УДК 517.5

М. Ф. Тиман (Днепропетр. агроун-т)

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ

We prove assertion about equivalent analogies by Pally and S.M.Nikolsky for any orthonormal system of functions and for almost periodic polynoms with arbitrary spectrum.

Доведено твердження про еквівалентність аналогів перівностей Пелі та С. М. Нікольського для будь-якої ортонормованої системи функцій та для майже періодичних поліномів з довільним спектром.

Пусть $\Phi\{\varphi(n, x)\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — произвольная ортонормированная на отрезке $[a, b]$ система функций. В случае, когда система Φ ограничена в совокупности, т. е. $|\varphi(n, x)| \le M$, $n = 1, 2, \ldots,$ то для всякого $q > 2$ справедливо неравенство, установленное Пэли [1, с. 185],

$$\| P(n, x)\|_q^q = \int_a^b |P(n, x)|^q dx \le A(q)\sum_{k=1}^n c_k^{*q} k^{q-2}, \tag{1}$$

где $P(n, x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi(k, x)$ — произвольный полином, а $\{c_k^*\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, перестановка в невозрастающем порядке чисел $\{|c_k|\}$.

Известно также [2], что для всякой ограниченной в совокупности ортонормированной системы Φ справедливо неравенство

$$\| P(n, x)\|_q \le A n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \| P(n, x)\|_p, \qquad 1 \le p \le 2 \le q \le \infty. \tag{2}$$

В [2] показано также, что неравенству (2) удовлетворяют и многие неограниченные ортонормированные системы функций.

Двойственным к неравенству (1) является [1] неравенство

$$\sum_{k=1}^n c_k^{*p} k^{p-2} \le B(p)\| P(n, x)\|_p^p, \qquad 1 < p \le 2. \tag{2*}$$

Следующая теорема устанавливает эквивалентность оценок (1) и (2).

Теорема 1. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *задана произвольная ортонормированная система функций* $\Phi\{\varphi(n, x)\}$. *Для того, чтобы выполнялось соотношение* (1) *необходимо и достаточно выполнение* (2) *для* $1 < p \le 2 < q < \infty$.

Доказательство. Пусть имеет место (1). Тогда при $1 < p \le 2$

$$\| P(n, x)\|_q^q \le A(q)\sum_{k=1}^n c_k^{*q} k^{q-2} \le A(q)\sum_{k=1}^n \left\{\sum_{r=1}^k c_r^{*p} r^{p-2}\right\}^{\frac{q}{p}-2}.$$

Следовательно, после применения неравенства (2*) получаем

$$\| P(n, x)\|_q^q \le A(q)\sum_{k=1}^n k^{\frac{q}{p}-2} \left\{\sum_{k=1}^n c_k^{*p} k^{p-2}\right\}^{\frac{q}{p}} \le M(q) n^{\frac{q}{p}-1} \| P(n, x)\|_p^q.$$

Откуда следует справедливость (2).

В [2] указано, каким образом из (2) можно получить (1). Метод из работы [2] дает возможность получить также следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть*

$$Q(n, x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x}, \tag{3}$$

где $\Lambda\{\lambda_k\}$ — *произвольное счетное множество действительных чисел. Для полиномов вида* (3) *при всяком* $q > 2$ *справедливы неравенства*

$$D_q\{Q(n, x)\} \le A n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} D_2\{Q(n, x)\}, \tag{4}$$

$$D_q^q\{Q(n, x)\} \le A(q) \sum_{k=1}^{n} |c_k|^q k^{q-2}, \tag{5}$$

где

$$D_q\{Q(n, x)\} = \left\{ \lim_{T\to\infty} (2T)^{-1} \int_{-T}^{T} |Q(n, x)|^q dx \right\}^{1/q}.$$

При этом неравенства (4) и (5) *эквивалентны.*

Для периодического случая ($\lambda_k = k$, $k = 1, 2, \ldots$) неравенство (4) установлено С. М. Никольским [3].

Справедливо также следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть множество действительных чисел* $\Lambda\{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условию* $\lambda_{k+1} - \lambda_k > \alpha > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. *Тогда при* $q > 2$

$$S_q^q\{Q(n, x)\} \le A(q) \sum_{k=1}^{n} \left| c_k \right|^q k^{q-2}, \tag{6}$$

$$S_q\{Q(n, x)\} \le A n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} D_2\{Q(n, x)\}, \tag{7}$$

где

$$S_q\{Q(n, x)\} = \max_x \left\{ \int_x^{x+1} |Q(n, t)|^q dt \right\}^{1/q}.$$

Соотношения (6) и (7) эквивалентны.

При $q = 2$ неравенство (6) установлено Б. М. Левитаном [4, с. 216].

***Доказательство неравенства* (4).** В силу того, что среднее значение

$$M\{e^{i\lambda_k x} e^{-i\lambda_l x}\} = \lim_{T\to\infty} (2T)^{-1} \int_{-T}^{T} e^{i\lambda_k x} e^{-i\lambda_l x} dx$$

равно 1 при $k = l$ и 0 при $k \ne l$, находим

$$Q(n, x) = \lim_{T\to\infty} (2T)^{-1} \int_{-T}^{T} Q(n, x+t) \sum_{k=1}^{n} e^{-i\lambda_k t} dt = M_t\left\{ Q(n, x+t) \sum_{k=1}^{n} e^{-i\lambda_k t} \right\}.$$

С помощью неравенства Буняковского получим

$$\max_x |Q(n, x)| \le n^{1/2} D_2\{Q(n, x)\}. \tag{8}$$

Тогда

$$(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}|Q(n,x)|^q dx \le \max_x |Q(n,x)|^{q-2}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}|Q(n,x)|^2 dx \le$$

$$\le n^{\frac{q-2}{2}} D_2^{q-2}\{Q(n,x)\}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}|Q(n,x)|^2 dx.$$

После перехода к пределу при $T \to \infty$ получим неравенство (4). Покажем теперь, что из (4) вытекает (5). Пусть $2^{N-1} \le n < 2^N$, где N — целое число. Тогда [1]

$$(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}|Q(n,x)|^q dx \le (2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\sum_{\nu=1}^{N}|\Delta_\nu|^q dx \le$$

$$\le \sum_{\nu_1=1}^{N}\dots\sum_{\nu_r=1}^{N}\prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{r}\left\{(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\left|\Delta_{\nu_i}\Delta_{\nu_j}\right|^{q/2}dx\right\}^{1/R}, \tag{9}$$

где

$$\Delta_\nu = \sum_{k=2^\nu-1}^{2^{\nu+1}} c_k e^{i\lambda_k x}, \quad \nu = 1, 2, \dots, N-1, \quad r = [q]+1, \quad R = r(r-1)/2.$$

При $\nu = N-1$ считаем, что $c_k = 0$, когда $k = n+1, n+2, \dots, 2^N$.

Далее, применяя неравенство Гельдера с показателем $\alpha = (q+2)/2$ и $\alpha' = (q+2)/q$, получаем

$$(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\left|\Delta_\mu\Delta_\nu\right|^{q/2}dx \le \left\{(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\left|\Delta_\mu\right|^{\alpha q/2}dx\right\}\left\{(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\left|\Delta_\nu\right|^{\alpha}dx\right\}^{q/2\alpha}.$$

Тогда при $T \to \infty$

$$D_{q/2}^{q/2}\left\{\left|\Delta_\mu\Delta_\nu\right|\right\} \le D_{\alpha q/2}^{q/2}\left\{\left|\Delta_\mu\right|\right\}D_\alpha^{q/2}\left\{\left|\Delta_\nu\right|\right\}. \tag{10}$$

Применяя к правой части (9) неравенство (4), получаем

$$D_{q/2}^{q/2}\left\{\left|\Delta_\mu\Delta_\nu\right|\right\} \le 2^{(\mu+1)\left(\frac{q}{4}-\frac{1}{\alpha}\right)}D_2^{q/2}\left\{\left|\Delta_\mu\right|\right\}2^{(\nu+1)\left(\frac{q}{4}-\frac{1}{\alpha'}\right)}D_2^{q/2}\left\{\left|\Delta_\nu\right|\right\} \le$$

$$\le 2^{-(\mu+1)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)}\gamma_\mu^{1/2}2^{(\nu+1)\left(\frac{1}{\alpha'}-\frac{1}{2}\right)}\gamma_\nu^{1/2},$$

где

$$\gamma_\nu = 2^{(\nu+1)\left(\frac{q}{2}-1\right)}\left\{\sum_{k=2^\nu-1}^{2^{\nu+1}}|c_k|^2\right\}^{q/2}.$$

Так как $1/\alpha' = 1 - 1/\alpha$, то

$$D_{q/2}^{q/2}\left\{\left|\Delta_\mu\Delta_\nu\right|\right\} \le 2^{|\mu-\nu|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)}\gamma_\mu^{1/2}\gamma_\nu^{1/2}. \tag{11}$$

Благодаря неравенствам (9) и (11), находим [2], что

$$D_q^q\{Q(n,x)\} \le A(q)\sum_{k=1}^{n}\gamma_k = A(q)\sum_{k=1}^{n}2^{k\left(\frac{q}{2}-1\right)}\left\{\sum_{\nu=2^k-1}^{2^{k+1}}|c_\nu|^2\right\}^{q/2} \le A(q)\sum_{k=1}^{n}|c_k|^q k^{q-2}.$$

Соображения, устанавливающие неравенство (2) из (1), позволяют убедиться в том, что из (6) следует (7).

***Доказательство теоремы* 3.** Очевидно, что

$$\int_{x-1/2}^{x+1/2}|Q(n,t)|^q dt \le 2\int_{x-1/2}^{x+1/2}(1-|t-x|)|Q(n,t)|^q dt \le$$

$$\le 2\max_t|Q(n,t)|^{q-2}\int_{x-1/2}^{x+1/2}(1-|t-x|)|Q(n,t)|^2 dt. \qquad (12)$$

В работе [4, с. 216] установлено, что в предположениях теоремы 3 имеет место следующее неравенство:

$$\int_{x-1/2}^{x+1/2}(1-|t-x|)|Q(n,t)|^2 dt \le A\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 = AD_2^2\{Q(n,x)\}.$$

Эта оценка вместе с (12) и (8) приводит к соотношению

$$\int_{x-1/2}^{x+1/2}|Q(n,t)|^q dt \le Bn^{\frac{q}{2}-1}D_2^q\{Q(n,x)\},$$

из которого следует неравенство (7).

Доказательство обратного утверждения проводится с помощью (7) аналогично тому, что из (4) следует (5).

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965 – Т. 2. – 537 с.

2. *Тиман М. Ф.* Об одном свойстве ортонормированных систем, удовлетворяющих неравенству С. М. Никольского // Теория приближения функций. Тр. межд. конф. – М.: Наука. – С. 356–358.

3. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1958. – **38**. – С. 244–278.

4. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 396 с.

Получено 11.04.97