УДК 519.21

А. В. Золота, А. Ю. Шевляков (Донец. ун-т)

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ВІДНОВЛЕННЯ ПУАССОНОВОГО ПОЛЯ НА ПЛОЩИНІ

The restoration of the Poisson field at a point is performed on the basis of its values generated by monotonically increasing curve: the best mean square estimate and its error are found.

Проведено відновлення пуассонового поля в точці за його значеннями, що утворені монотонно зростаючою кривою: знайдено найкращу середньоквадратичну оцінку та її похибку.

Нехай на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ задано пуассонове поле $\mu(x, y)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, для якого виконуються умови:

1) для будь-яких $x \geq 0$, $y \geq 0$ $\mu(x, y)$ набуває додатні, цілі значення і

$$P\{\mu(x, 0) = 0\} = P\{\mu(0, y) = 0\} = 1;$$

2) для будь-яких $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ та $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_m$, $n \geq 1$, $m \geq 1$, випадкові величини $\mu(x_0, y_0)$ і

$$\mu_{ij} = \mu(x_i, y_j) - \mu(x_{i-1}, y_j) - \mu(x_i, y_{j-1}) + \mu(x_{i-1}, y_{j-1})$$

— незалежні пуассонові величини з параметрами $(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{j-1})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Крім цього, виконується умова A: нехай Γ — крива на площині, означена $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, є додатньою монотонно зростаючою функцією, неперервною разом зі своєю похідною першого порядку.

Припустимо, що ми спостерігаємо поле $\mu(x, y)$ на множині Γ, $(x, y) \in \Gamma$, і бажаємо відновити поле μ в точці $(u, v) \notin \Gamma$. Під відновленням розуміємо знаходження найкращої середньоквадратичної оцінки $\mu(u, v)$, побудованої за значеннями $\mu(x, y)$, якщо $(x, y) \in \Gamma$. Таку оцінку задає умовне математичне сподівання

$$m(u, v) = \mathrm{M}\{\mu(u, v) / \gamma_\Gamma\}, \tag{1}$$

а її середньоквадратична похибка

$$d(u, v) = \mathrm{M}\{(\mu(u, v) - m(u, v))^2 / \gamma_\Gamma\}, \tag{2}$$

де $\gamma_\Gamma = \sigma\{\mu(x, y) \colon (x, y) \in \Gamma\}$ — мінімальна σ-алгебра, утворена значеннями $\mu(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma$.

Нехай $\mu(x) = \mu(x, f(x))$, $a \leq x \leq b$, $f(x)$ задовольняє A. Тоді $\gamma_\Gamma = \sigma\{\mu(x) \colon x \in [a, b]\}$, і через умови A та 1, 2 на пуассонове поле $\mu(x)$ — пуассонів процес з параметром $\lambda(x) = x f(x)$, $x \in [a, b]$.

Лема. *Нехай* η *— випадкова величина з* $\mathrm{M}|\eta|^2 < \infty$; $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— додатні, цілі випадкові величини з* $\mathrm{M}\xi_j^2 < \infty$, $j = \overline{1, n}$; $\mathcal{B} = \sigma\{\xi_j, j = \overline{1, n}\}$; $\varphi(s, \vec{t})$ *— характеристична функція вектора* $(\eta, \vec{\xi})$, $\vec{\xi} = (\xi_j)$, $j = \overline{1, n}$. *Для того, щоб*

$$\mathrm{M}\{\eta / \mathcal{B}\} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_j,$$

$$\mathrm{M}\{(\eta - \mathrm{M}\{\eta / \mathcal{B}\})^2 / \mathcal{B}\} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^2 \xi_j,$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\left.\frac{\partial \varphi(s,\vec{t})}{\partial s}\right|_{s=0} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \varphi(0,\vec{t})}{\partial t_j}, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \varphi(s,\vec{t})}{\partial s^2}\right|_{s=0} = i\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2 \frac{\partial \varphi(0,\vec{t})}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_k\alpha_j \frac{\partial^2 \varphi(0,\vec{t})}{\partial t_k \partial t_j}, \tag{4}$$

де α_j, β_j^2, $j=\overline{1,n}$, *— невипадкові величини.*

Наведена лема випливає з леми 1.1.3 з [1] і становить її частковий випадок.

Теорема 1. *Нехай має місце сформульована задача відновлення для кривої* Γ *з умовою* A. *Якщо* $a < u < f^{-1}(v) < b$, $f(a) < v < f(b)$, *тоді з ймовірністю* 1

$$m(u,v) = \mu(u) + \int_{u}^{f^{-1}(v)} A(x)\, d\mu(x), \tag{5}$$

$$d(u,v) = \int_{u}^{f^{-1}(v)} A(x)(1 - A(x))\, d\mu(x), \tag{6}$$

де

$$A(x) = \frac{u f'(x)}{u f'(x) + f(x)}. \tag{7}$$

Доведення. Нехай $\Delta_n = \{x_{jk_n},\ j=\overline{1,k_n}\}$ — множина точок осі абсцис, які задовольняють наступні умови:

a) $a = x_{0k_n} < x_{1k_n} < \ldots < x_{k_n k_n} = b$;

b) $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ та $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\le j\le k_n} (x_{jk_n} - x_{(j-1)k_n}) = 0$;

d) для будь-якого $j=\overline{1,k_n}$ існує $i=\overline{1,k_{n+1}}$ таке, що $x_{jk_n} = x_{ik_{n+1}}$.

Далі індекс k_n в x_{k_n} опускаємо. Нехай $n = k_n$, а вісь ординат розбито аналогічно. Разом з умовами a – d припустимо, що виконуються такі умови:

e) для будь-якого $n > 1$ існують деякі p і q такі, що

$$u = x_p, \quad v = y_q, \quad p=\overline{1,n-1}, \quad q=\overline{1,n-1}.$$

Позначимо $\vec{\mu} = (\mu_j) \in R^{n+1}$, де

$$\mu_j = \begin{cases} \mu(x_0,y_0), & j=0, \\ \mu(x_j,y_j) - \mu(x_{j-1},y_{j-1}), & j=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{8}$$

та $\gamma_{\Gamma_n} = \sigma\{\mu_j,\ j=\overline{0,n}\}$.

З умов a – d на Δ_n випливає, що $\gamma_{\Gamma_1} \subset \gamma_{\Gamma_2} \subset \ldots \subset \gamma_{\Gamma_n} \subset \ldots$ і $\gamma_\Gamma = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_{\Gamma_n}\right)$ — мінімальна σ-алгебра, яка містить $\bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_{\Gamma_n}$.

Застосовуючи теорему П. Лєві [2, с. 55], бачимо, що формули (1), (2) — границі з ймовірністю 1, коли $n\to\infty$, виразів

$$m_n = \mathrm{M}\{\mu(x_p, y_q)/\gamma_{\Gamma_n}\}$$

та

$$d_n = \mathrm{M}\{(\mu(x_p, y_q) - m_n)^2/\gamma_{\Gamma_n}\}$$

відповідно.

З іншого боку, за лемою 1.1.3 із роботи [1] маємо

$$m_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \mu_j, \tag{9}$$

$$d_n = \sum_{j=0}^{n} \beta_j^2 \mu_j, \tag{10}$$

де μ_j, $j = \overline{0, n}$, задовольняють співвідношенням (8).

Знайдемо α_j і β_j^2, $j = \overline{0, n}$:

$$\varphi(s, \vec{t}) = \mathrm{M} \exp\left\{i\left(s\mu(u, v) + \sum_{j=0}^{n} t_j \mu_j\right)\right\} =$$

$$= \mathrm{M} \exp\left\{i\left(\sum_{j=0}^{p} (s + t_j)\mu_j + \sum_{j=p+1}^{q} ((s + t_j)\mu_j^{(1)} + t_j \mu_j^{(2)}) + \sum_{j=q+1}^{n} t_j \mu_j\right)\right\},$$

де

$$\mu_j^{(1)} = \mu(x_p, y_j) - \mu(x_p, y_{j-1}),$$

$$\mu_j^{(2)} = \mu_j - \mu_j^{(1)}, \quad j = \overline{p+1, q},$$

$$s \in R^1, \quad \vec{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_n) \in R^{n+1}.$$

Із властивостей пуассонового поля випливає

$$\varphi(s, \vec{t}) = \exp\left\{\sum_{j=0}^{p} \lambda_j (e^{i(s+t_j)} - 1) + \sum_{j=p+1}^{q} \lambda_j^{(1)} (e^{i(s+t_j)} - 1) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=p+1}^{q} \lambda_j^{(2)} (e^{it_j} - 1) + \sum_{j=q+1}^{n} \lambda_j (e^{it_j} - 1)\right\},$$

де

$$\lambda_j = \begin{cases} x_0 y_0, & j = 0, \\ x_j y_j - x_{j-1} y_{j-1}, & j = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{11}$$

$$\lambda_j^{(1)} = x_p(y_j - y_{j-1}), \quad \lambda_j^{(2)} = \lambda_j - \lambda_j^{(1)}, \quad j = \overline{p+1, q}. \tag{12}$$

Тоді з рівностей (3), (4) маємо

$$\alpha_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{0, p}, \\ \dfrac{\lambda_j^{(1)}}{\lambda_j}, & j = \overline{p+1, q}, \\ 0, & j = \overline{q+1, n}, \end{cases} \tag{13}$$

$$\beta_j = \begin{cases} 0, & j = \overline{0, p}, \\ \alpha_j(1-\alpha_j), & j = \overline{p+1, q}, \\ 0, & j = \overline{q+1, n}. \end{cases} \tag{14}$$

Таким чином, з (11), (12) та (13), (14) випливає

$$m_n = \mu_p + \sum_{j=p+1}^{q} \alpha_j \mu_j, \tag{15}$$

$$d_n = \sum_{j=p+1}^{q} \alpha_j (1-\alpha_j) \mu_j. \tag{16}$$

Далі, за теоремою про середнє маємо

$$\alpha_j = \frac{x_p (y_j - y_{j-1})}{x_j y_j - x_{j-1} y_{j-1}} = \frac{x_p f'(\hat{x}_j)}{x_j f'(\hat{x}_j) + f(x_{j-1})}, \qquad \hat{x}_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

Переходячи до границі у (16), (17), коли $n \to \infty$, за теоремою П. Лєві [2] з імовірністю 1 випливає справедливість рівностей (5) – (7).

***Наслідок* 1.** *Нехай* $f(x) = \dfrac{d}{1-cx}$, $d > 0$, $c \in \left(0, \dfrac{1}{f^{-1}(v)}\right)$. *Тоді з імовірністю* 1

$$m(u, v) = (1-cu)\mu(u) + cu\mu(f^{-1}(v)),$$

$$d(u, v) = cu(1-cu)(\mu(f^{-1}(v)) - \mu(u)).$$

Доведення. Через те, що $d > 0$, $c \in \left(0, \dfrac{1}{f^{-1}(v)}\right)$, функція $f(x)$ задовольняє умову A, $f'(x) = \dfrac{c f(x)}{1-cx}$. Звідки $c = \dfrac{f'(x)}{x f'(x) + f(x)}$. За теоремою 1 $A(x) = cu$. Підставивши $A(x)$ у (5), (6) завершуємо доведення.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Якщо* $a < f^{-1}(v) < u < b$, $f(a) < v < f(b)$, *то з імовірністю* 1

$$m(u, v) = \mu(f^{-1}(v)) + \int_{f^{-1}(v)}^{u} B(x)\, d\mu(x), \tag{17}$$

$$d(u, v) = \int_{f^{-1}(v)}^{u} B(x)(1 - B(x))\, d\mu(x), \tag{18}$$

де

$$B(x) = \frac{v}{x f'(x) + f(x)}. \tag{19}$$

Доведення. Схема доведення теореми 2 цілком аналогічна доведенню теореми 1. Враховуючи (8) і те, що $q < p$, маємо

$$\mu(u, v) = \sum_{j=0}^{q} \mu_j + \sum_{j=q+1}^{p} \mu_j^{[1]},$$

де

$$\mu_j^{[1]} = \mu(x_j, y_q) - \mu(x_{j-1}, y_q),$$
$$\mu_j = \mu_j^{[1]} + \mu_j^{[2]}, \quad j = \overline{q+1, p}.$$

Тоді

$$\varphi(s, \vec{t}) = \exp\left\{ \sum_{j=0}^{q} \lambda_j (e^{i(s+t_j)} - 1) + \sum_{j=q+1}^{p} \lambda_j^{[1]} (e^{i(s+t_j)} - 1) + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=q+1}^{p} \lambda_j^{[2]} (e^{it_j} - 1) + \sum_{j=p+1}^{n} \lambda_j (e^{it_j} - 1) \right\},$$

де λ_j, $j = \overline{0, n}$, означені формулами (12);

$$\begin{aligned} \lambda_j^{[1]} &= (x_j - x_{j-1}) y_q, \\ & \qquad\qquad\qquad j = \overline{q+1, p}. \\ \lambda_j^{[2]} &= \lambda_j + \lambda_j^{[1]}, \end{aligned} \tag{20}$$

Із рівностей (3), (4) випливає, що (15), (16) можна записати у вигляді

$$m_n = \mu_q + \sum_{j=q+1}^{p} \alpha_j \mu_j, \quad j = \overline{q+1, p} \tag{21}$$

$$d_n = \sum_{j=q+1}^{p} \alpha_j (1 - \alpha_j) \mu_j, \quad j = \overline{q+1, p}, \tag{22}$$

де

$$\alpha_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{0, q}, \\ \dfrac{\lambda_j^{[1]}}{\lambda_j}, & j = \overline{q+1, p}, \qquad \lambda_j^{[1]} \text{ означені формулами (20)}. \\ 0, & j = \overline{p+1, n}, \end{cases}$$

Переходячи до границі у (21), (22), коли $n \to \infty$, і користуючись теоремою про середнє та теоремою П. Лєві [2], з імовірністю 1 випливає справедливість рівностей (17) – (19).

Наслідок 2. *Нехай* $f(x) = r + \dfrac{s}{x}$, $s < 0$, $r > -\dfrac{s}{f^{-1}(v)}$. *Тоді з імовірністю* 1

$$m(u, v) = \left(1 - \frac{v}{r}\right) \mu(f^{-1}(v)) + \frac{v}{r} \mu(u),$$
$$d(u, v) = \frac{v}{r}\left(1 - \frac{v}{r}\right)\left(\mu(u) - \mu(f^{-1}(v))\right).$$

Доведення. Через те, що $s < 0$, $r > -\dfrac{s}{f^{-1}(v)}$, функція $f(x)$ задовольняє умову А. Похідна $f'(x) = -\dfrac{s}{x^2}$. Тоді $x f'(x) + f(x) = r$ і за теоремою 2 $B(x) = \dfrac{v}{r}$. Підстановкою $B(x)$ у (17), (18) завершуємо доведення.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Якщо* $0 \le u \le a$, $0 < v < f(a)$, *то з імовірністю* 1

$$m(u, v) = \frac{uv}{a f(a)} \mu(a, f(a)),$$

$$d(u, v) = \frac{uv}{a f(a)} \left(1 - \frac{uv}{a f(a)}\right) \mu(a, f(a)).$$

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Якщо* $0 \le u \le a$, $f(a) < v < f(b)$, *то з імовірністю* 1

$$m(u, v) = \frac{u}{a} \mu(a, f(a)) + \int_a^{f^{-1}(v)} A(x)\, d\mu(x),$$

$$d(u, v) = \frac{u}{a}\left(1 - \frac{u}{a}\right) \mu(a, f(a)) + \int_a^{f^{-1}(v)} A(x)(1 - A(x))\, d\mu(x),$$

де $A(x)$ *означено співвідношенням* (8).

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Якщо* $a < u < b$, $0 \le v \le f(a)$, *то з імовірністю* 1

$$m(u, v) = \frac{v}{f(a)} \mu(a, f(a)) + \int_0^u B(x)\, d\mu(x),$$

$$d(u, v) = \frac{v}{f(a)}\left(1 - \frac{v}{f(a)}\right) \mu(a, f(a)) + \int_a^u B(x)(1 - B(x))\, d\mu(x),$$

де $B(x)$ *означено рівнянням* (19).

Доведення теорем 3 – 5 цілком аналогічні доведенням теорем 1, 2.

1. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао К. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. – М.: Наука, 1971. – 668 с.
2. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.

Одержано 20.08.97