. Але очевидно, що вони не можуть належати відкритій множині E, тому що E_1 — її відкрита компонента.

Проведемо через $x_2 \in \operatorname{Int} C_2$ дві прямі, паралельні асимптотам $t_2 \parallel l_2$, $t_2' \parallel l_1$. Легко бачити, що ці дві прямі відповідають двом межовим точкам множини M, яка вводиться як і в пункті Б. Дотичних же з точки x_2 до E_1 внаслідок того, що l_1 і l_2 — асимптоти, провести неможливо. Отже, C_2 може містити точки множини E. Покажемо, що її границя ∂E_2 задає функцію g, графік якої має дві асимптоти, паралельні асимптотам l_1 і $l_2 : l_1 \parallel l_1'$, $l_2 \parallel l_2'$.

Повторюючи відносно g всі попередні викладки, одержимо, що функція g обов'язково має дві непаралельні асимптоти l_1' і l_2', крім цього, E_1 і E_2 повинні лежати в парі вертикальних кутів, на які ці асимптоти поділяють $\mathbb{R}^2$.

Нехай α і β — розхили кутів, між асимптотами l_1, l_2 і l_1', l_2' відповідно. Кут C_2 може містити E_2 тільки тоді, коли $\beta < \alpha$. Таким чином, маємо $\alpha = \beta$. При рівності кутів, очевидно, що E_2 може міститися в C_2 тільки тоді, коли асимптоти функції g паралельні сторонам кута C_2.

У випадку, коли асимптоти l_1 і l_2 проведені до графіка функції, яка задає межу ∂E_1, перетинаються, можливе існування другої компоненти $E_1 \subset E$, $E_1 \bigcup E_2 = E$. При цьому межі цих компонент задаються графіками функцій, які мають паралельні асимптоти.

Е. Перейдемо до вивчення випадку $\mathbb{R}^n$, $n > 2$. Покажемо, що E має не більш ніж дві компоненти. Припустимо обернене. Нехай множина E має три компоненти E_1, E_2 і E_3. Виберемо довільно в кожній з них точки $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2, x_3 \in E_3$. Три точки визначають площину $\mathbb{R}^2$. Переріз $\mathbb{R}^2$ з E дає випадок, коли в $\mathbb{R}^2$ множина E має не менше ніж три компоненти, але раніше для $\mathbb{R}^2$ доведено, що E не може мати більше двох компонент. Одержали суперечність, яка доводить, що у третьому випадку відкрита $(n-1)$-опукла множина $E \subset \mathbb{R}^n$ з гладкою межею складається не більше, ніж з двох необмежених компонент.

Третій випадок вивчався для відкритих множин E. Якщо E — невідкрита множина, то, згідно з лемою 1, можемо вивчати відкриту $(n-1)$-опуклу множину $\operatorname{Int} E$ і одержимо той самий результат. Такі міркування завершують доведення теореми.

Наведемо кілька прикладів стосовно топологічної класифікації $(n-1)$-опуклих множин з гладкою межею.

***Приклад* 1.** Розглянемо множину $E \subset \mathbb{R}^2$, яка складається з двох компонент E_1 і E_2, що задані таким чином:

$$E_1 = \left\{ (x, y) \mid y \geq \frac{1}{y} \text{ при } x > 0 \right\},$$

$$E_2 = \left\{ (x, y) \mid y \leq \frac{1}{y^{2k+1}} \text{ при } x < 0,\ k \geq 1 \right\}.$$

Очевидно, що графіки функцій, які задають межі множин E_1 і E_2, не симетричні. Звідси випливає, що не будуть симетричними і множини E_1 і E_2.

Легко впевнитись, що $E = E_1 \cup E_2$ — 1-опукла множина. Відмітимо, що рецесивні конуси компонент E_1 і E_2, які є відповідно множинами

$$O^*E_1 = \{(x, y) \mid x \leq 0,\ y \geq 0\},$$

$$O^*E_2 = \{(x, y) \mid x \leq 0,\ y \leq 0\},$$

симетричні відносно початку координат.

Приклад 2. Нехай множина $E \subset \mathbb{R}^2$ складається з двох компонент E_1 і E_2, які задані так:

$$E_1 = \left\{(x, y) \mid y \geq \frac{1}{x-a} + b \text{ при } x > 0,\ a > 0, b > 0\right\},$$

$$E_2 = \left\{\begin{matrix} (x, y) \mid y < \sqrt{1-(x+1)^2} - 1 & \text{при } -1 \leq x \leq 0 \\ (x, y) \mid y \leq 0 & \text{при } x \leq -1 \end{matrix}\right\}.$$

Легко бачити, що графіки функцій, які задають межі множин E_1 і E_2, не симетричні. Отже, не будуть симетричними і множини E_1 і E_2. Відмітимо, що E — 1-опукла множина. Як і в попередньому прикладі, рецесивні конуси множин E_1 і E_2 — центрально симетричні:

$$O^*E_1 = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\},$$

$$O^*E_2 = \{(x, y) \mid x \leq 0,\ y \leq 0\}.$$

Розглянуті приклади показують, що $(n-1)$-опукла множина з гладкою межею може бути незв'язною і необмежені компоненти E_1 і E_2 множини E не обов'язково розташовані симетрично, в той час як їхні рецесивні конуси центрально симетричні.

Покажемо, що помічена в прикладах закономірність є правилом, яке випливає з теореми 3.

Наслідок. *Якщо* E — $(n-1)$*-опукла множина, яка має гладку межу* ∂E, *складена з двох необмежених компонент, то рецесивні конуси цих компонент центрально симетричні.*

Доведення. Нехай E_1 і E_2 — компоненти опуклої множини E, яка задовольняє умову. З умови необмеженості $(n-1)$-опуклих множин E_1 і E_2 випливає існування для них рецесивних напрямків, а отже, і рецесивних конусів O^*E_1 і O^*E_2, які являють собою опуклі конуси, що містять початок координат.

Нехай промінь $l_1 \subset O^*E$, $x_1 \in E_1$. Виберемо довільну точку $x_2 \in E_2$. Проведемо двовимірну площину L, яка проходить через пару точок x_1, x_2 і таку, що містить промінь, паралельний l_1. В площині L одержимо 1-опуклу множину з гладкою межею, що складається з двох компонент. Згідно з доведеним вище промінь $-l_1$ буде рецесивним напрямком для множини $E_2 \cap L$, тобто $-l_1 \subset O^*E_2$, що доводить твердження

1. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. – Киев: Наук. думка, 1993. – 263 с.
2. *Герасин А. И.* Об $(n-1)$-выпуклых множествах // Некоторые вопросы анализа и геометрии. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 8–14.

Одержано 05.02.97