УДК 517.946.9

**А. М. Нетесова** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

A group of invariance is obtained for certain boundary-value problem in the sea physics.

Отримано групу інваріантності однієї крайової задачі фізики моря.

Работа посвящена изучению инвариантности следующей краевой задачи, которая часто встречается при исследовании реальных физических процессов в водной среде (таких, например, как процессы распространения тепловых волн в толще океана, изменения солености морской воды, обусловленные дождевыми осадками, подводными течениями, притоками речных вод и т. п.) [1]:

$$[f(u_x)u_x]_x - u_t = 0, \qquad 0 < x < \infty, \qquad t > 0; \tag{1}$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < \infty; \qquad [f(u_x)u_x]_x\big|_{x=0} = \frac{q}{\lambda};$$

$$\lim_{x\to\infty} u(x, 0) = 0; \qquad \lim_{x\to\infty}[f(u_x)u_x]_x = 0, \qquad t > 0, \tag{2}$$

где $q$ и $\lambda$ — постоянные величины, отражающие состояние водной среды; $f(u_x)$ — некоторая функция градиента.

Инвариантность решения $U(x, t)$ краевой задачи (если оно существует) вытекает из инвариантности уравнения задачи и ее краевых условий относительно некоторой (одной и той же) группы преобразований.

При рассмотрении задачи (1), (2) будем исходить из установленного факта существования и единственности ее решения [1]. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Нелинейное эволюционное уравнение* (1) *при произвольной функции* $f(u_x)$ *инвариантно относительно алгебры Ли с базисными операторами*

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_t, \qquad X_3 = \partial_u, \qquad X_4 = x\partial_x + 2t\partial_t + u\partial_u. \tag{3}$$

***Доказательство*** теоремы будем проводить, используя технику группового анализа [2]. Отметим, что $\partial_x$, $\partial_t$, $\partial_u$ обозначают производные по соответствующим переменным. Уравнение (1) будем рассматривать как многообразие в пространстве $R^3$ переменных $x$, $y$, $u$.

Для упрощения вычислений введем обозночения: $u_x = p$, $u_t = q$, $u_{xx} = r$, $u_{xt} = s$, $u_{tt} = l$ и запишем уравнение (1) в виде

$$[f(p)p]_x - q_t = 0. \tag{1'}$$

Инфинитезимальный оператор группы преобразований, допускаемый уравнением (1), ищем в виде

$$X = \xi\partial_x + \eta\partial_t + \zeta\partial_u. \tag{4}$$

Коэффициенты $\xi = \xi(x, t, u)$, $\eta = \eta(x, t, u)$, $\zeta = \zeta(x, t, u)$ определяются как решения определяющего уравнения, которое вытекает из критерия инвариантности относительно второго продолжения оператора $X - \hat{\hat{X}}$:

$$\hat{\hat{X}}[f'p\,r + fr - \mathrm{q}]\big|_{(1')} =$$

© А. М. НЕТЕСОВА, 1998

$$= F[\zeta_x + p\,\zeta_u - p\,\xi_x - p^2\xi_u - Fr(\eta_x + \eta_u)] - \zeta_t - Fr\zeta_u +$$

$$+ p\,\xi_t + Fr(p\,\xi_u + \eta_t + Fr\eta_u) + F[\zeta_{xx} + 2p\,\zeta_{xu} + p^2\zeta_{uu} - p\,\xi_{xx} - 2p^2\xi_{xu}] -$$

$$- Fr(\eta_{xx} + 2p\,\eta_{xu} - p^2\eta_{uu}) + r(\zeta_u - 2\xi_x - 3p\,\xi_u - F\eta_u) -$$

$$- 2s(\eta_x + p\,\eta_u) - p^3\xi_{uu}] = 0, \qquad (5)$$

где $F = F(p) = f'p + f$.

Поскольку величины $p, q, r, s$ могут принимать любые значения, а координаты $\xi$, $\eta$, $\zeta$ от них не зависят, уравнение (5) допускает расщепление по указанным величинам. Приравнивая нулю коэффициент при $s$, получаем равенство $(f'p + f)(\eta_x + p\,\eta_u) = 0$, из которого (при условии $f(p) \neq \text{const}$ и $f(p) \neq -c/p$, что соответствует линейности уравнения (1)) имеем

$$\eta_x = 0, \qquad \eta_u = 0. \qquad (6)$$

С учетом этого расщепление по $r$ приводит к уравнениям

$$\xi_u = 0, \qquad \eta_t = 2\xi_x. \qquad (7)$$

В общем случае функция $F(p)$ — произвольная, не равная тождественно 0 функция своего аргумента. Тогда при дальнейшем расщеплении уравнения (5) получаем равенства

$$\xi_t = 0, \quad \zeta_t = 0, \quad \zeta_{xx} = 0, \quad \zeta_{xu} = 0, \quad \zeta_{uu} = 0, \quad \zeta_u = \xi_x, \qquad (8)$$

дополняющие системы (6) и (7) до полной системы определяющих уравнений для коэффициентов $\xi$, $\eta$ и $\zeta$ базисных операторов алгебры Ли уравнения (1). В результате решения этой системы получаем $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = x$; $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 1$, $\eta_3 = 0$, $\eta_4 = 2t$; $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = 0$, $\zeta_3 = 1$, $\zeta_4 = x$.

Это означает, что ядро алгебры Ли уравнения (1) при произвольной функции $f(u_x)$ представляется операторами (3). Теорема доказана.

Теперь для установления инвариантности краевой задачи (1), (2) рассмотрим группу преобразований с инфинитезимальным оператором, равным линейной комбинации базисных операторов (3)

$$X = \sum_{i=1}^{4} a_i X_i = (a_4 x + a_1)\partial_x + (a_4 t + a_2)\partial_t + (a_4 u + a_3)\partial_u,$$

а краевые условия (2) представим в обобщенном виде

$$u(x, t_0) = \psi(x), \quad x > x_0; \qquad [f(u_x)u_x]_x|_{x=x} = \varphi(t);$$

$$\lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0; \qquad \lim_{x\to\infty} [f(u_x)u_x]_x = 0, \quad t > t_0, \qquad (9)$$

Рассмотрим в пространстве $R^3$ переменных $x, t, U$ многообразие $Y$: $u = U(x, t)$, где $U(x, t)$ — решение краевой задачи (1), (9) и дифференциальное многообразие $G$: $f(U_x)U_x = U_t$ в пространстве $R^5$ переменных $x, t, u, U, U_x, U_t$. Тогда из критерия Ли инвариантности уравнений (9) получаем соотношения для функций $\psi(x)$ и $\varphi(t)$, при которых краевые условия (9) будут инвариантными.

$$a_4\psi + a_3 - (ax_4 + a_1)\psi' - (2a_4 t_0 + a_2)[f(\psi')\psi']' = 0, \quad x > x_0;$$

$$(a_4 x_0 + a_1)F_t(x, t) + (2a_4 t + a_2)\varphi' = 0, \quad t > t_0. \qquad (10)$$

Полагая в (10) $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\psi(x) = 0$, $\varphi(t) = q/\lambda$, получаем $a_1 = a_3 = 0$, $a_2$, $a_4$ — произвольные постоянные. Не ограничивая общности, принимаем $a_2 = 0$, $a_4 = 1$. Тогда группой инвариантности краевых условий (2) рассматриваемой задачи будет группа масштабных преобразований

$$\bar{x} = \alpha x, \qquad \bar{t} = \alpha^2 t, \qquad \bar{u} = \alpha u, \tag{11}$$

соответствующая базисному оператору $X_4$ алгебры Ли (3) уравнения (1).

Этой группе преобразований соответствует инвариантное автомодельное решение краевой задачи (1), (2), которое через инварианты $\eta$ и $V(\eta)$ группы преобразований (11) выражается в виде

$$u(x, t) = \sqrt{t}\, V(\eta), \qquad \eta = x/\sqrt{t}. \tag{12}$$

Подставив эти выражения в (1), (2), приходим к следующей редуцированной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$[f(V')V']' + \frac{1}{2}(\eta V' - V) = 0, \qquad 0 < \eta < \infty; \tag{13}$$

$$\begin{gathered} f(V')V'\big|_{\eta=0} = \frac{q}{\lambda}, \\ \lim_{\eta\to\infty} V(\eta) = 0, \\ \lim_{\eta\to\infty} [f(V')V'] = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

***Замечание.*** Нетрудно видеть, что первое и третье из краевых условий задачи (1), (2) трансформируются в одно условие $\lim_{\eta\to\infty} V(\eta) = 0$ в редуцированной задаче (13), (14). Это свойство краевых условий является весьма существенным при установлении как их инвариантности, так и инвариантности краевых задач вцелом [3].

В результате приведенных рассуждений можно считать справедливой следующую теорему.

**Теорема 2.** *Краевая задача* (1), (2) *для нелинейного эволюционного уравнения инвариантна относительно группы масштабных преобразований* (11). *Инвариантное автомодельное решение ее выражается через решение* $V(\eta)$ *редуцированной задачи* (13), (14) *формулой* (12).

1. *Березовский А. А.* Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. Ч. II. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – 282 с.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений – М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. *Березовский А. А., Нетесова Т. М.* К вопросу инвариантности краевых задач // Нелинейные динамические процессы физики и механики. – Киев: Наук. думка, 1981. – С. 3–8.

Получено 30.03.98