УДК 517.5

С. Ф. Буслаева (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ТЕОРЕМЕ ПУАНКАРЕ С ПРЕДЕЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

We consider the case where the Poincaré theorem for difference equations with limit constant coefficients is generalized to systems of difference equations with limit periodic coefficients.

Розглянуто випадок, коли теорема Пуанкаре для різницевих рівнянь з гранично сталими коефіцієнтами поширюється на системи різницевих рівнянь з гранично періодичними коефіцієнтами.

Одной из центральных теорем теории линейных разностных уравнений является классическая теорема Пуанкаре [1] о разностных уравнениях с предельно постоянными коэффициентами.

Теорема Пуанкаре. *Пусть имеется линейное разностное уравнение*

$$\omega_{n+k} + \alpha_{n,1}\omega_{n+k-1} + \ldots + \alpha_{n,k}\omega_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

с предельно постоянными коэффициентами: $\lim_{n\to\infty}\alpha_{n,l} = \alpha_l$, $l = 1, \ldots, k$. *И пусть корни характеристического многочлена* $\lambda^k + \alpha_1\lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_k$ *различны по модулю. Тогда для всякого решения* $\{\omega_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *этого уравнения либо решение вырождается, начиная с некоторого номера* n_0 (*т.е.* $\omega_n = 0$ *при всех* $n \geq n_0$), *либо существует предел* $\lim_{n\to\infty}\omega_{n+1}/\omega_n$, *равный одному из корней характеристического многочлена.*

Теорема Пуанкаре допускает также формулировку и в векторном виде [2–4].

Теорема Пуанкаре (в векторной формулировке). *Пусть имеется линейная система разностных уравнений*

$$\overline{u}_n = A_n\overline{u}_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $\overline{u}_n = (u_n^1, \ldots, u_n^m)$ — *m-мерные векторы,* A_n — *предельно постоянные* $(m \times m)$*-матрицы,* $\lim_{n\to\infty}A_n = A$, *и пусть все собственные значения предельной матрицы* A *различны по модулю. Тогда для всякого решения* $\{\overline{u}_n\}_{n=0,1,\ldots}$ *разностного уравнения* (2) *либо решение вырождается, начиная с некоторого номера* n_0 (*т.е.* $\overline{u}_n = 0$ *при всех* $n \geq n_0$), *либо найдется такой индекс* $j \in \{1, \ldots, m\}$, *что существуют пределы*

$$\lim_{n\to\infty}\overline{u}_n/u_n^j = \overline{e}; \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}u_{n+1}^j/u_n^j = \lambda, \tag{4}$$

где $\overline{e}$ — *некоторый собственный вектор матрицы* A, λ — *отвечающее ему собственное значение.*

В данной статье этот результат распространяется на случай систем разностных уравнений с предельно периодическими коэффициентами. А именно, будет доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть имеется линейная система разностных уравнений*

$$A_{n,0}\overline{\omega}_{n+k} + \ldots + A_{n,k}\overline{\omega}_n = \overline{0}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $\overline{\omega}_n = (\omega_n^1, \ldots, \omega_n^m)$ — *m-мерные векторы,* $A_{n,l}$, $l = 0, \ldots, k$, — *предельно периодические (с периодом* p*)* $(m \times m)$*-матрицы,*

$$\lim_{n\to\infty} A_{np+q,l} = A_l^q, \quad q = 1, \ldots, p, \tag{6}$$

$A_{n,0} = E$, $n = 1, 2, \ldots$, E — *единичная* $(m \times m)$*-матрица. И пусть различны по модулю корни характеристического многочлена* $\det A(z)$, *где* $(m(p+k) \times m(p+k))$*-матрица* $A(z)$ *образована из* $(m \times m)$*-матриц* $a_{i,j}(z)$, $i, j = 1, p+k$, *определенных следующим образом:*

$$a_{i,j}(z) = \begin{cases} A_{i-j+k}^i, & i = 1, \ldots, p; i \le j \le i+k; \\ zE, & i = p+1, \ldots, p+k; j = i-p; \\ -E, & i = p+1, \ldots, p+k; j = i \end{cases}$$

(в остальных случаях $a_{i,j}(z) = 0$*). Тогда для всякого решения* $\{\overline{\omega}_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *системы* (5) *разностных уравнений либо* $\overline{\omega}_n = \overline{0}$ *при всех* $n \ge n_0$, *либо найдутся такие индексы* $r \in \{1, \ldots, p\}$ и $j \in \{1, \ldots, m\}$, *что существуют пределы*

$$\lim_{n\to\infty} \omega_{(n+1)p+r}^j \big/ \omega_{np+r}^j = \lambda, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \omega_{np+q}^i \big/ \omega_{np+r}^j = e_q^i, \quad q \in Z; \quad i = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

где λ — *некоторый корень характеристического многочлена, а* $m(p+k)$*-мерный вектор* $\overline{e} = (e_1^1, \ldots, e_1^m, \ldots, e_{p+k}^1, \ldots, e_{p+k}^m)$ *удовлетворяет условию*

$$A(\lambda)\,\overline{e} = \overline{0}. \tag{9}$$

Поскольку все корни характеристического многочлена различны по модулю, то все они, в частности, простые и, следовательно, вектор $\overline{e}$ определяется условиями (9) однозначно с точностью до постоянного множителя. Если вектор $\overline{e}$ определен, то с точностью до его перенормировки в качестве индексов r и j, фигурирующих в теореме, можно рассматривать любую пару индексов $r \in \{1, \ldots, p\}$ и $j \in \{1, \ldots, m\}$, для которых $e_r^j \ne 0$.

Отметим,что при $p = 1$, т. е. в случае предельно постоянных коэффициентов, характеристический многочлен, определяемый как определитель введенной в теореме матрицы $A(z)$, равен $A_0 z^k + \ldots + A_k$, где $A_l = \lim_{n\to\infty} A_{n,l}$, $l = 0, \ldots, k$. Поэтому сформулированная теорема при $p = m = 1$, $k \in N$ и $p = k = 1$, $m \in N$, совпадает соответственно с классической и векторной теоремами Пуанкаре.

Часто весьма полезным оказывается следующее дополнение теоремы Пуанкаре, предложенное Перроном [5].

Теорема Перрона. *Пусть имеется линейное разностное уравнение* (1) *с предельно постоянными коэффициентами:* $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,l} = \alpha_l$, $l = 1, \ldots, k$. *И пусть* $\alpha_{n,k} \ne 0$ *при всех* $n = 1, 2, \ldots$. *И пусть корни* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *характеристического многочлена* $\lambda^k + \alpha_1 \lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_k$ *различны по модулю. Тогда для всякого корня* λ *характеристического многочлена существует такое решение* $\{\omega_n\}_{n+1,2,\ldots}$ *разностного уравнения* (1), *что* $\lim_{n\to\infty} \omega_{n+1}/\omega_n = \lambda$.

Такое же дополнение имеет место и для теоремы Пуанкаре в векторной формулировке (см., например, [2, 4]) при дополнительном предположении $\det A_n \ne 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и, как будет показано ниже, для сформулированной теоремы при дополнительном предположении $\det A_{n,k} \ne 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Отметим один частный случай теоремы.

Следствие. *Пусть имеется линейное разностное уравнение* (1) *с предельно периодическими коэффициентами:* $\lim_{n\to\infty} \alpha_{np+q,l} = \alpha_l^q$, $l = 1, \ldots, k$; $q = 1, \ldots,$

p, многочлены $z^k + \alpha_1^q z^{k-1} + \ldots + \alpha_k^q$, $q = 1, \ldots, p$, *имеют общий корень* λ *и* $\alpha_{n,k} \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. *И пусть корни характеристического многочлена различны по модулю. Тогда найдется решение* $\{\omega_n\}_{n+1,2,\ldots}$ *разностного уравнения* (1) *такое, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_{n+1}/\omega_n = \lambda$.

В работе [4] получено при $k = 2$ следующее усиление теоремы Пуанкаре.

Пусть имеется разностное уравнение

$$\omega_{n+2} + \alpha_{n,1}\omega_{n+1} + \alpha_{n,2}\omega_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

такое, что $\alpha_{n,2} \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^1 = \lambda$ *и* $|\lambda_n^2| < \theta|\lambda|$, $\theta < 1$, $n \geq n_0$, *где* $\lambda_n^{1,2}$ *— корни многочлена* $z^2 + \alpha_{n,1} z + \alpha_{n,2}$. *Тогда для всякого решения* $\{\omega_n\}_{n+1,2,\ldots}$ *разностного уравнения* (10), *кроме тривиального и единственного исключительного решения,* $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_{n+1}/\omega_n = \lambda$.

В данной статье приведен пример, показывающий, что аналогичное утверждение становится неверным уже при $k = 3$. Пример построен ниже в виде разностного уравнения с периодическими коэффициентами.

Переходя к доказательству теоремы и ее следствий, сформулируем и докажем одно простое вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть* $((p+k)\times(p+k))$*-матрица* $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, *где* A, B, C, D *— матрицы размеров соответственно* $(p \times p)$, $(p \times k)$, $(k \times p)$, $(k \times k)$, *имеет обратную матрицу* F^{-1}. *Тогда*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ zC & zD - I \end{pmatrix} = \det(zI - T)\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где I *— единичная* $(k \times k)$*-матрица;* T *—* $(k \times k)$*-матрица, стоящая в правом нижнем углу матрицы* F^{-1}.

Доказательство леммы. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\det A \neq 0$, так как в противном случае можно осуществить предельный переход. Докажем сначала равенство

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B). \tag{12}$$

Для частного случая $A = E$, где E — единичная $(p \times p)$-матрица, равенство (12) имеет место, так как матрица $\begin{pmatrix} E & B \\ C & D \end{pmatrix}$ элементарными преобразованиями (из $(p+i)$-й строки $(i = 1, \ldots, k)$ вычитается сумма первых p строк, умноженных соответственно на $c_{i,j}$, $j = 1, \ldots, p$, где $C = (c_{i,j})_{i=1,\ldots,k;\, j=1,\ldots,p}$) приводится к виду $\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & D - CB \end{pmatrix}$. В случае произвольных матриц A $(\det A \neq \neq 0)$, пользуясь уже доказанным частным случаем, имеем

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ C & D \end{pmatrix} =$$

$$= \det A \det(D - CA^{-1}B),$$

т. е. равенство (12) доказано.

Пусть $F^{-1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & T \end{pmatrix}$. Тогда $RA + TC = 0$, $RB + TD = I$. Поскольку $\det A \neq 0$, то отсюда имеем

$$R = -TCA^{-1}, \quad T(D - CA^{-1}B) = I. \tag{13}$$

Из (12) и (13) имеем

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ zC & zD - I \end{pmatrix} = \det A \det (zD - \mathrm{I} - zCA^{-1}B) =$$

$$= \det A \det (z(D - CA^{-1}B) - T(D - CA^{-1}B)) =$$

$$= \det A \det (zI - T) \det (D - CA^{-1}B) = \det (zI - T) \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Таким образом, лемма доказана.

Доказательство теоремы. Перепишем систему уравнений (5) в другом виде, заменив индекс n на $np + q$, $q = 0, 1, 2, \ldots$,

$$A_{np+q,k}\,\overline{\omega}_{np+q} + \ldots + A_{np+q,0}\,\overline{\omega}_{np+q+k} = \overline{0}. \tag{14}$$

Добавим к p равенствам (14), в которых $q = 1, \ldots, p$, k тривиальных равенств $\overline{\omega}_{np+j} = \overline{\omega}_{np+j}$, $j = 1, \ldots, k$, и перепишем полученные $p + k$ равенства в векторном виде

$$\begin{pmatrix} A_{np+1,k} & \ldots & A_{np+1,0} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & A_{np+p,k} & \ldots & A_{np+p,0} \\ E & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & E & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\omega}_{np+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{\omega}_{np+p+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \overline{\omega}_{np+1} \\ \cdot \\ \overline{\omega}_{np+k} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Обозначим через F_n $(m(p+k) \times m(p+k))$-матрицу, стоящую в левой части этого равенства, и представим ее в виде $F_n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$, где $(mp \times mp)$-матрица A_n образована первыми mp строками и столбцами матрицы F_n, а $(mp \times mk)$-матрица B_n, $(mk \times mp)$-матрица C_n и $(mk \times mk)$-матрица D_n определены аналогичным образом. Пусть $\begin{pmatrix} P_n & Q_n \\ R_n & T_n \end{pmatrix}$-матрица, обратная к F_n. Она существует, так как $|\det F_n| = 1 \neq 0$. Из (15) следует

$$\begin{pmatrix} \overline{\omega}_{np+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{\omega}_{np+p+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n & Q_n \\ R_n & T_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \overline{\omega}_{np+1} \\ \cdot \\ \overline{\omega}_{np+k} \end{pmatrix}.$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\begin{pmatrix} \overline{\omega}_{(n+1)p+1} \\ \cdot \\ \overline{\omega}_{(n+1)p+k} \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} \overline{\omega}_{np+1} \\ \cdot \\ \overline{\omega}_{np+k} \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

Из условий теоремы следует, что существует предел $\lim_{n\to\infty} F_n = F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Следовательно, существует также и предел $\lim_{n\to\infty} T_n = T$. По определению матриц $F_n \det \begin{pmatrix} A & B \\ zC & zD - I \end{pmatrix}$ в точности совпадает с характеристическим многочленом. Поэтому по доказанной лемме все корни характеристического многочлена совпадают с собственными значениями матрицы T. Применяя к соотношениям (16) теорему Пуанкаре в векторной формулировке, заключаем, что найдутся индексы r, $1 \le r \le k$, и j, $1 \le j \le m$, такие, что существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\omega}_{np+l}/\omega^j_{np+r} \tag{17}$$

при всех $l = 1, \dots, k$.

Из (14) при $q = 1$, (6) и существования пределов (17) при $l = 1, \dots, k$ следует, что предел (17) существует и при $l = k + 1$. Полагая последовательно в (14) $q = 2, 3, \dots$, аналогичным образом убеждаемся в существовании пределов (17) при $l = k + 2, k + 3, \dots$. Таким образом, пределы (17) существуют при всех $l = 1, 2, \dots$. Обозначив

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\omega}_{np+l}/\omega^j_{np+r} = \overline{e}_l, \quad l = 1, 2, \dots, \tag{18}$$

$$\lim_{n\to\infty} \omega^j_{np+p+r}/\omega^j_{np+r} = e^j_{p+r} = \lambda, \tag{19}$$

из (14), (6) и (18) получим

$$A^q_k \overline{e}_q + \dots + A^q_0 \overline{e}_{q+k} = \overline{0}, \qquad q = 1, \dots, p. \tag{20}$$

Кроме того, из (18) и (19) имеем

$$\overline{e}_{q+p} = \lim_{n\to\infty} \overline{\omega}_{np+q+p}/\omega^j_{np+r} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \overline{\omega}_{(n+1)p+q}/\omega^j_{(n+1)p+r} \lim_{n\to\infty} \omega^j_{(n+1)p+r}/\omega^j_{np+r} = \overline{e}_q \lambda. \tag{21}$$

Равенства (20) и (21) означают, что $A(\lambda)\,\overline{e} = \overline{0}$. Отсюда следует, в частности, что λ является корнем характеристического многочлена $\det A(z) = 0$. Таким образом, существование пределов (7), (8) и условие (9) доказаны.

Если $\det A_{n,k} \ne 0$, $n = 1, 2, \dots$, то согласно лемме (при $z = 0$) $\det T_n \ne 0$, $n = 1, 2, \dots$, и, следовательно, к системе (16) применима теорема Перрона в векторной формулировке (см. [2] или [4]). Поэтому можно утверждать, что для всякого корня λ характеристического многочлена найдется решение системы (5) разностных уравнений, для которого имеют место равенства (7), (9) с данным λ.

Теорема полностью доказана.

Доказательство следствия. Легко проверяется, что $A(\lambda^p)\,\overline{e} = \overline{0}$, где $\overline{e} = \lambda, \dots, \lambda^{p+k}$. Согласно теореме найдется решение $\{\omega_n\}_{n=1,2,\dots}$, для которого имеют место равенства (7)–(9) с данным корнем λ^p характеристического многочлена и соответствующим ему вектором $\overline{e}$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \omega_{(n+1)p+1}/\omega_{np+1} = \lambda^p,$$

$$\lim_{n\to\infty} \omega_{np+q}/\omega_{np+1} = \lambda^{q-1}, \quad q = 1, \dots, p,$$

а это означает, что существует предел $\lim_{n\to\infty} \omega_{n+1}/\omega_n = \lambda$. Следствие доказано.

И в завершение статьи построим пример при $k = 3$ разностного уравнения

$$\omega_{n+3} + \alpha_{n,1}\omega_{n+2} + \alpha_{n,2}\omega_{n+1} + \alpha_{n,3}\omega_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

такого, что при всех $n = 1, 2, \ldots$ многочлены $z^3 + \alpha_{n,1} z^2 + \alpha_{n,2} z + \alpha_{n,3}$ имеют один общий корень, а два других по модулю меньшего общего корня, и при этом для достаточно широкого множества решений разностного уравнения (22) не существует предела $\lim_{n\to\infty} \omega_{n+1}/\omega_n$, равного общему корню многочленов $z^3 + \alpha_{n,1}z^2 + \alpha_{n,2}z + \alpha_{n,3}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Положим коэффициенты $(\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \alpha_{n,3})$, равными соответственно $(-4, 5, -2)$ при нечетных n, и $(0, -3, -2)$ при четных n. Тогда многочлены $z^3 + \alpha_{n,1} z^2 + \alpha_{n,2} z + \alpha_{n,3}$ при нечетных n равны $z^3 - 4z^2 + 5z - 2 = (z-2)(z-1)^2$, а при четных n равны $z^3 - 3z^2 - 2 = (z-2)(z-1)^2$, т. е. при всех n один из корней многочленов $z^3 + \alpha_{n,1} z^2 + \alpha_{n,2} z + \alpha_{n,3}$ тождественно равен 2, а два других корня по модулю равны $1 < 2$. Поскольку данное разностное уравнение имеет периодические коэффициенты (с периодом $p = 2$), то, пользуясь доказанной теоремой, можно описать поведение его решений. Характеристический многочлен для данного разностного уравнения имеет вид

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ z & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & -1 \end{pmatrix} = z^3 + 2z^2 - 23z - 4 = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3),$$

где $\lambda_1 = -3 - \sqrt{8}$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -3 + \sqrt{8}$. Очевидно, что $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$. По доказаной теореме найдутся три решения $\left\{\omega_n^i\right\}_{n=1,2,\ldots}$, $i = 1, 2, 3$, разностного уравнения (22) такие, что $\lim_{n\to\infty} \omega_{n+2}^i \big/ \omega_n^i = \lambda_i$. Общее решение разностного уравнения имеет вид

$$\{\omega_n\}_{n+1,2,\ldots} = C_1 \left\{\omega_n^1\right\}_{n=1,2,\ldots} + C_2 \left\{\omega_n^2\right\}_{n=1,2,\ldots} + C_3 \left\{\omega_n^3\right\}_{n=1,2,\ldots}. \tag{23}$$

Если $C_1 \neq 0$, то $\lim_{n\to\infty} \omega_{n+2}/\omega_n = \lambda_1 = -3 - \sqrt{8}$. Следовательно, для всех решений разностного уравнения, определяемых равенством (23) с $C_1 \neq 0$, не существует предела $\lim_{n\to\infty} \omega_{n+1}/\omega_n$, равного 2.

1. *Poincare H.* Sur les equations lineaires aux differentielles et aux differences finies // Amer. J. Math. – 1885. – № 7. – P. 203–258.
2. *Фрейман Г. А.* О теоремах Пуанкаре и Перрона // Усп. мат. наук. – 1957. – **12**, вып. 3. – С. 241–246.
3. *Mate A., Nevai P.* A generalization of Poicare's theorem for recurrence equations // J. Approxim. theory. – 1990. – № 63. – P. 92–97.
4. *Буслаев В. И.* О теореме Пуанкаре и ее приложениях к вопросам сходимости цепных дробей // Мат. сб. – 1998. – № 11.
5. *Перрон О.* Об одной теореме А. Пуанкаре // J. rein und angew. Math. – 1909. – № 136. – P. 17–37; О линейном разностном уравнении А. Пуанкаре // Ibid. – 1910. – № 137. – P. 6–64.

Получено 21.10.97