УДК № 512..553.1

В. С. Мазорчук (Київ. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО УНІТАРИЗОВНІ МОДУЛІ НАД УЗАГАЛЬНЕНИМИ АЛГЕБРАМИ ВІРАСОРО

We classify unitarizable modules with highest weight and unitarizable modules from intermediate series over the generalized Virasoro algebras.

Класифіковано унітаризовні модулі зі старшою вагою та унітаризовні модулі проміжної серії над узагальненими алгебрами Вірасоро.

1. Модулі зі старшою вагою. Класична комплексна алгебра Вірасоро $\mathfrak{V}$ — це нескінченновимірна алгебра Лі з базисом C, e_i, $i \in \mathbb{Z}$, де C — центральний елемент, і дужка Лі визначена наступним чином:

$$[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j} + \frac{i^3-i}{12}C\delta_{i,-j}.$$

Модулем Верма $M(c, h)$, $c, h \in \mathbb{C}$, над $\mathfrak{V}$ називається універсальний модуль, породжений ненульовим елементом υ зі старшою вагою h, що означає $e_0\upsilon = h\upsilon$, $C\upsilon = c\upsilon$ та $e_i\upsilon = 0$, $i \in \mathbb{N}$. Число c називають „центральним зарядом" модуля. Відомо [2–4], що єдиний незвідний фактор-модуль модуля $M(c, h)$, c, $h \in \mathbb{R}$, є унітаризовним (відносно стандартної інволюції на $\mathfrak{V}$) тоді та тільки тоді, коли $h \leq 0$, $c \geq 1$ або $(c, h) = (c_m, h^m_{r,s})$, $m, r, s, \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq s \leq r \leq m+1$, де

$$c_m = 1 - \frac{6}{(m+2)(m+3)}; \qquad h^m_{r,s} = -\frac{((m+3)r-(m+2)s)^2-1}{4(m+2)(m+3)}.$$

Нагадаємо, що незвідні фактор-модулі модулів Верма вичерпують множину незвідних модулів, породжених елементами старшої ваги.

Існує багато різних узагальнень класичної алгебри Вірасоро (див. бібліографію в роботі [6]). Найбільш природнім та найбільш дослідженим узагальненням є так звані узагальнені алгебри Вірасоро $\mathfrak{G}_P$ (вищого рангу), асоційовані з адитивною підгрупою P поля комплексних чисел. Алгебра $\mathfrak{G}_P$ має базис C, e_x, $x \in P$, де C — центральний елемент, та дужка Лі визначена наступним чином:

$$[e_x, e_y] = (y-x)e_{x+y} + \frac{x^3-x}{12}C\delta_{x,-y}, \qquad x, y \in P.$$

Метою даної роботи є вивчення унітаризовних модулів зі старшою вагою над алгеброю $\mathfrak{G}_P$, відносно до стандартної інволюції $*$, що задається умовами $e_x^* = e_{-x}$, $x \in P$ та $C^* = C$. Надалі вважатимемо, що P — адитивна підгрупа $\mathbb{R}$ Основним результатом є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $\mathfrak{G}_P$ не є ізоморфною до $\mathfrak{V}$. Тоді єдиним унітаризовним модулем зі старшою вагою над $\mathfrak{G}_P$ є тривіальний модуль.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що $\mathfrak{G}_P$ не є ізоморфною до $\mathfrak{V}$ тоді та тільки тоді, коли $P \neq \mathbb{Z}$. Якщо $P \neq \mathbb{Z}$, тоді твердження про неізоморфність випливає зі стандартного P-градуювання на $\mathfrak{G}_P$ та єдиності підалгебри Картана $\langle e_0, C\rangle$ (остання є єдиною максимальною підалгеброю, діагоналізованою в приєднаному зображенні алгебри $\mathfrak{G}_P$). Якщо ж $P \simeq \mathbb{Z}$ та x — твірний P, тоді легко бачити, що відображення $e_{ix} \mapsto x^{-1} e_i$, $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $C \mapsto xC$ продовжується до ізоморфізму $\mathfrak{G}_P$ на $\mathfrak{V}$.

Отже, можемо вважати, що $P \neq \mathbb{Z}$. Так само, як це зроблено вище, легко довести, що для довільного ненульового дійсного числа α алгебра $\mathfrak{G}_{\alpha P}$ є ізоморфною до $\mathfrak{G}_P$. Отже, можемо вважати, що $\mathbb{Z} \subset P$, тобто в $\mathfrak{G}_P$ фіксована канонічна підалгебра, що є ізоморфною $\mathfrak{V}$.

Нехай $V(c, h)$, $c, h \in \mathbb{R}$, позначає незвідний модуль над $\mathfrak{G}_P$, породжений вектором υ зі старшою вагою h та центральним зарядом c. Тоді $\mathfrak{V}$-модуль $U(\mathfrak{V})\upsilon$, де $U(\mathfrak{V})$ позначає універсальну обгортуючу алгебру алгебри $\mathfrak{V}$, є унітаризовним. Отже, параметри (c, h) мають належати списку, наведеному на початку статті.

Якщо $c = 0$, тоді $c = c_1$, а отже, $h = h^1_{1,1} = 0$, тобто V є тривіальним $\mathfrak{G}_P$-модулем. Очевидно, що в цьому випадку V унітаризовний.

Припустимо, що $c \neq 0$. Тоді $c > 0$. Для довільного ненульового $x \in P$ розглянемо алгебру $\mathfrak{G}(x)$, породжену елементами e_x, e_{2x}, e_{-x} та e_{-2x}. Легко бачити, що $\mathfrak{G}(x) \simeq \mathfrak{V}$. Крім цього, з явного вигляду ізоморфізму, наведеного вище, випливає, що $\mathfrak{G}(x)$-модуль $M(x) = U(\mathfrak{G}(x))\upsilon$ має центральний заряд xc. Оскільки $P \neq \mathbb{Z}$, можемо вибрати додатний елемент $x \in P$, як завгодно малий за абсолютною величиною. Це означає, що $\mathfrak{G}(x)$-підмодуль $M(x)$ може мати як завгодно малий додатний центральний заряд, наприклад, менший за 1/2. Згідно з класичним списком, ненульовий центральний заряд унітаризовного модуля не може бути меншим за 1/2. Отже, в отриманому випадку модуль $M(x)$, а з ним і модуль V, не є унітаризовним.

Використовуючи запропоновану в доведенні теореми техніку вибору різних підалгебр в $\mathfrak{G}_P$, ізоморфних до класичної алгебри Вірасоро, можна отримати просте доведення такого цікавого результату.

Теорема 2. *Нехай V позначає нетривіальний незвідний $\mathfrak{V}$-модуль зі старшою вагою. Тоді розмірності вагових підпросторів V не є обмеженими в сукупності.*

Доведення. Нехай V є незвідним фактор-модулем модуля Верма $M(c, h)$. Позначимо $S_{c,h}(\cdot, \cdot)$ форму Шаповалова на $M(c, h)$. Відома [1] формула визначника $\det S^m_{c,h}(\cdot, \cdot)$ цієї форми на ваговому підпросторі $M(c, h)_{h-m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Як легко бачити, перетин нулів цієї функції з довільною дійсною прямою в $\mathbb{C}^2$ є скінченним. Розглядаючи підалгебри $\mathfrak{V}_k \subset \mathfrak{V}$, що відповідають підгрупам $k\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, та використовуючи той факт, що $(c, h) \neq (0, 0)$, легко отримуємо, що при фіксованому m існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що $\det S^{km}_{c,h}(\cdot, \cdot) \neq 0$ при обмеженні на $\mathfrak{V}_k$. Це означає, що розмірність вагового підпростору V_{h-km} більша за $m - 1$. Останнє виплиає з того, що розмірність V_{h-km} не менша за ранг обмеження $S^{km}_{c,h}(\cdot, \cdot)$, який дорівнює $Part(m)$, де $Part$ — функція розбиттів. Очевидно $Part(m) > m - 1$.

2. Модулі проміжної серії. Іншим добре відомим прикладом простих модулів над $\mathfrak{G}_P$ є сім'я так званих модулів проміжної серії. А саме, модулем проміжної серії $V(a, b)$, a, $b \in \mathbb{C}$, називається $\mathfrak{G}_P$-модуль з нульовим центральним зарядом, з базисом υ_u, $u \in \mathbb{P}$, та дією $e_s\upsilon_u = (as + b + u)\upsilon_{s+u}$, і також всі прості підфактори цих модулів. Існує гіпотеза, що подібними модулями вичерпуються прості модулі Харіш–Чандри у випадку $P \neq \mathbb{Z}$. Однак ця гіпотеза доведена лише для $P = \mathbb{Q}$ [5]. Основним результатом про унітаризовність модулів проміжної серії є наступна теорема.

Теорема 3. *Серед $\mathfrak{G}_P$-модулів проміжної серії унітаризовними є лише тривіальний модуль та модулі* $V(1/2, b)$, $b \in \mathbb{R}$.

Доведення. Унітаризовність тривіального модуля очевидна. Унітаризовність модуля $V(1/2, b)$, $b \in \mathbb{R}$, випливає з формул $e_s v_u = (s/2 + b + u) v_{s+u}$; $e_{-s} v_{s+u} = (s/2 + b + u) v_u$, які легко отримати з означення модуля $V(a, b)$. З цього ж означення $V(a, b)$ також легко отримати

$$e_{-s} e_s v_u = ((u + b + s/2)^2 - s^2(a - 1/2)^2) v_u.$$

Звідси, необхідною умовою унітаризовності $V(a, b)$ є умова $(u + b + s/2)^2 - s^2(a - 1/2)^2 \geq 0$ для довільних $u, s \in P$. Прямим підрахунком отримуємо $b \in \mathbb{R}$ та $a = 1/2$. Випадок нетривіальних підфакторів звідних модулів $V(0, s)$, $V(1, s)$, $s \in P$, розглядається аналогічно.

1. *Feigin B., Fuchs D.* Representations of the Virasoro algebra, in: Representations of Lie groups and algebras // Adv. Stud. Cont. Math. – New York: Gordon and Breach, 1990. – P. 447–554.
2. *Friedan D., Qui Z., Shenker S.* Conformal invariance, unitarity and critical exponent in two dimensions // Phys. Rev. Lett. – 1984. – **52**. – 1575 p.
3. *Goddar P., Kent A.,Olive D.* Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras // Communs Math. Phys. – 1986. – **103**. – S. 105–119.
4. *Kac V., Wakimoto M.* Unitarizable highest weight representations of the Virasoro, Neveu – Schwarz and Ramond algebras // Lect. notes Phys. – 1986 – **261**. – P. 345–371.
5. *Mazorchuk V.* Classification of simple Harish–Chandra modules over $\mathbb{Q}$-Virasoro Algebra. – (Preprint / Bielefeld Univ.; 97–019).
6. *Patera J., Zassenhaus H.* The higher rank Virasoro Algebras // Communs Math. Phys. – 1991. – **136**. – S. 1–14.

Одержано 31.10.97