УДК 517.944

П. В. Цинайко (Терноп. пед. ін-т)

ПРО ОДИН ГЛАДКИЙ РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

The boundary-value problem for quasilinear equation $u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x]$, $u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$, $u(x + \omega, t) = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, \pi]$, is studied. Conditions to guarantee the validity of the uniqueness of smooth solution are established.

Вивчається крайова періодична задача для квазілінійного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x]$, $u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$, $u(x + \omega, t) = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, \pi]$. Знайдено умови, при яких справедлива теорема єдиності розв'язку.

Встановимо умови існування гладкого розв'язку такої задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x], \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t < \pi, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u(x, \pi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u(x + \omega, t) = u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, \pi]. \tag{3}$$

Позначимо через C_π — простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\mathbb{R} \times [0, \pi]$; через G_x — простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ разом з похідною по x, а через A^ω — такий простір функцій двох змінних x і t: $A^\omega = \{ g : g(x, t) = g(x, \pi - t) = g(x + \omega, t) = -g(-x, t)\}$, $\omega = (2p - 1)\pi/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Для лінійного неоднорідного рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, \pi], \tag{4}$$

в конкретному просторі функцій A^ω справедливе наступне твердження [2]

Теорема 1. *Якщо* $g(x, t) \in G_x \cap A^\omega$, *то функція виду*

$$u(x, t) = (Pg)(x, t) = \frac{1}{4}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\xi, \tau)\, d\xi + \frac{1}{4}\int_t^\pi d\tau \int_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} g(\xi, \tau)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi Q(\tau)\, d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\xi, \tau)\, d\xi,$$

де $Q(\tau) = 1$ *при* $0 \le \tau \le t$, $Q(\tau) = -1$, $t < \tau \le \pi$, *є єдиною функцією з простору* $C_\pi^2 \cap A^\omega$, *яка задовольняє умови* $(2)-(4)$, *причому справедливі оцінки:*

$$\| u(x, t) \|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{4} \| g(x, t) \|_{C_\pi}, \quad \| u_t(x, t) \|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2} \| g(x, t) \|_{C_\pi},$$

$$\| u_x(x, t) \| \le \frac{\pi}{2} \| g(x, t) \|_{C_\pi}, \tag{5}$$

де $\| g(x, t) \|_{C_\pi} = \sup\{ | g(x, t) |;\ 0 \le t \le \pi,\ x \in \mathbb{R} \}$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 1 з [1].

За аналогією з лінійною задачею $(2)-(4)$ і записами її розв'язку розглянемо таку систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (PF[u,u_t,u_x])(x,t), \\ u_t(x,t) &= (PF[u,u_t,u_x])_t(x,t), \\ u_x(x,t) &= (PF[u,u_t,u_x])_x(x,t). \end{aligned} \tag{6}$$

Означення. *Неперервний розв'язок* $(u, u_t, u_x) \in C_\pi$, $u \in C_\pi \cap A^\omega$, *системи інтегральних рівнянь* (6) *будемо називати гладким розв'язком нелінійної крайової* π*-періодичної задачі* (1) – (3).

Використовуючи інтегральне зображення розв'язку $u(x,t) = (Pg)(x,t)$ лінійної задачі (2) – (4), на основі теореми 1 переконуємося в справедливості наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай* $g \in C_\pi \cap A^\omega$. *Тоді лінійна* (2) – (4) *задача має єдиний гладкий розв'язок* $u = Pg$, *для якого справедливі оцінки* (5).

Сформулюємо і доведемо тепер аналогічне твердження для нелінійної задачі (1) – (3).

Теорема 3. *Нехай скалярна функція* $F[u, u_t, u_x](x,t) = f(x, t, u(x,t), u_t(x, t), u_x(x,t))$ *задовольняє такі умови*:

1) $f(x, t, u(x,t), u_t(x,t), u_x(x,t)) \in C(\mathbb{R} \times [0,\pi] \times \|u\|_{C_\pi} < \infty \times$

$$\times \|u_t\|_{C_\pi} < \infty \times \|u_x\|_{C_\pi} < \infty);$$

2) $0 < \|F\{0,0,0\}(x,t)\|_{C_\pi} = \Gamma < \infty$;

3) $|F[u, u_t'', u_x''](x,t) - F[u, u_t', u_x'](x,t)| \le$

$\le N_1 |u'' - u'| + N_2 |u_t'' - u_t'| + N_3 |u_x'' - u_x'|$ (N_i, $i = 1, 2, 3$, — *сталі*);

4) $F[0,0,0](x,t) \in A^\omega$;

5) *для всіх* $u \in A^\omega \cap C_\pi$ *функція* $F[u, u_t, u_x](x,t) \in A^\omega \cap C_\pi$, $\omega = (2p - 1)\pi/q$, $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{\pi^2}{2} N_1 + \pi(N_2 + N_3) < 1 \tag{7}$$

задача (1) – (3) *має єдиний гладкий* ($u(x,t) \in A^\omega \cap C_\pi^1$) *розв'язок.*

Доведення. Визначимо нульове наближення $u^0(x,t)$ за такою формулою:

$$u^0(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^\pi Q(\tau)d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F[0,0,0](\xi,\tau)\,d\xi.$$

Звідси на основі умов 1, 2 і 4 теореми 3 і оцінок (5) для відповідної лінійної задачі маємо $u^0(x,t) \in A^\omega \cap C^1$ і

$$|u_t^0(x,t)| \le \frac{\Gamma\pi^2}{4} = \Gamma_1, \qquad \frac{\pi}{2}|u_t^0(x,t)| \le \Gamma_1,$$

$$\frac{\pi}{2}|u_x(x,t)| \le \Gamma_1. \tag{8}$$

Виберемо таке число M, що $M > 2\Gamma_1$.

У банаховому просторі функцій $D = \{u \in A^\omega \cap C_\pi^1 : \|u\|_{C_\pi^1} \le M\}$ з нормою

$$\|u\|_{C_\pi^1} = \max\left\{\|u\|_{C_\pi}, \frac{\pi}{2}\|u\|_{C_\pi}, \frac{\pi}{2}\|u\|_{C_\pi}\right\},$$

розглянемо оператор $PF[u, u_t, u_x]$, визначений за допомогою правої частини першого інтегрального рівняння системи (6). На підставі умов 1 і 5 теореми 3 одержуємо $(PF[u, u_t, u_x])(x, t) \in C_\pi \cap A^\omega$.

Далі для $u(x, t) \in D$ будемо мати

$$(PF[u, u_t, u_x])(x, t) =$$

$$= u^0(x, t) + \frac{1}{4}\int_0^\pi Q(\tau) \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} (F[u, u_t, u_x](\xi, \tau) - F[0, 0, 0](\xi, \tau))d\xi.$$

Звідси, враховуючи систему інтегральних рівнянь (6) і умову 3 теореми 3, знаходимо

$$|(PF[u, u_t, u_x])(x, t)| \le u^0(x, t) + \frac{\pi^2}{4}(N_1\|u\|_{C_\pi} + N_2\|u_t\|_{C_\pi} + N_3\|u_x\|_{C_\pi});$$

$$|(PF[u, u_t, u_x])_t(x, t)| \le u_t^0(x, t) + \frac{\pi}{2}(N_1\|u\|_{C_\pi} + N_2\|u_t\|_{C_\pi} + N_3\|u_x\|_{C_\pi});$$

$$|(PF[u, u_t, u_x])_x(x, t)| \le u_t^0(x, t) + \frac{\pi}{2}(N_1\|u\|_{C_\pi} + N_2\|u_t\|_{C_\pi} + N_3\|u_x\|_{C_\pi}).$$

Якщо дві останні нерівності помножити на $\pi/2$, а результати $((N_2\pi^2)/4)\|u_t\|_{C_\pi}$ і $((N_3\pi^2)/4)\|u_x\|_{C_\pi}$ переписати у вигляді $((N_2\pi)/2)(\pi/2)\|u_t\|_{C_\pi}$ і $((N_3\pi)/2(\pi/2)\|u_x\|_{C_\pi}$, то одержимо

$$\|(PF[u, u_t, u_x])_x(x, t)\|_{C_\pi^1} \le \Gamma_1 + \left(\frac{\pi^2}{4}N_1 + \frac{\pi}{2}(N_2 + N_3)\|u\|_{C_\pi}\right) \le$$

$$\le \Gamma_1 + \left(\frac{\pi^2}{4}N_1 + \frac{\pi}{2}(N_2 + N_3)\right)M. \tag{9}$$

Якщо вибрати константи Ліпшица N_i, $i = 1, 2, 3$, таким чином, щоб виконувалась умова (7) теореми 3, то з нерівності (9), беручи до уваги, що $\Gamma_1 < M/2$, одержимо

$$\|(PF[u, u_t, u_x])_x(x, t)\|_{C_\pi^1} \le \Gamma_1 + M/2 < M.$$

Отже, при N_1, N_2, N_3, що задовольняють нерівність (7), отримуємо $(PF[u, u_t, u_x])(x, t) \in D$ при $u \in D$.

Для функцій $u(x, t)$ і $z(x, t)$ введемо відстань $\rho(u, z)$, покладаючи $\rho(u, z) = \|u(x, t) - z(x, t)\|_{C_\pi^1}$. Тоді D буде метричним простором, до того ж цей простір повний.

Переконаємось тепер, що при виконанні умови (7) відображення PF буде стисненим. Справді, якщо $u \in D$ і $z \in D$, то з (6) і формули

$$(PF[z, z_t, z_x])(x, t) = \frac{1}{4}\int_0^\pi Q(\tau)d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F[z, z_t, z_x](\xi, \tau)d\xi,$$

використовуючи умову 3 теореми 3, отримуємо

$$|PF[u, u_t, u_x])(x,t)) - (PF[z, z_t, z_x])(x,t))| \le$$

$$\le \frac{\pi^2}{4}(N_1\|u - z\|_{C_\pi} + N_2\|u_t - z_t\|_{C_\pi} + N_3\|u_x - z_x\|_{C_\pi});$$

$$|PF[u, u_t, u_x])_t(x,t)) - (PF[z, z_t, z_x])_t(x,t))| \le$$

$$\le \frac{\pi}{2}(N_1\|u - z\|_{C_\pi} + N_2\|u_t - z_t\|_{C_\pi} + N_3\|u_x - z_x\|_{C_\pi});$$

$$|PF[u, u_t, u_x])_x(x,t)) - (PF[z, z_t, z_x])_x(x,t))| \le$$

$$\le \frac{\pi}{2}(N_1\|u - z\|_{C_\pi} + N_2\|u_t - z_t\|_{C_\pi} + N_3\|u_x - z_x\|_{C_\pi}).$$

Звідси маємо

$$\rho(PF[u, u_t, u_x],\ PF[z, z_t, z_x]) \le$$

$$\le \left(\frac{\pi^2}{4}N_1 + \frac{\pi}{2}(N_2 + N_3)\right)\rho(u, z) < \alpha\rho(u, z),$$

де $\alpha = 1/2$.

Таким чином, виконано всі умови принципу стиснених відображень. Тобто, існує єдиний неперервний обмежений на $[0, \pi]\times\mathbb{R}$ розв'язок (u, u_t, u_x) системи інтегральних рівнянь, а отже, і гладкий $u(x,t) \in C^1_\pi \cap A^\omega$ розв'язок крайової π-періодичної задачі (1) – (3).

Теорему 3 доведено.

Зауваження. Умову (7) можна послабити, якщо доведення проводити на основі теореми 0.1 із [3, с. 475], тобто справедливе наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* 1 – 5 *теореми* 3. *Тоді при виконанні умови*

$$\frac{\pi^2}{4}N_1 + \frac{\pi}{2}(N_2 + N_3) < 1$$

задача (1) – (3) *має єдиний гладкий* $(u(x,t) \in C^1_\pi \cap A^\omega)$ *розв'язок.*

1. *Хома Н. Г., Цинайко П. В.*. Гладкий розв'язок однієї крайової задачі // Укр. мат. журн. – 1997. – **40**, № 12. – С. 1712–1716.
2. *Митропольський Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
3. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

Одержано 09.04.97