УДК 519.41/47

М. М. Семко (НДІ педагогіки АПН України, Київ)

ПРО БУДОВУ УЩН[ ]-ГРУП

Nilpotent non-Dedekind CDN [ ]-groups are described.

Описані нільпотентні недедекіндові УЩН[ ]-групи.

Вивчення УЩН[ ]-груп розпочато в роботі [1] і було продовжено в [2 – 5]. У цих роботах описані локально ступінчасті ненільпотентні та деякі нільпотентні групи такого роду. В даній роботі повністю описані нільпотентні недедекіндові УЩН[ ]-групи (теореми 1 – 3). Необхідні означення можна знайти, наприклад, в [4].

Лема 1. *Нехай $G = A \times B$ — УЩН[ ]-група і A — її недедекіндова підгрупа. Тоді $|B| \in \{1, q\}$, q — просте число. Якщо G — локально ступінчаста група і $|B| = q$, то A — група одного з типів* 1 – 8 *теореми з* [6].

Доведення. Нехай G задовольняє умови леми. Тоді G задовольняє умову леми 1.2.5 з [3], за твердженням якої B не має власних немаксимальних підгруп. Звідси за лемою 1.1.1 з [3] $|B| \in \{1, q\}$, q — просте число.

Нехай $|B| = q$. Якщо G — локально ступінчаста група, то, очевидно, A — локально ступінчаста група. Звідси за теоремою 1.2.1 та лемою 1.2.5 з [3] A — локально ступінчаста ЩН[ ]-група (означення ЩН[ ]-груп див. в [6]), що задовольняє умову теореми з [6] і може бути групою одного з типів 1 – 8 згаданої теореми. Лему доведено.

Лема 2. *Нехай G — примарна недедекіндова* УЩН[ ]*-група G з комутантом порядку p, p — просте число, яка не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп і містить неабелеву підгрупу порядку p^3. Тоді G має вигляд $G = CF$, де C — локально циклічна p-група, чи група кватерніонів порядку* 8, $[C, F] = 1$, $C \cap F = C \cap F'$, $F' = G' = \langle c \rangle$, $|c| = p$, $F = (Q \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| \in \{p, p^2\}$, $|b| = p$, $[a, b] = c \in Q$, $[Q, \langle b \rangle] = 1$, $Q = \langle u, v \rangle$ *— група порядку p, чи p-група Міллера – Морено, $|G| > p^3$ і є групою одного з типів*:

1) $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = Q = C$; *при* $|a| > p$ C *— група кватерніонів порядку* 8;

2) $C = \langle c \rangle$, $Q = \langle u \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle$, $|u| = p^{\Delta}$, $|v| = |a| = |b| = p$, $\Delta > 1$, $[u, v] = [a, b] = c = u^{p^{\Delta-1}}$, $[Q, \langle b \rangle] = 1$;

3) $Q = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle$, $|c| = |u| = |v| = |a| = |b| = p$, $[u, v] = [a, b] = c \in C$, $[Q, \langle b \rangle] = 1$.

Доведення. Нехай G задовольняє умову леми. Тоді $G > M = \langle x, y \rangle$, $|x| \in \{p, p^2\}$, $|y| \in \{p, p^2\}$, $[\langle x \rangle, \langle y \rangle] = \langle c \rangle = G' = M'$, $|c| = p$, $c \in Z(G)$. За наслідком 1.1.6 з [3] $G = MD$, де $D = C_G(M)$, $M \cap D = \langle c \rangle$. За умовою леми та теоремою 1.2.3 з [3] G — черніковська група, що не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^4.

Нехай спочатку $D' = 1$. Тоді внаслідок відомого результату [7] $D = C \times D_1$, де C — сервантна локально циклічна підгрупа з D, що містить $\langle c \rangle$, D_1 — її доповнення в D. Звідси $G = D_1 \times (CM)$ і тому з умови леми $D_1 = 1$ і, значить, $G = CM$. Оскільки $M < G$, то $z \in C$, $|z| = p^2$ і $z^p = c$. Якщо

$|x| = |y| = p$, то покладемо $x = a$, $y = b$, $M = F = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, $[a, b] = c$, $Q = \langle c \rangle$ і одержимо, що G — група типу 1 леми.

Нехай $|x| = p^2$. Тоді існує i, для якого $z^i x = a$, $|a| = p$ і при $|y| = p$ покладемо $y = b$. Як і раніше, одержимо $M = F = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$ і G — група типу 1 леми.

При $|x| = p^2$ і $|y| = p^2$ знайдуться такі i та j, що $z^i x = a$, $z^j y = b$, $|a| = |b| = p$. Знову, як і раніше, $M = F = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$ і G — група типу 1 леми.

Нехай тепер $D' \neq 1$. Покажемо, що D не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Дійсно, нехай це не так. Тоді $D = D_1 \times D_2$, де $D' = D_2' = G' = \langle c \rangle = D \cap M = D_2 \cap M$. Звідси $G = D_1 \times (D_2 M)$. За умовою леми $D_1 = 1$, що суперечить нашому припущенню. Отже, D не рокладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Можливі випадки: 1) $M = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$; 2) M — метациклічна група.

Випадок 1. У цьому випадку D містить $Q = \langle u, v \rangle$ — p-групу Міллера – Морено і G містить підгрупу $U = D \times \langle b \rangle$, яка за теоремою 1.2.1 з [3] задовольняє умову леми 1. На підставі цієї леми D — група одного з типів 1 – 7 теореми з [6], або гамільтонова група. Оскільки $|D'| = p$ і D не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп, то D може бути лише групою одного з типів 1, 4 теореми з [3], або гамільтоновою групою.

Нехай D — група типу 1 теореми з [3]. Тоді $D = \langle u \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle$, $|u| = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $[u, v] = c = u^{p^{\Delta - 1}}$. Покажемо, що $|v| = p$. Нехай це не так. Тоді G містить підгрупу $V = \langle v \rangle \times \langle a \rangle$. Ясно, що $V \ntriangleleft G$ і V — група типу 5 теореми 1.2.2 з [3], за твердженням якої $\langle v^p \rangle \times \langle a \rangle \triangleleft G$. Звідси $a \in Z(G)$, що неможливо. Отже, $|v| = p$. Покладемо $G = \langle c \rangle$, $F = DM$, $D = Q$ і одержимо, що G — група типу 2 леми.

Нехай D — група типу 4 теореми з [6]. Тоді $D = CQ$, C — локально циклічна p-група, чи група кватерніонів порядку 8, $Q = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle$, $|u| = |v| = p$, $[u, v] = c \in C$, $[C, Q] = 1$. Покладемо $F = QM$. Тоді $G = CF$, $[C, F] = 1$ і G — група типу 3 леми.

Нехай, нарешті, D — гамільтонова група. Тоді за попереднім $D = C$ — група кватерніонів порядку 8. Покладемо $Q = \langle c \rangle$, $F = M$ і отримаємо, що $G = CF$ — група типу 1 леми. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку M — метациклічна група і можна вважати, що G не містить неабелевої підгрупи $M = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$ порядку p^3. Звідси $M = \langle x \rangle \langle y \rangle$, $|x| = p^2$. Нехай M не є групою кватерніонів порядку 8. Тоді $M = \langle x \rangle \leftthreetimes \langle y \rangle$, $|y| = p$ і знову G містить підгрупу $U = D \times \langle y \rangle$ і, як у випадку 1, D — група кватерніонів порядку 8, чи група одного з типів 1, 4 теореми з [3]. Нехай $d \in D$, $|d| = p^2$, $d^p = c$. Тоді існує ціле число i таке, що $d^i x = a$, $|a| = p$, $[a, y] = c$ і G містить $M_1 = (\langle c \rangle) \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle y \rangle$, $|y| = p$, а це суперечить випадку, що розглядається. Отже, D не може бути ні групою кватерніонів порядку 8, ні групою типу 1 теореми з [6]. Звідси $D = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle$, $[u, v] = c$, $|u| \in \{p, p^2\}$, $|v| \in \{p, p^2\}$. У цьому випадку $|D| > p^3$. Звідси, без порушення загальності, можна вважати, що $|u| = p^2$. Тому G містить елементарну абелеву підгрупу $w(\langle u \rangle) \times w(\langle v \rangle) \times \langle c \rangle \times \langle a \rangle$ порядку p^4, що неможливо. Значить, M — група кватерніонів порядку 8.

Як і раніше, можна вважати, що $\langle c \rangle$ — максимальна циклічна підгрупа з D. Ясно, що D містить підгрупу Міллера – Морено Q, яка задовольняє умову наслідку 1.3.3 з [3] і може бути лише групою типу 3 згаданого наслідку. Звідси $Q = (\langle c\rangle \times \langle u\rangle) \leftthreetimes \langle v\rangle$, $|Q| > 8$, $[u, v] = c$, $|u| = 4$, $|v| \in \{2, 4\}$. Покажемо, що $|v| = 2$. Нехай $|v| = 4$. Зрозуміло, що $|x| = |y| = 4$, $x^2 = y^2$. Покладемо $x_1 = ux$, $y_1 = vy$. Тоді $|x_1| = |y_1| = 4$, $\langle x_1\rangle \cap \langle y_1\rangle = 1$, $[x_1, y_1] = [ux, vy] = c^2 = 1$ і G містить $V_1 = \langle x_1\rangle \times \langle y_1\rangle$. Ясно, що V_1 не може бути групою жодного з типів $1-6$ теореми 1.2.2 з [3] і тому $V_1 \lhd G$, $V_1 \cap G' = 1$ і, значить, $V_1 \leq Z(G)$. Таким чином, $QM = V_1 \times M$.

Нехай $Q = D$. Тоді при $|v| = 4$ $G = V_1 \times M$, що неможливо. Отже, $|v| = 2$ і G — група типу 1 леми.

Нехай, накінець, $D > Q$ і нехай d — довільний елемент з D. Тоді одна з підгруп $\langle d, u\rangle$, $\langle d, v\rangle$, $\langle du, v\rangle$, $\langle u, dv\rangle$ є групою типу 3 наслідку 1.3.3 з [3]. Звідси $|d| \leq 4$ і тому $D/\langle c\rangle$ — скінченна абелева група. Звідси $D/\langle c\rangle = \langle u_1\langle c\rangle\rangle \times \langle v_1\langle c\rangle\rangle \times \langle d\langle c\rangle\rangle \times B/\langle c\rangle$ і без порушення загальності можна вважати, що $[u_1, v_1] \neq 1$. Очевидно, що $\langle u_1, v_1\rangle$ — група типу 3 наслідку 1.3.3 з [3], і тому можна вважати, що $Q = \langle u_1, v_1\rangle$ і, значить, $u_1 = u$, $v_1 = v$. Тоді з умови $D > Q$ випливає, що $|d\langle c\rangle| = \overline{1}$ і тому D містить підгрупу $U_1 = Q \leftthreetimes \langle d\rangle$ і $|d| > 1$. За попереднім $|u| = 4$, $|v| \in \{2, 4\}$, $|d| \in \{2, 4\}$. Ясно, що $\langle u^2, v^2, d^2\rangle \leq Z(G)$. Тоді в G існує підгрупа $K = (\langle c\rangle \times \langle u^2\rangle \times w(\langle v\rangle)) \leftthreetimes w(\langle d\rangle)$ порядку 16. За вибором $(\langle c\rangle \times w(\langle v\rangle) \leftthreetimes w(\langle d\rangle)$ — абелева група і, значить, K — елементарна абелева група порядку 16, що неможливо. Отже, $Q = D$. Всі випадки розглянуті. Лему доведено.

Теорема 1. *Нільпотентні недедекіндові* УЩН[ ]*-групи* G *з комутантом порядку* p, p *— просте число, мають вигляд* $G = CF$, C *— локально циклічна* p*-група, чи група кватерніонів порядку* 8, $[C, F] = 1$, $F = (Q \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, $[a, b] \in \langle c\rangle = G' = F' \leq Q = \langle u, v\rangle$, $|c| = p$ *та вичерпуються групами типів*:

1) $G = F = Q \times \langle a\rangle$, $Q = \langle u\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle$, $|u| = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $|v| = p^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $[u, v] = c = u^{p^{\Delta-1}}$, $|a| \in \{1, r\}$, r *— просте число*;

2) $G = C \times F$, C *— локально циклічна* 2*-група*, $|C| > 2$, $F = Q \times \langle a\rangle$, Q *— група кватерніонів порядку* 8, $|a| \in \{1, r\}$, r *— просте число*;

3) $F = Q \times \langle a\rangle$, $Q = (\langle c\rangle \times \langle u\rangle) \leftthreetimes \langle v\rangle$, $[u, v] = c \in C$, $|u| \in \{p, p^2\}$, $|v| \in \{p, p^2\}$, $|a| \in \{1, r\}$, r *— просте число*, $|C'| \cdot |u| \cdot |v| \neq 32$; *при* $|a| \neq 1$ $|u| = |v| = p$;

4) $G = F$, $Q = \langle u\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle$, $|u| = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $|v| = |a| = |b| = p$, $[u, v] = [a, b] = c = u^{p^{\Delta-1}}$, $[Q, \langle b\rangle] = 1$;

5) $Q = (\langle c\rangle \times \langle u\rangle) \leftthreetimes \langle v\rangle$, $|u| = |v| = |c| = |a| = |b| = p$, $[u, v] = c = [a, b]$, $[Q, \langle b\rangle] = 1$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Нехай спочатку $G = X \times A$, де $X \neq 1$, $A \neq 1$. Оскільки $|G'| = p$, то або $|X'| = p$, або $|A'| = p$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $X' = G'$ і тому $A' = 1$. За теоремою 1.2.3 з [3] G — недедекіндова черніковська група. Припустимо, що $|A| = r$ — просте число. За лемою 1 X може бути групою одного з типів 1, 3, 4 теореми з [3].

Якщо X — група типу 1 теореми з [3], то покладемо $X = Q$, $A = \langle a\rangle$, $C =$

X', $F = X \times A$. Звідси $F = G$ і, значить, G — група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай X — група типу 3 теореми з [3]. Тоді $X = C \times Q$, C — локально циклічна 2-група, $|C| > 2$, Q — група кватерніонів порядку 8. Покладемо $F = Q \times A$ і одержимо, що $G = C \times F$, і, значить, G — група типу 2 теореми 1.

Нехай X — група типу 4 теореми з [3]. Тоді $X = CQ$, $Q = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle$, $|u| = |v| = p$, $[u, v] = c \in C$, $|c| = p$, $[C, Q] = 1$, C — локально циклічна p-група, чи група кватерніонів порядку 8. Покладемо $F = Q \times A$. Звідси $G = CF$ і тому G — група типу 3 теореми.

Нехай $|A|$ — непросте число. Тоді за лемою 1 X — гамільтонова група. Внаслідок [8] $X = Q \times D \times A_1$, Q — група кватерніонів порядку 8, D — елементарна абелева 2-група, A_1 — періодична абелева група без інволюцій. Не порушуючи загальності можна вважати, що $X = Q \times D$, $A = A_1 \times A$. З а теоремою 1.2.3 з [3] G не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неодиничних прямих множників. Звідси $|D| < 4$.

Нехай $|D| = 2$. Тоді A — локально циклічна 2-група і оскільки G — недедекіндова група, то $|A| > 2$. Покладемо $A = C$, $F = Q \times D$ і одержимо, що G — група типу 2 теореми, що розглядається.

Нехай $|D| = 1$. Тоді $X = Q$ — силовська дедекіндова 2-підгрупа з G, A — її періодичне абелеве доповнення. Звідси внаслідок [8] G — дедекіндова група, що не так.

Нехай тепер G не розкладається в прямий добуток своїх неодиничних підгруп. Якщо G містить неабелеву підгрупу порядку p^3, то G задовольняє умову леми 2. Звідси G — група одного з типів $3-5$ теореми. Нехай G не містить неабелевих підгруп порядку p^3. Тоді всі підгрупи порядку p^3 з G абелеві. Зрозуміло, що G містить підгрупу Міллера – Морено M, яка не може бути ні групою кватерніонів, ні групою діедра порядку 8 і $|M| > p^3$.

Нехай $M = G$. Тоді G задовольняє умову наслідку 1.3.3 з [3] і може бути групою одного з типів 2, 3 цього наслідку. Звідси G — група одного з типів 1, 3.

Нехай $M < G$. Тоді, легко показати, що G розкладається в прямий добуток своїх неодиничних підгруп, що не так. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведено.

Достатність для груп G кожного з типів $1-5$ теореми перевіряється безпосередньо. Теорему доведено.

При доведенні теореми 2 суттєво використовуються наступні леми.

Лема 3. *Метагамільтонові* УЩН[ ]*-групи* G *порядку* p^n *з абелевим нецентральним комутантом типу* (p, p) *є групами одного з типів*:

1) $|G| = p^4$, p — *непарне просте число,* G' — *нецентральна підгрупа з* G *типу* (p, p);

2) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = |x| = p^2$, $|b| = p$ — *непарне просте число,* $[a, x] = b$, $[b, x] = a^{sp}$, $0 < s < p$.

Лема 4. *Метагамільтонові* УЩН[ ]*-групи* G *порядку* p^n *з абелевим нецентральним комутантом типу* (p, p, p) *є групами типу* $G = \langle a \rangle M$, $M = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|c| = |x| = p$ — *непарне просте число,* $[a, b] = x$, $[b, x] = c$, $[a, x] = c^{\varepsilon} b^{p}$, $a^p = c^{1+t\varepsilon} b^{tp}$, $\langle c \rangle \times \langle b^p \rangle = Z(G)$, $0 < \varepsilon < p$, $0 \le t < p$, *всі метациклічні підгрупи з* G *абелеві і всі елементи порядку* p *з* G *належать* G'.

Теорема 2. *Недедекіндові нільпотентні метагамільтонові* УЩН[ ]*-групи* G *з комутантом непростого порядку вичерпуються групами типів*:

1) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

2) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{3}$;

3) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $\alpha > 2$, $\beta > 1$, $p\alpha > 6$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{\alpha-2}}$;

4) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle = \langle b\rangle\langle d\rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $|d| = p^{\alpha-1}$, $\beta > \alpha > 2$, $p\alpha > 6$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = p$, $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{\alpha-2}}$;

5) $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta > 1$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|z| \in \{1, r\}$; *при* $|z| = r$ $\beta \in \{2, 3\}$;

6) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^{3} = x^{6}$, $|z| \in \{1, r\}$, $r \neq 3$ — *просте число;*

7) G — *група порядку* p^{4} *з абелевим нецентральним комутантом типу* (p, p), p — *непарне просте число*;

8) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle x\rangle$, $|a| = |x| = p^{2}$, $|b| = p$ — *непарне просте число,* $[a, x] = b$, $[b, x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

9) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle x\rangle$, $|a| = |b| = p^{2}$, $|x| = p$, $[a, x] = b^{p}$, $[b, x] = a^{sp}b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \le t < p$; *при* $p > 2$ $t^{2} + 4s$ — *неквадратичний лишок за модулем* p; *при* $p = 2$ $t = s = 1$;

10) $G = A \leftthreetimes \langle x\rangle$, $A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = |b| = p^{2}$, $|x| = p$ — *непарне просте число,* $[a, b] = a^{p}$, $[a, x] = b^{p}$, $[b, x] = 1$;

11) $G = A \leftthreetimes \langle x\rangle$, $A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = |b| = p^{2}$, $|x| = p$, $[a, b] = a^{p}$, $[a, x] = b^{p}$, $[b, x] = a^{sp}b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \le t < p$; *при* $p > 2$ $t^{2} + 4s$ — *неквадратичний лишок за модулем* p; *при* $p = 2$ $s = 1$;

12) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $|z| \in \{1, r\}$, r — *просте число,* $[a, x] = a^{2}$, $[b, x] = x^{2} = a^{2}b^{2}$;

13) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle y\rangle)) \times \langle z\rangle$, $|a| = |b| = 4$, $a^{2} = x^{2} = [a, y]$, $a^{2}b^{2} = [a, x] = [b, y]$, $b^{2} = y^{2} = [b, x]$, $|z| \in \{1, r\}$, r — *просте число*;

14) $G = \langle a\rangle M$, $M = (\langle c\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle x\rangle$, $|a| = |b| = p^{2}$, $|c| = |x| = p$ — *непарне просте число,* $[a, b] = x$, $[b, x] = c$, $\langle c\rangle \times \langle b^{p}\rangle = Z(G)$, $[a, x] = c^{\varepsilon}b^{p}$, $0 \le \varepsilon < p$, $a^{p} = c^{1+\varepsilon t}b^{tp}$, $0 \le t < p$, *всі елементи порядку* p *з* G *належать* G', *всі метациклічні підгрупи з* G *абелеві*;

15) $G = \langle a\rangle M$, $|a| = 4$, $M = (\langle a^{2}\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle x\rangle$, $|b| = |x| = 4$, $[a, b] = x^{2}$, $[b, x] = a^{2}b^{2} \in Z(G)$, $[a, x] = b^{2}x^{2}$;

16) $G = \langle a\rangle M$, $|a| = p^{2}$, $M = (\langle a^{p}\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle x\rangle$, $|b| = |x| = p^{2}$, p — *непарне просте число,* $[b, x] = a^{sp}b^{tp}x^{lp}$, $0 < s < p$, $0 \le t < p$, $0 \le l < p$, $[a, b] =$

$= x^p$, $[a, x] = b^{fp} x^{kp}$, $0 < f < p$, $0 \le k < p$, *неквадратичними лишками за модулем* p *є числа*: $t^2 + 4fs$, $l^2 + 4f$, $k^2 + 4s$; *всі елементи порядку* p *з* G *належать* G', *всі метациклічні підгрупи з* G *абелеві.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Внаслідок теореми 2.2.2 з [9] G' — група порядку p^m, $m > 1$. За теоремою 1.2.3 з [3] G — черніковська метагамільтонова група.

Нехай спочатку $G = X \times Z$, $X \ne 1$, $Z \ne 1$. Тоді $X' \ne 1$ або $Z' \ne 1$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $X' \ne 1$. За теоремою 2.2.2 з [9] $Z' = 1$ і $G' = X'$, $|X'| > p$ і тому X — недедекіндова група. Завдяки лемі 1 легко бачити, що $|Z| = r$ і X — група одного з типів 1 – 7 теореми з [6] при умові $|X'| > p$. При цій умові X може бути лише групою з типів 2, 5 – 7 теореми з [6].

Нехай $X = \langle a \rangle \langle b \rangle$ — група типу 2 теореми з [6]. Тоді $|a| = 8$, $|b| \in \{4, 8\}$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$. Припустимо, що $r \ne 2$. Тоді G — метациклічна група, що задовольняє умову наслідку 1.3.9 з [3], за твердженням якого G — група одного з типів 1 – 5 теореми. Нехай $r = 2$. Тоді $Z = \langle z \rangle$, $|z| = 2$ і G містить неабелеву підгрупу $\langle b \rangle \langle za^2 \rangle$, яка не містить $G' = \langle a^2 \rangle$, що суперечить теоремі 2.2.2 з [9].

Нехай X — група типу 5 теореми з [3]. При $r \ne 3$ G — група типу 6 теореми. Нехай $r = 3$. Тоді, очевидно, $G' = X' = \langle a^3 \rangle \times \langle b \rangle$ і G містить неабелеву підгрупу $\langle x \rangle \leftthreetimes \langle bz \rangle$, яка не містить G', що суперечить теоремі 2.2.2 з [9].

Якщо X — група типу 6 чи 7 теореми з [3], то G відповідно група типу 12 чи 13 теореми.

Отже, в подальшому будемо вважати, що G не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. За вибором G та теоремою 1.2.3 з [3] G — черніковська p-група. Звідси за лемою 2.3.1 з [9] при $m > 1$ $|G| < \infty$. Тому $|G| = p^n$, $1 < m < n > 3$.

Якщо G' — циклічна група, то, легко показати, що G — метациклічна група. Звідси завдяки наслідку 1.3.9 з [3] G — група одного з типів 1 – 5 теореми.

Нехай далі G' — нециклічна група. При $n = 4$ G' — група типу (p, p) і G породжується двома елементами. Звідси $G' \nleq Z(G)$. За твердженням 2.1.4 з [9] $p > 2$ і G — група типу 7 теореми. Нехай $n > 4$. На підставі твердження 2.1.7 з [9] можливі випадки: 1) G' — група типу (p, p); 2) G' — група типу (p, p, p).

Випадок 1. У цьому випадку при $G' \nleq Z(G)$ G задовольняє умову леми 3 і тому G — група типу 2 згаданої леми. Звідси G — група типу 8 теореми.

Нехай $G' \le Z(G)$. Якщо G не містить підгрупи типу (p, p, p), то на підставі леми 2.5.2 з [9] G — група одного з типів 12 чи 13 теореми. Нехай далі G містить підгрупи типу (p, p, p). Тоді за теоремою 2.5.2 з [9] $G = F \times C$, $F = A \leftthreetimes \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$, $\alpha \ge \beta > 1$, $\gamma > 0$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $Z(F) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \times \langle x^p \rangle$, $G' = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}} \rangle \le Z(G)$, $\alpha \ne \beta$. Зрозуміло, що G містить підгрупи $X_1 = \langle b^p \rangle \times \langle x \rangle \times C$ і $X_2 = \langle a^p \rangle \times \langle x \rangle \times C$. Покажемо, що $X_2 \ntriangleleft G$. Нехай це не так. Тоді $[x, a] \in X_2 \cap \langle b \rangle = 1$, що неможливо. Отже, $X_2 \ntriangleleft G$. За теоремою 1.2.2 з [3] $C = 1$, $X_2 = \langle x \rangle \times \langle a^p \rangle$ і X_2 — може бути лише групою типу 5 згаданої теореми.

Припустимо, що $\alpha > 2$. Тоді в групі X_2 типу 5 теореми 1.2.2 з [3] $|x| = p$, $w(X_2) = \langle x \rangle \times w(\langle a \rangle) \triangleleft G$. Але тоді $X_2 \triangleleft G$, що не так. Отже, $\alpha = \beta = 2$.

Припустимо тепер, що $\gamma > \alpha$. Тоді за теоремою 1.2.2 з [3] G містить нормальну підгрупу $\langle x^p \rangle \times \langle a \rangle$ і тому в G існує нормальна підгрупа $\langle x \rangle (\langle x^p \rangle \times$

$\times \langle a \rangle) = \langle x \rangle \langle a \rangle$. Звідси $[a, x] \in w(\langle x \rangle \langle a \rangle) = w(\langle x \rangle) \times w(\langle a \rangle)$ не містить $w(\langle b \rangle)$, що суперечить умові $[\langle x \rangle, \langle a \rangle] = w(\langle b \rangle)$. Отже, $\gamma < \alpha$ і тому $|x| = p$. За теоремою 2.5.2 з [9] G — група одного з типів 9 – 11 теореми. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. При нецентральності G' в G група G задовольняє умову леми 4, за твердженням якої G — група типу 15 теореми.

Нехай $G' \le Z(G)$. Тоді за теоремою 2.6.2 з [9] $G = F \times C$, де $F = \langle a \rangle M$, $|a| = p^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $M = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|b| = p^{\beta}$, $|x| = p^{\gamma}$, $[b, x] = c$, $|c| = p$, $\alpha \ge \beta \ge \gamma > 1$, $G' = \langle c \rangle \times w(\langle b \rangle) \times w(\langle x \rangle) = w(\langle a \rangle) \times w(\langle b \rangle) \times w(\langle x \rangle) \le$ $\le Z(G)$, $[\langle a \rangle, F] = [\langle b \rangle, F] = [\langle x \rangle, F] = G' = F'$, $\Phi(F) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \times$ $\times \langle x^p \rangle \le Z(G)$. В групі G існує підгрупа $X_1 = \langle b^p \rangle \times \langle x \rangle \times C$, яка, очевидно, не містить G'. Якщо $X_1 \lhd G$, то X_1 містить $[\langle x \rangle, F] = G'$, що неможливо. Тому $X_1 \ntriangleleft G$ і за теоремою 1.2.2 з [3] $C = 1$.

Припустимо, що $\alpha > 2$. Тоді в групі $G = F$ існує підгрупа $X_2 = \langle a^p \rangle \times \langle x \rangle$, яка за теоремою 1.2.2 з [3] нормальна в G і не містить G'. Але, очевидно, $[X_2, F]$ містить $[\langle x \rangle, F] = G'$. Суперечність. Значить, $\alpha = \beta = \gamma = 2$. За теоремою 2.6.2 з [9] G — група одного з типів 15, 16 теореми. Випадок 2 розглянуто повністю. Необхідність доведено.

Достатність для груп G кожного з типів 1 – 16 теореми перевіряється безпосередньо. Теорему доведено.

Лема 5. *Нехай* G — УЩН[ ]*-група порядку* 2^4 *з трьома інволюціями, що містить таку центральну інволюцію* c, *що* $G/\langle c \rangle$ — *група типу* $(2, 2, 2)$. *Тоді* $G = Q \times D$, *де* Q — *група кватерніонів порядку* 8, $|D| = 2$.

Доведення леми легко отримати з наслідку 1.1.7 роботи [3].

***Наслідок* 1.** *Нехай* G — УЩН[ ]*-група порядку* 2^n *з трьома інволюціями, яка містить підгрупу кватерніонів* $Q = \langle u, v \rangle$ *порядку* 8. *Тоді* G *містить підгрупу* $C = Q \times \langle d \rangle > G'$, $|d| = 2$, $\Phi(Q) = \langle c \rangle \le Z(G)$, $|c| = 2$; *при циклічності* G' $G/\langle c \rangle$ *не містить підгрупи кватерніонів.*

Лема 6. *Нехай* G — УЩН[ ]*-група з трьома інволюціями, що містить підгрупу кватерніонів порядку* 8 *і* G' — *циклічна група порядку більше* 2. *Тоді* G *має вигляд* $G = U \leftthreetimes \langle x \rangle$, $U = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 2^{\alpha}$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $|b| = 4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $a^2 = b^2$, $|x| \in \{2, 4\}$, $[a, x] \in \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle$ *та є групою одного з типів*:

1) $G = U \times \langle x \rangle$, $|x| = 2$, $\alpha = 3$;

2) $\alpha = 2$, $|x| = 4$, $[b, x] = a$, $[a, x] = a^2$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді за наслідком 1 G містить підгрупу $C = Q \times \langle d \rangle \lhd G$, де Q — група кватерніонів порядку 8, $|d| = 2$, $\Phi(Q) = \langle c \rangle \le Z(G)$, $C > G'$ і $G/\langle c \rangle$ не містить підгруп кватерніонів. Якщо $G/\langle c \rangle$ — неабелева група, то внаслідок [8] $G/\langle c \rangle$ — негамільтонова група з комутантом порядку 2, який міститься в підгрупі $C/\langle c \rangle$ типу $(2, 2)$. Звідси $G/\langle c \rangle$ задовольняє умову наслідку 2.1.2 з [3] і може бути лише групою одного з типів 1 – 3 цього наслідку.

Нехай $G/\langle c \rangle$ — група типу 1 наслідку 2.1.2 з [3]. Тоді $G/\langle c \rangle = U/\langle c \rangle \times$ $\times \langle \langle c \rangle x \rangle$, $|\langle c \rangle x| = 2$, $U/\langle c \rangle = \langle \langle c \rangle a \rangle \leftthreetimes \langle \langle c \rangle b \rangle$, $|\langle c \rangle a| = 2^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $|\langle c \rangle b| =$ $= 2^{\beta}$, $\beta > 1$, $\langle \langle c \rangle a^{2^{\Delta-1}} \rangle = \langle \langle c \rangle [a, b] \rangle$. Оскільки G' — циклічна група, то $c \in$

$\in \langle a\rangle$, $|a| = 2^{\alpha}$, $\alpha = \Delta + 1 > 2$, $\langle a\rangle \lhd G$, $U = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $\langle a\rangle \bigcap \langle b\rangle \leq \langle a^{2^{\alpha-1}}\rangle$, $G = U\langle x\rangle$, $U \bigcap \langle x\rangle = U \bigcap \langle x^2\rangle = \langle a\rangle \bigcap \langle x^2\rangle \leq \langle c\rangle$. Зрозуміло, що в G існує підгрупа $A = \langle a\rangle\langle x\rangle$, $[a, x] \in w(\langle a\rangle) = \langle c\rangle$. За теоремою 12.5.1 з [8] без порушення загальності можна вважати, що $A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle x\rangle$, $|x| = 2$. Ясно, що $w(G) = w(A) = \langle c\rangle \times \langle x\rangle$. Звідси U містить тільки одну інволюцію. За теоремою 12.5.1 з [8] $b^2 = c$, $b^{-1}ab = a^{-1}$. Оскільки $|G'/\langle c\rangle| = 2$ і $U' = \langle a^2\rangle$, то $|a| = 8$, $Q = \langle a^2, b\rangle$. На підставі наслідку 1 $Qw(G) = C = Q \times \langle x\rangle$. Звідси $[Q, \langle x\rangle] = 1$. Зрозуміло, що $[a, x] \in \langle c\rangle$. Нехай $[a, x] = c$. Тоді G містить підгрупу діедра $\langle ab\rangle \leftthreetimes \langle x\rangle$ порядку 8, що неможливо (в групі діедра 5 інволюцій). Отже, $[a, x] = 1$ і G — група типу 1 леми 6.

Нехай $G/\langle c\rangle$ — група типу 2 наслідку 2.1.2 з [3]. Тоді $G/\langle c\rangle = (\langle\langle a\rangle a\rangle \times \langle\langle c\rangle b\rangle) \leftthreetimes \langle\langle c\rangle x\rangle$, $|\langle\langle c\rangle a\rangle| = 2^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $|\langle\langle c\rangle b\rangle| = 2^{\beta}$, $\beta \in \{1, 2\}$, $|\langle\langle c\rangle x\rangle| = 4$, $\langle c\rangle a \in Z(G/\langle c\rangle)$, $\langle c\rangle[b, x] = \langle c\rangle a^{2^{\gamma-1}}$. Оскільки G' — циклічна група, то $c \in \langle a\rangle$, $|a| = 2^{\alpha}$, $\alpha = \gamma + 1$, $\alpha > 1$, $\langle a\rangle \lhd G$. Ясно, що в G існують підгрупи $A = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $X = \langle a\rangle\langle x\rangle$, $A \bigcap X = \langle a\rangle$, $w(\langle a\rangle) = \langle c\rangle$, $[G : A] = 4$, $x^4 \in \langle c\rangle$. Підгрупа $X_1 = \langle x^2\rangle G'$ містить $N = \langle c\rangle \times \langle x_1\rangle$, де $|x_1| = 2$, $x_1 \notin A$. Зрозуміло, що $G' = \langle a^{2^{\alpha-1}}\rangle$. Оскільки $[a, b] \in \langle c\rangle$, в G тільки три інволюції і $x_1 \notin A$, то в A тільки одна інволюція c. За теоремою 12.5.1 з[8] A — група кватерніонів порядку 8. Звідси $b^2 = c = a^2$. Ясно, що $G' = \langle a\rangle$, $[a, x] \in \langle a^2\rangle$, $[b, x] = a$, $\langle b\rangle \bigcap \langle x\rangle \leq \langle c\rangle = \langle b^2\rangle = \langle a^2\rangle$. Якщо $\langle b\rangle \bigcap \langle x\rangle = 1$, то покладемо $U = A$ і одержимо $G = U \leftthreetimes \langle x\rangle$.

Покажемо, що $[a, x] = a^2$. Дійсно, нехай це не так. Ясно, що $[a, x^2] = 1$, $[x^2, b] = [x, b][[x, b], x][x, b] = a^{-1}a^{-1} = a^{-2} = a^2 = b^2$. Звідси G містить підгрупу діедра $\langle b\rangle \leftthreetimes \langle x^2\rangle$ порядку 8, що неможливо. Отже, $[x^2, b] = 1$, $[a, x] = a^2$ і тому G — група типу 2 леми. Нехай $\langle b\rangle \bigcap \langle x\rangle \neq 1$. Тоді $x^4 = c$. Зрозуміло, що $[b, x^2] = [x^2, b]^{-1} = ([x, b][[x, b], x][x, b])^{-1} = (a^{-1}[a^{-1}, x]a^{-1}) = a^{-2}c^j = c^{1+j} \in Z(G)$. Покладемо $y = bx$. Тоді $y^2 = bxbx = bx^2(x^{-1}bx) = bx^2ba = b^2x^2(x^{-2}b^{-1}x^2b)a = b^2x^2c^{1+j}a = c^jx^2a$. Оскільки $[a, x] \in \langle c\rangle$, то $[x^2, a] = 1$. Зрозуміло, що $y^2 \neq 1$. Але $y^4 = 1$. Звідси $|y| = 4$ і $\langle y\rangle \bigcap A = 1$. Покладемо $U = A$, $\langle x\rangle = \langle y\rangle$ і одержимо, що G — група типу 2 леми 6.

Нехай, нарешті, $G/\langle c\rangle$ — група типу 3 наслідку 2.1.2 з [3]. Покажемо, що це неможливо. Дійсно, нехай це не так. Тоді $G/\langle c\rangle = (U/\langle c\rangle \times \langle\langle c\rangle a\rangle) \leftthreetimes \langle\langle c\rangle b\rangle$, де $U/\langle c\rangle = \langle\langle c\rangle u\rangle \leftthreetimes \langle\langle c\rangle v\rangle$, $|\langle\langle c\rangle u\rangle| = 2^{\Delta}$, $\Delta > 2$, $|\langle\langle c\rangle v\rangle| = |\langle\langle c\rangle a\rangle| = |\langle\langle c\rangle b\rangle| = 2$, $\langle c\rangle u^{2^{\Delta-1}} = [\langle c\rangle u, \langle c\rangle v] = [\langle c\rangle a, \langle c\rangle b] = \langle c\rangle[u, v] = \langle c\rangle[a, b]$, $[U/\langle c\rangle, \langle c\rangle b] = 1$. Зрозуміло, що $G' \leq \langle u\rangle$, $|u| = 2^{\alpha}$, $\alpha = \Delta + 1 > 3$ і $G' \leq \langle u^4\rangle$. Ясно, що $U = \langle u\rangle\langle v\rangle$, $[U : \langle u\rangle] = 2$. За теоремою 12.5.1 з [8] без порушення загальності можна вважати, що $U = \langle u\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle$, $|v| = 2$. Ясно також, що $N = \langle c\rangle \times \langle v\rangle \leq U$. В G існує підгрупа $A = \langle u\rangle\langle a\rangle$, для якої, як і для підгрупи U, маємо $A = \langle u\rangle \leftthreetimes \langle a\rangle$, $|a| = 2$ і $a \notin U$. Звідси $a \notin N$, що неможливо. Отже, розглядуваний випадок неможливий. Лему доведено.

Лема 7. *Нехай G — УЩН[ ]-група порядку 2^n з трьома інволюціями, що містить підгрупу кватерніонів порядку 8. Тоді* $|G'| \in \{2, 4\}$ *або* $G =$

$= U\langle x\rangle$, $U = \langle a\rangle\langle b\rangle \lhd G$, $|a| = |b| = 8$, $|x| = 4$, $U \bigcap \langle x\rangle = \langle a\rangle \bigcap \langle b\rangle = \langle a^4\rangle$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[a, x] = b^2$, $[a, x] = a^2b^2$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді G містить підгрупу кватерніонів $Q = \langle u, v\rangle$ порядку 8. Якщо $|G'| = 2$, то лему доведено. Нехай $|G'| = 2^m$, $m > 1$. Якщо G' — циклічна група, то G задовольняє умову леми 6, за твердженням якої $|G'| = 4$. Тому далі G' — нециклічна група. За наслідком 1 $G > C > G'$, де $C = Q \times \langle d\rangle$, $|d| = 2$, $w(Q) = \Phi(Q) = Q' = \langle c\rangle \le$ $\le Z(G)$, $|c| = 2$, $w(G) = w(C) = \langle c\rangle \times \langle d\rangle$. Якщо G' — елементарна абелева група, то $|G'| = 4$ і лему доведено. Нехай G' — неелементарна абелева група і $m > 2$. Оскільки $|C| = 16$ і $C > G'$, то $|G'| = 8$. Відомо [10], що група кватерніонів не може бути комутантом 2-групи, тому $G'' = 1$ і $G' = \langle u\rangle \times \langle d\rangle$, $|u| = 4$. Припустимо, що $\langle u\rangle \lhd G$. Якщо $\langle v\rangle \lhd G$, то, як і в лемі 6, $G =$ $= Q\, C_G(Q)$, $u \in \Phi(G)$, що неможливо. Звідси або $\langle u\rangle \ntriangleleft G$, або $\langle v\rangle \ntriangleleft G$. Тому $C/\langle c\rangle$ — нецентральна підгрупа типу $(2, 2, 2)$ з $G/\langle c\rangle$ і $G'/\langle c\rangle$ — група типу $(2, 2)$. Припустимо, що $G/\langle c\rangle$ — метагамільтонова група. Тоді $G/\langle c\rangle$ задовольняє умову теореми 2. Звідси $\langle u\rangle \lhd G$.

Нехай $G/\langle c\rangle$ — неметагамільтонова група. Тоді $G/\langle c\rangle$ задовольняє умову теореми 2 з [5] і може бути лише групою типу 1 цієї теореми, у якої $G'/\langle c\rangle \le$ $\le Z(G/\langle c\rangle)$. Тому $\langle u\rangle \lhd G$. Таким чином, завжди $\langle u\rangle \lhd G$ і $\langle u\rangle/\langle c\rangle \le$ $\le Z(G/\langle c\rangle)$. Зрозуміло, що $G'/\langle c\rangle = \langle u\rangle/\langle c\rangle \times \langle\langle c\rangle d\rangle$ і $\langle c\rangle d \in Z(G/\langle c\rangle)$. Звідси $G'/\langle c\rangle$ центральна в $G/\langle c\rangle$ підгрупа типу $(2, 2)$. Як згадувалось раніше, група $G/\langle c\rangle$ — група одного з типів теореми 2 або група типу 1 теореми 2 з [5]. Група $G/\langle c\rangle$ кожного із згаданих типів містить метациклічну підгрупу $U/\langle c\rangle$, для якої $w(U/\langle c\rangle) = G'/\langle c\rangle$. За попереднім $\langle v\rangle/\langle c\rangle \nleq Z(G/\langle c\rangle)$ і тому $v \notin U$.

Нехай $X = UQ$. Завдяки теоремі 2 і теоремі 2 з [5] легко показати, що $[G : U] = 2$ і, значить, $X = G$, $U/\langle c\rangle = \langle\langle c\rangle a\rangle \leftthreetimes \langle\langle c\rangle b\rangle$, $|\langle c\rangle a| = 4$, $[\langle c\rangle a,$ $\langle c\rangle b] = \langle c\rangle a^2 = \langle c\rangle[a, b]$, $|\langle c\rangle b| = 2^\gamma$, $\gamma > 1$. Зрозуміло, що $w(U/\langle c\rangle) =$ $= \langle\langle c\rangle a^2\rangle \times \langle\langle c\rangle b^{2^{\gamma-1}}\rangle \le \Phi(U/\langle c\rangle) \le \Phi(G/\langle c\rangle)$. Ясно, що $U = \langle c\rangle\langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| \in \{4, 8\}$, $|b| \in \{2^\gamma, 2^{\gamma+1}\}$, $G' = \langle u\rangle \times \langle d\rangle \le \Phi(U)$. Можливі випадки: 1) $\langle c\rangle \bigcap \langle a\rangle \ne 1$; 2) $\langle c\rangle \bigcap \langle a\rangle = 1$.

Випадок 1. У цьому випадку $|a| = 8$, $U = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $\langle a\rangle \bigcap \langle b\rangle \le \langle a^4\rangle = \langle c\rangle$, $\langle a\rangle \bigcap \langle u\rangle \ge \langle c\rangle$. Оскільки $G'/\langle c\rangle = w(U/\langle c\rangle) \le Z(G/\langle c\rangle)$, то $\langle a^2\rangle/\langle c\rangle \le$ $\le G'/\langle c\rangle$. Тому без порушення загальності можна вважати $u = a^2$. Ясно, що U містить підгрупу $A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle d\rangle$ і A містить G'. Звідси G містить підгрупу $V = A\langle v\rangle$, $v \notin A$, $v^2 = c = a^4$. За попереднім $[u, v] = c$, $[v, d] = 1$, $[a^2, v] =$ $= c$. Покладемо $|b| = 2^\beta$. Тоді $\beta \in \{\gamma, \gamma + 1\}$, $\beta > 1$. Для груп $G/\langle c\rangle$ кожного з розглядуваних типів $[\langle c\rangle a, \langle c\rangle b] = \langle c\rangle[u, v] = \langle c\rangle b^{2^{\gamma-1}}$. Можливі випадки: 1.1) підгрупа $\langle a\rangle$ доповнюється в U; 1.2) підгрупа $\langle a\rangle$ не доповнюється в U.

Випадок 1.1. У цьому випадку $[a, v] \in \langle c\rangle \times \langle b^{2^{\gamma-1}}\rangle = N$ і $|[a, v]| \le 2$, $\beta =$ $= \gamma$. За лемою 3 з [5] $w(\langle b\rangle) \le Z(G)$ і тому $N \le Z(G)$. Звідси $[a, d] = 1$ і $[a, v] \in Z(V)$. Але тоді $[a^2, v] = [a, v]^2 = 1$, що не так. Отже, випадок 1.1. неможливий.

Випадок 1.2. У цьому випадку $\beta = \gamma + 1 > 2$, $c = b^{2^{\beta-1}}$, $d = a^2 \cdot b^{2^{\beta-2}}$. Легко бачити, що $U/\langle c\rangle$ — група одного з типів 9, 11 теореми 2, для якої

$\langle c\rangle[a, b] = \langle c\rangle b^2$. Оскільки підгрупа $\langle a\rangle$ не доповнюється в U, то $\langle a\rangle \cap \cap \langle b\rangle = \langle c\rangle = \langle v^2\rangle$ і оскільки $G'/\langle c\rangle = \langle\langle c\rangle a^2\rangle \times \langle\langle c\rangle b^2\rangle \le Z(G/\langle c\rangle)$, то $\langle b^2\rangle \lhd G$ і $|\langle c\rangle b^2| = 2$. Звідси $\beta = 3$. Внаслідок теореми 1.2.2 з [9] в нерозщіплювальній метациклічній підгрупі U $|U'| > 2$. Звідси $[\langle a\rangle, \langle b\rangle] = \langle a^2\rangle$. Але тоді $b^{-1}ab = a^{-1}$. Зрозуміло, що $\langle b^2\rangle$ не доповнюється в $\langle b^2\rangle\langle v\rangle$. Отже, $\langle b^2\rangle\langle v\rangle$ — група кватерніонів порядку 8. Оскільки $c \in \langle b^2\rangle \lhd G$ і $\langle c\rangle[a, v] = \langle c\rangle b^2$, то $\langle [a, v]\rangle = \langle b^2\rangle$. Без порушення загальності можна вважати, що $[a, v] = b^2$. Зрозуміло, що $U/\langle c\rangle$ — неабелева група і тому $G/\langle c\rangle$ — група типу 11 теореми 2, в якій $\langle c\rangle[b, v] = \langle c\rangle a^2 b^{2t}$, де $t \in \{0, 1\}$. Можна вважати, що $t = 1$. Покладемо $v = x$ і одержимо, що $G = U\langle x\rangle$ — група з леми. Випадок 1.2 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку $\langle a\rangle \cap Q = \langle a\rangle \cap \langle c\rangle = 1$, $|a| = 4$, $\langle b\rangle \cap \langle a\rangle = 1 = \langle a\rangle \cap \langle u\rangle$. Як і раніше, для груп $G/\langle c\rangle$ кожного з розглядуваних типів $|b| = 2^\beta$, $\beta > 1$, $\langle c\rangle[a, v] = \langle c\rangle b^{2^{\beta-1}} \le Z(G/\langle c\rangle)$, $\Phi(U) = \langle a^2\rangle \times \langle b^2\rangle$, $u \in \Phi(U)$, $\exp \Phi(U) > 2$. Звідси $\beta > 2$, а значить, $w(\langle b\rangle) = \langle c\rangle$. Тому $\langle b^{2^{\beta-2}}\rangle \lhd G$, $[a, v] = b^{2^{\beta-2}}$. Зрозуміло, що $G' = \langle a^2\rangle \times \langle b^{2^{\beta-2}}\rangle = \langle a^2\rangle \times \langle u\rangle$. Таким чином, в G існує підгрупа $\langle b\rangle \leftthreetimes \langle a^2\rangle \lhd G$ і $\Phi(\langle b\rangle \leftthreetimes \langle a^2\rangle) = \langle b^2\rangle$ і тому $\langle b^2\rangle \lhd G$. В G існує підгрупа $\langle b^2\rangle\langle v\rangle$, в якій $\langle b^2\rangle$ не доповнюється. Але тоді $\langle b^{2^{\beta-2}}\rangle\langle v\rangle$ — група кватерніонів порядку 8.

Легко показати, що $\beta = 3$ і тому $G/\langle c\rangle$ не може бути групою типу 1 теореми 2 з [5].

Можна вважати, що $a^2 = d$. Ясно, що G містить підгрупу $B = \langle b^2\rangle \leftthreetimes \langle a\rangle$. Покажемо, що $G' = \langle d\rangle \times \langle b^2\rangle \le Z(U)$. За теоремою 1.2.2 з [3] $B \lhd G$. Ясно, що $w(B) = w(G) = w(U) = N$. Покажемо, що $N \le Z(G)$. Для цього досить показати, що $d \in Z(U)$. Якщо $[a, b^2] \ne 1$, то $[a, b^2] = c \in Z(G)$ і $\langle dc\rangle$ характеристична підгрупа з B. Звідси $dc \in Z(G)$ і тому $d \in Z(G)$, $N \le Z(G)$. Нехай $[a, b^2] = 1$. Тоді $b^2 \in Z(U)$ і $[a, b] \in N$. Оскільки $[N, \langle a\rangle] = 1$, то $[a, b]^2 = [a^2, b] = 1$ і, значить, $a^2 = d \in Z(U)$. Отже, $N \le Z(G)$. Оскільки $[a, b] \in N \le Z(U)$, то знову $[a, b^2] = [a, b]^2 = 1$. Звідси $b^2 \in Z(U)$ і, значить, $G' \le Z(U)$. Ясно, що тепер $[a, u] = 1$. За попереднім $[a, v] = b^2$. За комутаторними співвідношеннями [8] $[a^2, v] = 1 = [a, v]^2 = b^4 \ne 1$, що неможливо. Отже, випадок 2 неможливий. Всі випадки розглянуті. Лему доведено.

Наслідок 2. *Група G вказаного в лемі 7 типу має точно три інволюції.*

Лема 8. *Неметагамільтонова* УЩН[ ]*-група G порядку 2^n з трьома інволюціями, що не містить підгрупи кватерніонів порядку 8, є метациклічною групою.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді за умовою вона містить неабелеву підгрупу $X = \langle x\rangle \leftthreetimes \langle y\rangle$ типу 5 теореми 1.2.2 з [3], $|x| = 2^\Delta$, $\Delta > 2$, $|y| = 2$, $[x, y] = x^{2^{\Delta-1}}$, $w(X) = w(G) = w(\langle x\rangle) \times \langle y\rangle$ — нецентральна в G підгрупа типу $(2, 2)$, $\langle x^2\rangle \times \langle y\rangle \lhd G$. Покажемо, що G — метациклічна група. Дійсно, нехай це не так. Тоді G містить мінімальну неметациклічну підгрупу C, що задовольняє умову теореми 1.3.3 з [3] і може бути групою одного з типів $1-5$ згаданої теореми. Легко бачити, що C — може бути лише групою типу 5 теореми 1.3.3 з [3]. Група C згаданого типу має підгрупу $H = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| =$

$= |b| = 4$, $[a, b] = a^2$, $\langle a^2 b^2 \rangle$ — характеристична підгрупа з H. За теоремою 1.2.2 з [3] $H \lhd G$, $\langle a^2 \rangle \lhd G$, $\langle a^2 b^2 \rangle \lhd G$, $w(G) = w(H) = \langle a^2 \rangle \times \langle b^2 \rangle = \langle a^2 \rangle \times \langle a^2 b^2 \rangle \leq Z(G)$, що неможливо. Отже, G — метациклічна група. Лему доведено.

Теорема 3. *Нільпотентні неметагамільтонові* УЩН[ ]*-групи* G *вичерпуються групами типів*:

1) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{2, 3, 4\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1} a b = a^{-1}$;

2) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{3, 4\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1} a b = a^7$;

3) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 16$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1} a b = a^3$;

4) $G = (\langle a, b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $\langle a, b \rangle$ — *група кватерніонів*, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = a$;

5) $G = U \leftthreetimes X$, U — *циклічна* 2*-група, чи група кватерніонів порядку* 8, X — *група кватерніонів порядку* 8, $[U, X] \leq w(U)$; *при* $U' = 1$ $[U, X] = w(U)$;

6) $G = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = 8$, $|x| = 4$, $|b| = 2$, $[a, b] = x^2 = a^4$, $[a, x] = b$, $[b, x] = 1$;

7) $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|x| = 4$, $(\langle a \rangle \langle b \rangle) \cap \langle x \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^4 \rangle$, $b^{-1} a b = a^{-1}$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2 b^2$;

8) $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle z \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{2, 3\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = |z| = 2$, $b^{-1} a b = a^{-1}$, $[b, z] = 1$, $[a, z] \in \langle a^4 \rangle$;

9) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)(\langle x \rangle \times \langle z \rangle)$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = |z| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$, $[b, z] = 1$, $[a, z] \in \langle a^3 \rangle$;

10) $G = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|x| = p$, $|a| = p^2$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 2$, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^{p^{\beta - 1}}$, $[b, x] = 1$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Очевидно, що G — неабелева група з комутантом непростого порядку.

Нехай G — метациклічна група. Тоді вона задовольняє умову наслідку 1.3.10 з [3] і є нільпотентною групою одного з типів цього наслідку. Легко бачити, що G — група одного з типів $1-3$ теореми.

Нехай G — неметациклічна група. Оскільки G — нільпотентна негамільтонова неметациклічна УЩН[ ]-група, то за наслідком 2.1.3 з [3] $|G| = p^n$, $n > 4$, $|G'| = p^m$, $m > 1$. За теоремою 1.2.3 з [3] G не містить підгруп типу (p, p, p, p). За наслідком 2.2.2 з [3] при $p > 2$ G містить підгрупу типу (p, p, p).

Нехай G містить підгрупи типу (p, p, p). Тоді G задовольняє умову теореми 2.2.2 з [3] і G — група одного з типів $1-3$ згаданої теореми, і тому G — група одного з типів $8-10$ теореми 3.

Нехай G не містить підгрупи типу (p, p, p). За попереднім $p = 2$. За лемою 1 з [5] G не містить підгрупи діедра порядку 8. Оскільки G — неметациклічна група, то в G точно три інволюції. За лемою 8 G містить підгрупу кватерніонів порядку 8. Внаслідок леми 7 G — група типу 7 теореми, або $|G'| < 8$. Зрозуміло, що тоді $|G'| = 4$.

Нехай G' — циклічна група. Тоді G задовольняє умову леми 6 і може бути групою одного з типів 1, 2 згаданої леми, і тому G — група типу 4 чи 8 теореми.

Нехай, нарешті, G' — група типу $(2, 2)$. Ясно, що всі інволюції з G належать G' і G задовольняє умову теореми 1 з [5] і G — група одного з типів 1 – 5 згаданої теореми. Група G кожного з типів 2 – 4 теореми 1 з [5] є групою одного з типів теореми 2, які є метагамільтоновими групами, що неможливо. Група G кожного з типів 1, 5 теореми 1 з [5] є групами типів 5, 6 розглядуваної теореми. Необхідність доведено.

Достатність перевіряється безпосередньо. Теорему доведено.

Наслідок 3. *Комутант нільпотентної* УЩН[ ]*-групи є елементарною абелевою групою порядку не більше ніж* p^3, *або* 2*-групою типу* 4, *чи* 4, 2, *чи* 8, *при цьому* G' *— група типу* 4, 2, *коли* G *— група типу* 7 *теореми* 3.

1. *Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф.* Конечные группы с плотной системой нормальных подгрупп // XIV Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977. – С. 57–58.
2. *Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф.* Конечные ненильпотентные группы с обобщенно плотной системой инвариантных подгрупп. – Киев, 1980. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 19-25-80.
3. *Семко М. М.* Про будову груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – 90 с.
4. *Семко М. М.* Будова локально ступінчастих ненільпотентних УЩН[ ]-груп // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 6. – С. 789–798.
5. *Семко М. М.* Про будову УЩН[ ]-груп з елементарним комутантом рангу два // Там же. – № 10. – С. 1396–1403.
6. *Семко М. М.* Будова одного класу груп з умовами щільності нормальності для підгруп // Там же. – № 8. – С. 1148–1151.
7. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
8. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
9. *Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Метагамільтонові групи та їх узагальнення. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.
10. *Махнев А. А.* О конечных метагамильтоновых группах // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1976. – **10**. – С. 60–76.

Одержано 30.09.96