УДК 517.98

М. Ф. Городній (Київ. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ ОБМЕЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

We investigate the problem of approximation of a bounded solution of linear differential equation by solutions of the corresponding difference equations in the Banach space.

Досліджено питання про апроксимацію обмеженого розв'язку лінійного диференціального рівняння розв'язками відповідних різницевих рівнянь у банаховому просторі.

Нехай B — комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$, B' — простір спряжений до B; $L(B)$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють з B в B; I — одиничний оператор в B; A — фіксований оператор з $L(B)$; $\sigma(B)$ та $\rho(A)$ — відповідно спектр і резольвентна множина оператора A; f: $R \to B$ — неперервна за нормою на R функція така, що

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in R} \| f(t) \| < +\infty.$$

Відомо [1, с. 119], що умова

$$\sigma(A) \bigcap iR = \varnothing \tag{1}$$

забезпечує існування єдиного обмеженого (за нормою) на R розв'язку $x: R \to B$ диференціального рівняння

$$x'(t) = A\, x(t) + f(t), \quad t \in R. \tag{2}$$

Рівнянню (2) відповідає різницеве рівняння

$$u_{n+1}(\tau) - u_{n-1}(\tau) = 2\tau(A u_n(\tau) + f(n\tau)), \quad n \in Z. \tag{3}$$

Тут τ — фіксоване додатне число.

У данній статті досліджується питання про наближення обмеженого розв'язку диференціального рівняння (2) розв'язками різницевих рівнянь (3) при $\tau \to 0$.

Відмітимо, що при виконанні умови (1) різницеве рівняння (3) має єдиний обмежений розв'язок $\{ u_n(\tau)\colon n \in Z \}$. Дійсно, у цьому випадку можна застосувати таке твердження.

Лема 1. *Позначимо через T фіксований оператор з $L(B)$. Різницеве рівняння*

$$x_{n+1} - x_{n-1} = T x_n + y_n, \quad n \in Z, \tag{4}$$

має для довільної обмеженої в B послідовності $\{ y_n\colon n \in Z \}$ єдиний обмежений розв'язок $\{x_n : n \in Z\}$ тоді і тільки тоді, коли $\{ i\lambda |\ \lambda \in [-2; 2] \} \subset \rho(T)$. Цей розв'язок зображується у вигляді

$$x_n = \sum_{k \in Z} C_{n-k}\, y_k, \quad n \in Z, \tag{5}$$

де

$$C_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi| = 1} \xi^{-j-1} (\xi^{-1} I - \xi I - T)^{-1} d\xi, \quad j \in Z.$$

© М. Ф. ГОРОДНІЙ, 1998

Лема 1 є наслідком доведеної в [2] теореми 1.

Основний результат статті міститься в наступній теоремі.

Теорема 1. *Припустимо, що виконується умова* (1) *і функція* f *рівномірно неперервна на* R. *Тоді*

$$\sup_{n \in z} \| x(n\tau) - u_n(\tau) \| \to 0, \quad \tau \to 0+.$$

Для доведення цієї теореми використовуються такі твердження.

Лема 2. *Нехай* $a > 0$, *функція* $\varphi\colon [-a; a] \to B$ *неперервна на* $[-a; a]$ *і диференційовна в точках* $(-a; a)$. *Тоді справджуються нерівності:*

а) $\| \varphi(a) - \varphi(-a) - 2a\varphi'(0) \| \le 4a \sup\limits_{|t|<a} \| \varphi'(t) - \varphi'(0) \|$;

б) $\| \varphi(a) - \varphi(-a) \| \le 4a \sup\limits_{|t|<a} \| \varphi'(t) \|$.

Доведення. Зафіксуємо $\mathrm{Im} \in B'$ і покладемо

$$\alpha(t) := \mathrm{Re}\, l(\varphi(t)), \quad \beta(t) := \mathrm{Im}\, l(\varphi(t)).$$

Тоді знайдуться такі числа $\{\xi, \eta\} \subset (-a; a)$, що

$$|l(\varphi(a) - \varphi(-a) - 2a\varphi'(0))| =$$

$$= |\alpha(a) - \alpha(-a) + i(\beta(a) - \beta(-a)) - 2a(\alpha'(0) + i\beta'(0))| \le$$

$$\le 2a(|\alpha'(\xi) - \alpha'(0)| + |\beta'(\eta) - \beta'(0)|).$$

Тому

$$|l(\varphi(a) - \varphi(-a) - 2a\varphi'(0))| \le 4a\|l\| \sup_{|t|<a} \| \varphi'(t) - \varphi'(0) \|,$$

звідки випливає нерівність а). Нерівність б) перевіряється аналогічно.

Нехай $C_+ := \{ z \in C \mid \mathrm{Re}\, z > 0 \}$, K — компактна підмножина C_+. Наступне твердження доводиться елементарно.

Лема 3. *Існують константи* $\gamma_1 > 0$ *і* $\tau_1 > 0$ *такі, що для будь-яких* $0 < \tau < \tau_1$, $z \in K$ *виконуються нерівності*

$$\left| \sqrt{\tau^2 z^2 + 1} - \tau z \right| < 1;$$

$$\frac{1}{\tau}\left(1 - \left|\sqrt{\tau^2 z^2 + 1} - \tau z\right|\right) \ge \gamma_1.$$

***Доведення теореми* 1.** Внаслідок (2) при фіксованому $\tau > 0$ маємо

$$x'(n\tau) = A\,x(n\tau) + f(n\tau), \quad n \in Z. \tag{6}$$

Віднявши від помножених на 2τ рівностей (6) відповідні їм рівності (3) отримаємо

$$v_{n+1} - v_{n-1} = 2\tau A v_n + w_n, \quad n \in Z, \tag{7}$$

де

$$v_n := x(n\tau) - u_n(\tau),$$

$$w_n := (x(n+1)\tau - x(n-1)\tau) - 2\tau x'(n\tau).$$

Згідно з лемою 2 і співвідношенням (2) маємо

$$\forall n \in Z: \ \|w_n\| \le 2\tau \sup_{|\theta|<\tau} \| x'(n\tau+\theta) - x'(n\tau)\| =$$

$$= 2\tau \sup_{|\theta|<\tau} \| A\big(x(n\tau+\theta) - x(n\tau)\big) + f(n\tau+\theta) - f(n\tau)\| \le$$

$$\le 2\tau \sup_{|\theta|<\tau} \big(2\tau \|A\| \| x'(n\tau+\theta)\| + \|f(n\tau+\theta) - f(n\tau)\|\big) \le$$

$$\le 4\tau^2 \|A\| (\|A\| \|x\|_\infty + \|f\|_\infty) + 2\tau \sup_{|\theta|<\tau} \|f(n\tau+\theta) - f(n\tau)\|.$$

Скориставшись рівномірною неперервністю f і тим, що розв'язок диференціального рівняння (2) обмежений сталою, яка залежить тільки від A і $\|f\|_\infty$, зробимо висновок

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \tau_2 > 0 \qquad \forall 0 < \tau < \tau_2 \quad \forall n \in z: \ \| w_n \| < \tau \delta. \tag{8}$$

Додатково припустимо, що $\sigma(A) \subset C_+$. Зафіксуємо $\tau > 0$ і покладемо [3, c. 455]

$$G_\tau := \sqrt{\tau^2 A^2 + I},$$

$$C_j(\tau) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2} G_\tau^{-1} (\tau A - G_\tau)^j, & j \ge 0, \\ -\dfrac{1}{2} G_\tau^{-1} (G_\tau - \tau A)^{-j}, & j < 0. \end{cases}$$

Тоді при $j \ge 0$

$$C_j(\tau) := \frac{1}{4\pi i} \int_{\partial D} \frac{\left(\tau\xi - \sqrt{\tau^2\xi^2 + 1}\right)^j}{\sqrt{\tau^2\xi^2 + 1}} R(A,\xi)\, d\xi,$$

де ∂D — границя такої допустимої для оператора A області D, що $(D \cup \partial D) \subset C_+$, $R(A, \xi)$ — резольвента оператора A.

Аналогічна формула справджується і при $j < 0$. Оскільки ∂D — компактна множина, то

$$\exists L > 0 \quad \exists \xi_0 \in \partial D \qquad \forall j \in Z:$$

$$\| C_j(\tau) \| \le L \left| \sqrt{\tau^2 \xi^2 + 1} - \tau\xi_0 \right|^{|j|} =: L d^{|j|}.$$

Тому

$$\sum_{j \in z} \| C_j(\tau) \| \le L \, \frac{1+d}{1-d}. \tag{9}$$

Отже, визначена послідовність

$$v_n := \sum_{k \in Z} C_{n-k}(\tau) w_k, \qquad n \in Z.$$

Неважко переконатися, що ця послідовність задовольняє рівності (7). Внаслідок леми 1 вона є єдиним розв'язком різницевого рівняння (7). Тому з урахуванням леми 3 та оцінок (8), (9) отримуємо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau_3 > 0 \qquad \forall\, 0 < \tau < \tau_3 \qquad \forall n \in Z:$$
$$\| x(n\tau) - u_n(\tau) \| = \| \sum_{k \in Z} C_{n-k}(\tau) w_k \| < \varepsilon.$$

Випадок, коли $\delta(A) \subset C_- := \{ z \in C \mid \operatorname{Re} z < 0 \}$, зводиться до попереднього за допомогою заміни змінної $s_n := v_{-n}$, $n \in Z$, у різницевому рівнянні (7).

З умови (1) випливає, що в загальному випадку $\sigma(A) = \sigma_+ \cup \sigma_-$, де $\sigma_+ \subset C_+$, $\sigma_- \subset C_-$. Тоді внаслідок теореми про розклад [3, с. 445] розв'язок рівняння (7) є сумою розв'язків двох різницевих рівнянь, що розглядаються в інваріантних відносно оператора A підпросторах B, відповідних частинам спектра σ_+ та σ_-. Для цих рівнянь твердження теореми 1 встановлено раніше.

Теорема 1 доведена.

***Зауваження.* 1.** Якщо виконується умова (1), то для довільної неперервної на R і періодичної з періодом $\omega > 0$ функції f диферинціальне рівняння (2) має єдиний ω-періодичний розв'язок [1, с. 127]. За допомогою теореми 1 цей розв'язок можна апроксимувати розв'язками відповідних різницевих рівнянь.

2. Обмежений розв'язок різницевого рівняння (3) можна наблизити розв'язками відповідних крайових різницевих задач. Дійсно, рівнянню (4) відповідає набір крайових різницевих задач виду

$$t_{n+1} - t_{n-1} = T t_n + y_n, \quad -p < n < q, \quad t_{-p} = a, \quad t_q = b.$$

Тут a, b — фіксовані елементи простору B; p, q — натуральні числа. Тому досить записати рівняння (4) у вигляді

$$i^{n+1} x_{n+1} + i^{n-1} x_{n+1} = i T(i^n x_n) + i^{n+1} y_n, \quad n \in Z,$$

і застосувати результат роботи [4].

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
2. *Городний М. Ф.* Ограниченные и переодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. мат журн. – 1991. – **43**, № 1. – С. 41–46.
3. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 587 с.
4. *Городний М. Ф.* Аппроксимация ограниченного решения одного разностного уравнения решениями соответствующих краевых задач в банаховом пространстве // Мат. заметки. – 1992. – **51**, Вып. 4. – С. 17–22.

Одержано 06.02.97