УДК 517.5

О. В. Поляков (Днепропетров. ун-т)

О НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Best quadrature formulae are obtained for the classes of continuous functions defined through various restrictions on the moduli of continuity with respect to increase and decrease.

Отримано найкращі квадратурні формули для класів неперних функцій, що задаються різними обмеженнями на модулі неперервності за зростом та спаданням.

Пусть $C_{[0;1]}$ — пространство непрерывных функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с соответствующей нормой $\|\cdot\|$. Для $f \in C_{[0;1]}$ положим

$$\omega_{\pm}(f;t) = \sup\{[f(x') - f(x'')] : |x' - x''| \le t,$$
$$\pm x' \ge \pm x'',\ \ x', x'' \in [0;1], t \ge 0\}. \tag{1}$$

Эти функции будем называть модулем непрерывности по возрастанию (+) и модулем непрерывности по убыванию (−). О свойствах этих функций см., например, [1, 2].

Пусть $\omega_+(t), \omega_-(t)$ — заданные модули непрерывности. Через H^{ω_+,ω_-} обозначим класс непрерывных функций f, модули непрерывности по возрастанию и убыванию которых $\omega_+(f;t)$ и $\omega(f;t)$ не превосходят заданных модулей непрерывности соответственно $\omega_+(t)$ и $\omega_-(t)$, т. е.

$$H^{\omega_+,\omega_-} := \{f \in C_{[0;1]}\colon \omega_{\mp}(f;t) \le \omega_{\pm}(t),\ t \ge 0\}.$$

Ясно, что если $\omega_+ = \omega_- = \omega$, то класс H^{ω_+,ω_-} совпадает с хорошо известным в теории приближения классом H^{ω} [3].

Пусть для вычисления интеграла $\int_0^1 \rho(x) f(x)\,dx$, где $f(x)$ — произвольная функция из некоторого класса $\mathcal{M}$, а $\rho(x) \ge 0$ — заданная весовая функция, произведение которой на каждую функцию данного класса интегрируемо на $[0;1]$, применена квадратурная формула

$$\int_0^1 \rho(x) f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(\gamma_k), \qquad 0 \le \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_n \le 1, \tag{2}$$

$\overline{A} = \{A_k\}_{k=0}^{n}$ — вектор коэффициентов, $\overline{\Gamma} = \{\gamma_k\}_{k=0}^{n}$ — вектор узлов.

Для заданной квадратурной формулы положим

$$R^{\pm}(\mathcal{M};\overline{A},\overline{\Gamma}) = \pm \sup_{f \in \mathcal{M}} \left\{ \pm\left(\int_0^1 \rho(x) f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} A_k f(\gamma_k) \right) \right\},$$
$$R^{\pm}(\mathcal{M};\overline{\Gamma}) = \inf_{\overline{A}} R^{\pm}(\mathcal{M};\overline{A},\overline{\Gamma}). \tag{3}$$

Квадратурную формулу (2), реализующую infinum в правой части (3), будем называть наилучшей квадратурной формулой.

Вопросы оптимизации квадратурных формул на различных классах функций изучались многими авторами (см. библиогр. в [4]). В частности, квадратурные формулы вида (2) для классов функций, задаваемых модулем непрерывности, изучались в [5, 7].

В данной работе будут вычислены величины $R^{\mp}(H^{\omega_+,\omega_-};\overline{\Gamma})$ и указаны наилучшие квадратурные формулы. При этом будем использовать рассуждения работ [5, 6].

Теорема 1. *Среди всех квадратурных формул вида (2) с весовой функцией* $\rho(x)$, *фиксированными узлами* $0 \le \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_n \le 1$ *и произвольными коэффициентами* A_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, *наилучшей квадратурной формулой на классе* H^{ω_+,ω_-} *является формула с коэффициентами*

$$A_k^* = \int_{x_k^{\pm}}^{x_{k+1}^{\pm}} \rho(x)\,dx, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

где $x_0^{\pm} = 0$, $x_k^{\pm}$ — *корни уравнения*

$$\omega_{\pm}(x - \gamma_{k-1}) = \omega_{\pm}(\gamma_k - x), \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad x_{n+1}^{\pm} = 1,$$

и при этом

$$R^{\mp}(H^{\omega_+,\omega_-};\overline{\Gamma}) = \pm\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{x_k^{\pm}}^{\gamma_k}\rho(x)\omega_{\mp}(f;\gamma_k - x)\,dx + \int_{\gamma_k}^{x_{k+1}^{\pm}}\rho(x)\omega_{\mp}(f;x-\gamma_k)\,dx\right).$$

Доказательство. Для заданной системы узлов $\overline{\Gamma} = \{\gamma_k\}_{k=1}^{n}$ определим систему точек: $x_0 = 0$, x_k — корень уравнения $\omega_+(x - \gamma_{k-1}) = \omega_-(\gamma_k - x)$, если $\gamma_{k-1} < x < \gamma_k$, $x_{n+1} = 1$ и положим

$$A_k^* = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \rho(x)\,dx.$$

Для квадратурной формулы с коэффициентами A_k^* имеем

$$R^{+}(f;\overline{A}^*,\overline{\Gamma}) = \int_0^1 \rho(x) f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\rho(x) f(\gamma_k)\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\rho(x)[\,f(x) - f(\gamma_k)]\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\int_{x_k}^{\gamma_k}\rho(x)[f(x) - f(\gamma_k)]\,dx + \int_{\gamma_k}^{x_{k+1}}\rho(x)[f(x) - f(\gamma_k)]\,dx\right) \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n}\left(\int_{x_k}^{\gamma_k}\rho(x)\omega_-(f;\gamma_k - x)\,dx + \int_{\gamma_k}^{x_{k+1}}\rho(x)\omega_+(f;x-\gamma_k)\,dx\right).$$

Отсюда следует

$$R^{+}(f;\overline{A}^*,\overline{\Gamma}) \le \sum_{k=0}^{n}\left(\int_{x_k}^{\gamma_k}\rho(x)\omega_-(f;\gamma_k - x)\,dx + \int_{\gamma_k}^{x_{k+1}}\rho(x)\omega_+(f;x-\gamma_k)\,dx\right).$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases}\omega_-(\gamma_k - x), & x_k \le x \le \gamma_k,\\ \omega_+(x - \gamma_k), & \gamma_k \le x \le x_{k+1}.\end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $\varphi(x) \in H^{\omega_+,\omega_-}$. В силу того, что $\varphi(\gamma_k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$, при любых A_k имеем

$$R^+(\varphi(x); \overline{A}^*, \overline{\Gamma}) = \int_0^1 \rho(x)\varphi(x)dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\int_{x_k}^{\gamma_k} \rho(x)\omega_-(f; \gamma_k - x)dx + \int_{\gamma_k}^{x_{k+1}} \rho(x)\omega_+(f; x - \gamma_k)dx\right). \tag{4}$$

Равенство (4) справедливо и для A_k^*.

Имеем

$$\inf_{\overline{A}} R^+(H^{\omega_+,\omega_-}; \overline{A}, \overline{\Gamma}) \le R^+(H^{\omega_+,\omega_-}; \overline{A}^*, \overline{\Gamma}).$$

Поскольку

$$R^+(H^{\omega_+,\omega_-}; \overline{A}^*, \overline{\Gamma}) = R^+(\varphi(x); \overline{A}^*, \overline{\Gamma}) =$$

$$= R^+(\varphi(x); \overline{A}^*, \overline{\Gamma}) = R^+(H^{\omega_+,\omega_-}; \overline{A}, \overline{\Gamma})$$

при любых A_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, то

$$R^+(H^{\omega_+,\omega_-}; \overline{A}^*, \overline{\Gamma}) \le \inf_{\overline{A}} R^+(H^{\omega_+,\omega_-}; \overline{A}, \overline{\Gamma}).$$

Оценки для $R^-(H^{\omega_+,\omega_-}; \overline{A}, \overline{\Gamma})$ получаются аналогично.

Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает, что для равноотстоящих узлов и $\rho(x) \equiv 1$ наилучшей квадратурной формулой для класса H^{ω_+,ω_-} является формула прямоугольников.

Пусть теперь $\mathcal{M}$ — несимметричный класс 2π-периодических функций. Обозначим через

$$R_0(f) := \int_0^{2\pi} f(x)dx - \frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$$

погрешность квадратурной формулы прямоугольников.

Положим

$$R_0^+(\mathcal{M}) = \sup_{f\in\mathcal{M}} R_0(f), \quad R_0^- = \inf_{f\in\mathcal{M}} R_0(f).$$

Введем также величину

$$M^{\pm}(\mathcal{M}) = \sup\left\{\max_x(\pm f(x)) : f \in \mathcal{M}, \int_0^{2\pi} f(x)dx = 0\right\}. \tag{5}$$

Для 2π-периодической функции g_n обозначим через g_n ее $(2\pi/n)$-периодизацию, т. е.

$$q_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g\left(x + \frac{2i\pi}{n}\right)$$

а через $\mathcal{M}_n$ — множество $(2\pi/n)$-периодических функций из $\mathcal{M}$.

Следующая теорема устанавливает связь между погрешностями квадратурной формулы прямоугольников $R_0^{\pm}(\mathcal{M})$ на классе $\mathcal{M}$ и величиной $M^{\pm}(\mathcal{M})$.

Теорема 2. *Пусть инвариантный относительно сдвига, несиммитричный класс* $\mathcal{M}$ *непрерывных* 2π*-периодических функций вместе с любой функцией* f *содержит ее* $(2\pi/n)$*-периодизацию* f_n *и любую функцию вида* $f + a$, *где* $a = \text{const}$. *Тогда*

$$R_0^{\pm}(\mathcal{M}) = \pm 2\pi M^{\mp}(\mathcal{M}_n). \tag{6}$$

Заметим, что сотношение (6) для симметричных классов установлено В. П. Моторным [7]. При доказательстве теоремы 2 будем использовать его рассуждения.

Доказательство. Пусть

$$q_n(f) = \frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i\pi}{n}\right).$$

Имеем

$$q_n(f) = \frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2\pi(i+k)}{n}\right).$$

Однако при каждом фиксированном $i = 1, \ldots, n$, в силу переодичности функции $f(x)$

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2\pi(i+k)}{n}\right) = \sum_{\nu=k+1}^{k+n} f\left(\frac{2\pi\nu}{n}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{2\pi\nu}{n}\right),$$

поэтому

$$q_n(f_n) = \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{2\pi\nu}{n}\right) = q_n(f)$$

и, следовательно, $R_0^{\pm}(f_n) = R_0^{\pm}(f)$ или

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

Таким образом, каждой функции $f \in \mathcal{M}$ поставлена в соответствие функция $f_n \in \mathcal{M}_n$, причем $R_0^{\pm}(f_n) = R_0^{\pm}(f)$. Если учесть, что $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}$, то переходя к верхним (соответсвенно к нижним) граням, получаем

$$R_0^{\pm}(\mathcal{M}) = R_0^{\pm}(\mathcal{M}_n)$$

и, следовательно,

$$R_0^{+}(\mathcal{M}) = R_0^{+}(\mathcal{M}) = \sup_{f \in \mathcal{M}}\left(-\frac{2\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{2\pi\nu}{n}\right)\right).$$

Учитывая свойства класса $\mathcal{M}_n$ при вычислении последней верхней грани, можно рассматривать лишь те функции $f_n \in \mathcal{M}_n$, для которых

$$-f\left(\frac{2\pi\nu}{n}\right) = \max_x(-f(x)),$$

поэтому $R_0^+(\mathcal{M}) = 2\pi M^-(\mathcal{M}_n)$.

Аналогично доказывается, что $R_0^-(\mathcal{M}) = -2\pi M^-(\mathcal{M}_n)$.

В заключение отметим, что величина (5) и некоторые другие экстремальные задачи для класса H^{ω_+, ω_-} изучались в [8, 9].

1. *Нежметдинов И. Р.* Односторонние модули непрерывности и точные оценки гармонических функций // Тр. сем. по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. – С. 18–23.
2. *Нежметдинов И. Р.* Односторонние модули непрерывности и точные оценки гармонических функций // Тр. сем. по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та., 1985. – С. 26 – 31.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
4. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
5. *Лебедь Г. К.* О квадратурних формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций // Мат. заметки. – 1968. – **3**, № 5. – С. 568–577.
6. *Корнейчук Н. П.* Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Там же. – С. 565–576.
7. *Моторный В. П.* О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Математика. – 1974. – **38**, № 3. – С. 583–614.
8. *Бабенко В. Ф., Поляков О. В.* Точные оценки некоторых характеристик классов периодических функций // Теория приближения и смежные вопросы анализа и топологии: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 9–14.
9. *Бабенко В. Ф., Поляков О. В.* Приближения в среднем некоторых классов непрерывных функций // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 2. – С. 13–21.

Получено 17.04.96