УДК 517.5

М. Ю. Савкина (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ОШИБКАМИ В НАБЛЮДАЕМЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

We consider the problem of approximation of a continuous function by generalized polynomial in the case where the values of function at the points of observation are known with random errors. We construct confidence limits with a given significance level for the real values of the function at any point from its domain of definition.

Розглядається проблема апроксимації неперервної функції узагальненим поліномом у випадку, коли значення функції в точках спостереження відомі з випадковими похибками. Побудовано довірчі межі з заданим рівнем значущості для справжніх значень функції у будь-якій точці з області визначення функції.

В этой работе под функциональным банаховым пространством $X[0, 1]$ будем понимать всякое банахово пространство, которое алгебраически и топологически вложено в пространство $C[0, 1]$ с чебышевской нормой [1]. Таким образом, элементами пространства $X[0, 1]$ являются непрерывные функции, причем в этом пространстве определено значение функции $f(t) \in X[0, 1]$ в фиксированной точке $t_0 \in [0, 1]$, которое порождает непрерывный линейный функционал $\mu_{t_0}(f) = f(t_0)$ в пространстве $X[0, 1]$. Действительно, поскольку $X[0, 1] \subset C[0, 1]$, то для сопряженных пространств справедливо противоположное вложение $X^*[0, 1] \supset C^*[0, 1]$, поэтому если $\mu_{t_0}(f) \in C^*[0, 1]$, то $\mu_{t_0}(f) \in X^*[0, 1]$.

Пусть $\mathcal{N}_m$ — m-мерное подпространство банахова пространства $X = X[0, 1]$. Непрерывный линейный оператор A, действующий из X в $\mathcal{N}_m$, сопоставляет каждой функции $f \in X$ обобщенный полином

$$U_m(f, t) = \sum_{k=1}^{m} \mu_k(f)\varphi_k(t),$$

где μ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, — заданные на X непрерывные линейные функционалы, а $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, — некоторый базис подпространства $\mathcal{N}_m$.

Обобщенный полином $U_m(f, t)$ будем рассматривать как приближение функции $f(t)$; в дальнейшем будем опускать термин „обобщенный" и называть $U_m(f, t)$ просто полиномом. Погрешность приближения функции $f(t)$ полиномом $U_m(f, t)$ обозначим

$$R(t) = f(t) - U_m(f, t).$$

В случае, когда приближаемая функция $f(t)$ известна лишь своими значениями в точках τ_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, функционал $\mu_k(f)$ — некоторая линейная комбинация этих значений, а поэтому и функционалов $\mu_{\tau_i}(f)$:

$$\mu_k(f) = \sum_{i=0}^{N} \gamma_{ik} f(\tau_i) = \sum_{i=0}^{N} \gamma_{ik}\, \mu_{\tau_i}(f).$$

Предположим, что в точках $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_N$ вместо истинных значений функции $f(t)$ известны их приближенные значения

$$\tilde{y}_i = f(\tau_i) + \xi_i,\ i = 0, 1, \ldots, N,$$

где $\{\xi_i,\ i = 0, 1, \ldots, N\}$ — последовательность независимых в совокупности случайных величин, распределенных по нормальному закону с параметрами 0 и σ^2.

В этом случае функции $f(t) \in X$ сопоставим полином

$$U_m(\tilde{y}, t) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=0}^{N} \gamma_{ik} \tilde{y}_k \right) \varphi_k(t),$$

который построен по искаженным значениям $\tilde{y}_i$ функции $f(t)$, а погрешность приближения функции $f(t)$ этим полиномом обозначим через $\tilde{R}(t)$:

$$\tilde{R}(t) = f(t) - U_m(\tilde{y}, t).$$

Легко видеть, что функции $U_m(\tilde{y}, t)$ и $\tilde{R}(t)$ будут случайными.

Пусть X_0 — класс функций из пространства $X[0, 1]$, для которого

$$\sup_{f \in X_0} R(t) = \sup_{f \in X_0} |f(t) - U_m(f, t)| = \psi(t) < \infty, \quad t \in [0, 1].$$

Тогда для любой функции $f(t) \in X_0$ можно указать точные границы погрешности в каждой точке t

$$|f(t) - U_m(f, t)| \le \psi(t), \quad 0 \le t \le 1.$$

Если же $f(t)$ аппроксимируется случайным полиномом $U_m(\tilde{y}, t)$, то функция $\tilde{R}(t)$ в каждой фиксированной точке t представляет нормально распределенную случайную величину, которая с ненулевой вероятностью принимает значение, превышающее любое число $C \in R^1$. Поэтому в этом случае можно говорить лишь о построении случайного доверительного интервала для неизвестного значения $f(t)$ с заданным уровнем значимости 2β, т. е. такого интервала $(\tilde{a}, \tilde{b})$ со случайными концами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, который с заданной вероятностью $1 - 2\beta$ содержит значение $f(t)$:

$$\mathbf{p}\left(f(t) \in \left(\tilde{a}, \tilde{b}\right)\right) = 1 - 2\beta.$$

Таким образом, промежуток $(\tilde{a}, \tilde{b})$ является случайным доверительным интервалом для детерминированной (неслучайной) величины $f(t)$. Построим доверительный интервал с центром в точке $U_m(\tilde{y}, t) + R(t)$; в случае симметричных распределений этот интервал будет иметь наименьшую длину среди всех случайных доверительных интервалов $(U_m(\tilde{y}, t) + R(t) + \alpha_1,\ U_m(\tilde{y}, t) + R(t) + \alpha_2)$, $\alpha_2 - \alpha_1 \ge 0$, с заданным доверительным уровнем $1 - 2\beta$, построенных для детерминированной величины $f(t)$ (отметим, что длина случайного доверительного интервала $(U_m(\tilde{y}, t) + R(t) + \alpha_1,\ U_m(\tilde{y}, t) + R(t) + \alpha_2)$ равна $\alpha_2 - \alpha_1$ и поэтому является детерминированной величиной). Другими словами, нужно найти такую функцию $g(t)$, для которой будет иметь место соотношение

$$\mathbf{p}(U_m(\tilde{y}, t) + R(t) - g(t) \le f(t) \le U_m(\tilde{y}, t) + R(t) + g(t)) = 1 - 2\beta, \quad 0 \le t \le 1.$$

Для этого введем в рассмотрение нормированную функцию Лапласа [2]

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-v^2/2} dv$$

и величину t_β — такое значение аргумента z, при котором $\Phi_0(t_\beta) = 0{,}5 - \beta$.

Учитывая, что $U_m(\tilde{y}, t)$ — нормально распределенная случайная величина с параметрами

$$\mathbf{M}\{U_m(\tilde{y}, t)\} = U_m(f, t), \qquad \mathbf{D}\{U_m(\tilde{y}, t)\} = \sigma^2 \sum_{i=0}^{N} \left(\sum_{k=1}^{m} \gamma_{ik} \varphi_k(t) \right)^2,$$

и обозначая

$$\gamma(t) = \left(\sum_{i=0}^{N} \left(\sum_{k=1}^{m} \gamma_{ik} \varphi_k(t) \right)^2 \right)^{1/2},$$

имеем

$$\mathbf{p}(U_m(\tilde{y}, t) + R(t) - g(t) \le f(t) \le U_m(\tilde{y}, t) + R(t) + g(t)) =$$

$$= \mathbf{p}(U_m(f, t) - g(t) \le U_m(\tilde{y}, t) \le U_m(f, t) + g(t)) = 2\Phi_0\left(\frac{g(t)}{\sigma\gamma(t)}\right) = 1 - 2\beta,$$

если $g(t) = t_\beta \sigma\gamma(t)$. Однако в этом случае доверительные границы зависят от функции f.

Докажем, что наименьшим доверительным интервалом, покрывающим значение $f(t)$ с вероятностью не менее $1-2\beta$, где f — любая функция из класса X_0, будет интервал

$$\left(U_m(\tilde{y}, t) - \sup_{f \in X_0} |R(t)| - g(t) + \varepsilon(t),\ U_m(\tilde{y}, t) + \sup_{f \in X_0} |R(t)| + g(t) - \varepsilon(t) \right),$$

где $\varepsilon(t)$ — решение уравнения

$$\Phi_0\left(t_\beta - \frac{\varepsilon(t)}{\sigma\gamma(t)}\right) + \Phi_0\left(t_\beta + \frac{2\psi(t) - \varepsilon(t)}{\sigma\gamma(t)}\right) = 1 - 2\beta. \tag{1}$$

Лемма 1. *Если* $2\beta \le 0{,}5$, *то уравнение* (1) *имеет единственное решение на промежутке* $[0, \min(\psi(t), t_\beta\sigma\gamma(t))]$.

Доказательство. Положим $x = \varepsilon(t)$. Выражение

$$F_1(x) = \Phi_0(t_\beta) - \Phi_0\left(t_\beta - \frac{x}{\sigma\gamma(t)}\right)$$

— строго возрастающая функция от x на промежутке $[0, t_\beta\sigma\gamma(t)]$, причем $F_1(0) = 0$, $F_1(t_\beta\sigma\gamma(t)) = 0{,}5 - \beta$, а

$$F_2(x) = \Phi_0\left(t_\beta + \frac{2\psi(t) - x}{\sigma\gamma(t)}\right) - \Phi_0(t_\beta)$$

будет строго убывающей функцией от x на этом промежутке, причем $F_2(0) = \beta_1$, $0 < \beta_1 < \beta$, $F_2(t_\beta\sigma\gamma(t)) = 0$. Очевидно, что существует единственная точка $x \in [0, t_\beta\sigma\gamma(t)]$, в которой $F_1(x) = F_2(x)$; $\varepsilon(t) = x$ является решением уравнения (1).

Если $\psi(t) < t_\beta\sigma\gamma(t)$, то согласно теореме о среднем [3], имеем

$$F_1(x) = \frac{x}{\sigma\gamma(t)} e^{-\xi_1^2/2}, \qquad \xi_1 \in \left(t_\beta - \frac{x}{\sigma\gamma(t)},\ t_\beta\right);$$

$$F_2(x) = \frac{2\psi(t) - x}{\sigma\gamma(t)} e^{-\xi_2^2/2}, \qquad \xi_2 \in \left(t_\beta,\ t_\beta + \frac{2\psi(t) - x}{\sigma\gamma(t)}\right).$$

Из условия $F_1(x) = F_2(x)$ получаем

$$x = 2\psi(t) \frac{1}{e^{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 + \xi_1)/2} + 1},$$

откуда следует, что $0 < x < \psi(t)$. Лемма 1 доказана.

Обозначим $u_1 = \psi(t)/(\sigma\gamma(t))$, $u_2 = \varepsilon(t)/(\sigma\gamma(t))$; уравнение (1) при фиксированном β задает некоторую неявную функционалную зависимость u_2 от u_1: $u_2 = w_\beta(u_1)$.

Лемма 2. *Функция $u_2 = w_\beta(u_1)$ будет возрастающей функцией от u_1, причем*

$$\lim_{u_1\to\infty} w_\beta(u_1) = c_\beta,$$

где c_β — решение уравнения $\Phi_0(\tau_\beta - c_\beta) = 0{,}5 - 2\beta$.

Доказательство. Рассмотрим $\bar{u}_1 < \bar{\bar{u}}_1$; им соответствуют некоторые $\bar{u}_2 = w_\beta(\bar{u}_1)$ и $\bar{\bar{u}}_2 = w_\beta(\bar{\bar{u}}_1)$. Положим

$$I = \Phi_0(\tau_\beta) - \Phi_0\left(t_\beta - \bar{u}_2\right) = \Phi_0\left(t_\beta + 2\bar{u}_1 - \bar{u}_2\right) - \Phi_0(\tau_\beta).$$

Если, с одной стороны, предположить, что $\bar{u}_2 \ge \bar{\bar{u}}_2$, то $\Phi_0(\tau_\beta) - \Phi_0\left(t_\beta - \bar{\bar{u}}_2\right) \le I$; с другой стороны, $\Phi_0\left(t_\beta + 2\bar{\bar{u}}_1 - \bar{\bar{u}}_2\right) - \Phi_0(\tau_\beta) > I$. Полученное противоречие доказывает, что $w_\beta(u_1)$ — возрастающая функция.

Поскольку $\Phi_0(\tau_\beta) - \Phi_0(\tau_\beta - w(u_1)) \le \beta$ для любого u_1, величина $u_2 = w_\beta(u_1)$ также ограничена, ибо

$$\lim_{u_2\to\infty} (\Phi_0(\tau_\beta) - \Phi_0(\tau_\beta - u_2)) = 1 - \beta,$$

так как функция $u_2 = w_\beta(u_1)$ возрастает и ограничена, существует $\lim_{u_1\to\infty} w_\beta(u_1)$. Обозначим его через c_β. Этот предел можно найти из условия

$$\lim_{u_2\to\infty} (\Phi_0(\tau_\beta) - \Phi_0(\tau_\beta - w_\beta(u_1)) = \beta.$$

Лемма 2 доказана.

Таким образом, значение $\varepsilon(t)$ при фиксированном β можно вычислить по формуле

$$\varepsilon(t) = \sigma\gamma(t)\, w_\beta\left(\frac{\psi(t)}{\sigma\gamma(t)}\right).$$

В таблице приведены значения u_2, вычисленные в зависимости от u_1 при $\beta = 0{,}15$; $\beta = 0{,}05$; $\beta = 0{,}025$; $\beta = 0{,}005$ соответственно.

u_1	$w_{0,15}(u_1)$	$w_{0,05}(u_1)$	$w_{0,025}(u_1)$	$w_{0,005}(u_1)$
0,1	0,095	0,092	0,091	0,088
0,2	0,179	0,168	0,162	0,151
0,3	0,253	0,228	0,216	0,193
0,4	0,316	0,274	0,254	0,219
0,5	0,369	0,307	0,279	0,234
0,6	0,411	0,329	0,295	0,242
0,7	0,444	0,345	0,305	0,246
0,8	0,468	0,353	0,310	0,248
0,9	0,485	0,358	0,313	0,249
1,0	0,495	0,361	0,315	0,250
1,1	0,502	0,363	0,315	0,250
1,2	0,506	0,363	–	–
1,3	0,509	–	–	–
1,4	0,510	–	–	–
1,5	0,511	–	–	–
1,6	0,511	–	–	–

Обозначив $q(t) = \sup\limits_{f \in X_0} |R(t)| + g(t) - \varepsilon(t)$, получим

$$\mathbf{p}(U_m(\tilde{y}, t) - q(t) \le f(t) \le U_m(\tilde{y}, t) + q(t)) = \mathbf{p}(f(t) - q(t) \le U_m(\tilde{y}, t) \le f(t) + q(t)) =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{q(t) + R(t)}{\sigma\gamma(t)}\right) - \Phi_0\left(\frac{R(t) - q(t)}{\sigma\gamma(t)}\right) = \mathcal{F}(R(t)).$$

Функция $\mathcal{F}(R(t))$ принимает наименьшее значение при $R(t) = \sup\limits_{f \in X_0} |R(t)|$. Учитывая вид $q(t)$ и уравнение (1), получаем

$$\inf_{f \in X_0} \mathbf{p}(U_m(\tilde{y}, t) - q(t) \le f(t) \le U_m(\tilde{y}, t) + q(t)) = 1 - 2\beta.$$

Легко видеть, что для любого случайного доверительного интервала $(U_m(\tilde{y}, t) + \alpha_1,\ U_m(\tilde{y}, t) + \alpha_2)$ с длиной, не превышающей $2q(t)$, и отличающегося от интервала $(U_m(\tilde{y}, t) - q(t),\ U_m(\tilde{y}, t) + q(t))$, существует функция $f(t) \in X_0$, для которой в некоторой точке t имеет место неравенство

$$\mathbf{p}(f(t) \in (U_m(\tilde{y}, t) + \alpha_1,\ U_m(\tilde{y}, t) + \alpha_2)) < 1 - 2\beta.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. *Если функция $f(t) \in X_0$, то справедлива следующая вероятностная оценка:*

$$\inf_{f \in X_0} \mathbf{p}\Big(|f(t) - U_m(\tilde{y}, t)| \le \psi(t) + t_\beta \sigma\gamma(t) - \varepsilon(t)\Big) = 1 - 2\beta,$$

причем доверительный интервал $\Big(-\psi(t) - t_\beta\sigma\gamma(t) + \varepsilon(t),\ \psi(t) + t_\beta\sigma\gamma(t) - \varepsilon(t)\Big)$ для случайной погрешности приближения функции $f(t)$ обобщенным полиномом $U_m(\tilde{y}, t)$ имеет наименьшую длину среди всех детерминированных доверительных интервалов с уровнем значимости 2β.

Таким образом, если для приближения функции $f(t)$ из класса X_0 использовать случайный полином $U_m(\tilde{y}, t)$, то в любой точке $t \in [0, 1]$ можно указать случайные доверительные границы, в которых с вероятностью не менее $1 - 2\beta$ лежит неизвестное значение $f(t)$.

Из доказанной теоремы можно получить оценку погрешности приближения функции $f(t)$ обобщенным полиномом $U_m(\tilde{y}, t)$ по чебышевской норме.

Следствие. *В условиях и обозначениях теоремы*

$$\inf_{f \in X_0} \mathbf{p}\left(\| R(t) \|_C \le \sup_{t \in [0, 1]} \Big(\psi(t) + t_\beta\sigma\gamma(t) - \varepsilon(t)\Big)\right) = 1 - 2\beta.$$

Доказательство. Предположим, что функция $\tilde{R}(t)$ достигает своего наибольшего значения в некоторой точке t'; поскольку $\tilde{R}(t)$ — случайная функция, точка t' также будет случайной, но всегда $t' \in [0, 1]$. Согласно теореме

$$\inf_{f \in X_0} \mathbf{p}\Big(\big|\tilde{R}(t')\big| \le \psi(t') + t_\beta\sigma\gamma(t') - \varepsilon(t')\Big) = 1 - 2\beta.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{p}\Big(\big|\tilde{R}(t')\big| \le \psi(t') + t_\beta\sigma\gamma(t') - \varepsilon(t')\Big) \le$$

$$\le \mathbf{p}\left(\big|\tilde{R}(t')\big| \le \sup_{t \in [0, 1]} \Big(\psi(t) + t_\beta\sigma\gamma(t) - \varepsilon(t)\Big)\right).$$

Следовательно,

$$\mathbf{p}\left(\| R(t)\|_C \leq \sup_{t\in[0,1]}\left(\psi(t)+t_\beta\sigma\gamma(t)-\varepsilon(t)\right)\right) \geq 1-2\beta$$

или

$$\inf_{f\in X_0}\mathbf{p}\left(\| R(t)\|_C \leq \sup_{t\in[0,1]}\left(\psi(t)+t_\beta\sigma\gamma(t)-\varepsilon(t)\right)\right) = 1-2\beta.$$

Следствие доказано.

В качестве примера применения этой теоремы рассмотрим случай, когда $X_0 = W_\infty^{r+1}[0, 1]$ — класс 1-периодических функций $f(t) \in \tilde{L}_\infty^{r+1}$, удовлетворяющих условию $\|f^{(r)}\|_\infty \leq 1$; через $\tilde{S}_{2n,r}$ обозначим подпространство 1-периодических сплайнов порядка r дефекта 1, построенных по равномерному разбиению $t_i = i/(2n)$, $i = 0, 1, \ldots, 2n$, отрезка $[0, 1]$. Положим при r нечетном $\tau_i = t_i$, а при r четном $\tau_i = t_i - 1/(4N)$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$. Как известно [4], для любой функции $f(t) \in \tilde{C}[0, 1]$ существует единственный сплайн $\sigma_{2n,r}(f, t) \in \tilde{S}_{2n,r}$, для которого

$$\sigma_{2n,r}(f, \tau_i) = f(\tau_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Будем аппроксимировать функцию $f(t) \in X_0$ интерполяционным сплайном $\sigma_{2n,r}(f, t)$; точные границы погрешности приближения функции $f(t)$ сплайном $\sigma_{2n,r}(f, t)$ в каждой точке $t \neq \tau_k$ даются следующей формулой [4]:

$$\left|f(t)-\sigma_{2n,r}(f, t)\right| \leq \left|\varphi_{2n,r+1}(t)\right|, \qquad 0\leq t\leq 1,$$

где $\varphi_{2n,r+1}(t)$ — эйлеров идеальный сплайн $(r + 1)$-го порядка.

Если в точках $\tau_1, \ldots, \tau_{2n}$ вместо истинных значений функции $f(t)$ известны их искаженные значения $\tilde{y}_i$, $i = 1, \ldots, 2n$, и на основании этих значений построен сплайн $\sigma_{2n,r}(\tilde{y}, t) \in \tilde{S}_{2n,r}$, удовлетворяющий условиям

$$\sigma_{2n,r}(\tilde{y}, \tau_i) = \tilde{y}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2n,$$

то согласно теореме справедлива оценка

$$\inf_{f\in X_0}\mathbf{p}\left(\left|f(t)-\sigma_{2n,r}(\tilde{y}, t)\right| \leq \left|\varphi_{2n,r+1}(t)\right|+\sigma t_\beta\gamma_r(t)-\varepsilon(t)\right) = 1-2\beta, \qquad 0\leq t\leq 1,$$

где

$$\gamma_r(t) = \left(\sum_{i=0}^{2n} l_{r,i}^2(t)\right)^{1/2},$$

а $l_{r,i}(t)$ — система фундаментальных сплайнов [5] таких, что $l_{r,i}(\tau_k) = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, 2n$, δ_{ik} — символ Кронекера.

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. *Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В.* Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1965. – 511 с.
3. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 2. – М.: Наука, 1961. – 800 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
5. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

Получено 09.06.97