УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов (Днепропетр. ун-т)

СРАВНЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИНОМОВ И СПЛАЙНОВ

We establish that the classes W_p^r of multivariate functions defined by restrictions on the L_p-norms of mixed derivatives of order $r = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$ are worse approximated by generalized trigonometric polynomials in L_q-metric than by periodic generalized splines if $p \in [2, \infty)$, $q = 1$ or $p = \infty$, $q \in [1, 2]$. In these cases, the best approximations of the Sobolev classes of univariate functions by trigonometric polynomials and periodic splines are the same.

Встановлено, що класи W_p^r функцій багатьох змінних, які задаються обмеженнями на L_p-норми мішаних похідних порядку $r = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$, гірше наближаються в L_q-метриці узагальненими тригонометричними поліномами, ніж періодичними узагальненими сплайнами, якщо $p \in [2, \infty)$, $q = 1$ або $p = \infty$, $q \in [1, 2]$. Найкращі наближення соболєвських класів функцій однієї змінної тригонометричними поліномами і періодичними сплайнами у цих випадках однакові.

1. Пусть $W_p^r(T^1)$ $(r \in N,\ p \in [1, \infty],\ T^1 \in [0, 2\pi])$ — класс 2π-периодических действительнозначных функций f одной переменной, у которых $(r-1)$-я производная локально абсолютно непрерывна, а $\|f^{(r)}\|_{L_p} \le 1$, где

$$\|f\|_{L_p(T^1)} := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{T^1} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, & \text{если } 1 \le p < \infty; \\ \operatorname*{vrai\,sup}\limits_{x \in T^1} |f(x)|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Рассмотрим аппроксимацию этих классов в $L_1(T^1)$ подпространствами M_n данной размерности n, т. е. величины

$$E(W_p^r(T^1); M_n)_1 := \sup_{f \in W_p^r(T^1)} \inf_{g \in M_n} \|f - g\|_{L_1(T^1)}.$$

В случае, когда $M_{2n-1} = \mathcal{F}^{2n-1}$ — подпространство тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$, в работах [1] $(p = 1)$, [2] $(p = \infty)$, [3] $(p \in (1, \infty])$ доказано, что

$$E(W_p^r(T^1); \mathcal{F}^{2n-1})_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{L_{p'}(T^1)} = n^{-r} \|\varphi_{1,r}\|_{L_{p'}(T^1)}, \tag{1}$$

где $p' = p(p-1)^{-1}$, а $\varphi_{n,r}$ — $(2\pi/n)$-периодический эйлеров идеальный сплайн порядка r, т. е. r-я первообразная от функции $\varphi_{n,0}(x) = \operatorname{sign} \sin nx$, имеющая нулевое среднее значение на периоде.

Пусть теперь $M_{2n} = S_{2n, r-1}$ — $2n$-мерное подпространство 2π-периодических сплайнов порядка $r-1$, дефекта 1, с узлами $k\pi/n$, $k \in Z$ (см., например, [4, с. 71]). Н. П. Корнейчук [4, с. 219] доказал, что

$$E(W_p^r(T^1); S_{2n,r-1})_1 =$$
$$= \sup_{f \in W_p^r(T^1)} \|f - \sigma_{2n,r-1}(f)\|_{L_1(T^1)} = n^{-r} \|\varphi_{1,r}\|_{L_{p'}(T^1)}, \tag{2}$$

где $\sigma_{2n,r-1}(f)$ — сплайн, интерполирующий f в нулях $\varphi_{n,r-1}$, т. е. в точках $\frac{k\pi}{n} + (1+(-1)^r)\frac{\pi}{4n}$. Из (1) и (2) видно, что подпространства $\mathcal{F}^{2n-1}$ и $S_{2n,r-1}$ дают одинаковую погрешность аппроксимации классов $W_p^r(T^1)$ в $L_1(T^1)$:

$$E(W_p^r(T^1); \mathcal{F}^{2n-1})_1 = E(W_p^r(T^1); S_{2n,r-1})_1. \tag{3}$$

Оценки (1) и (2) являются неулучшаемыми относительно любых приближающих подпространств той же размерности: для поперечников по Колмогорову

$$d_n(W_p^r(T^1))_1 := \inf\{E(W_p^r(T^1); M_n)_1 : \dim M_n \le n\}$$

при всех $p = [1, \infty]$ выполняются равенства [4, с. 354]

$$d_{2n-1}(W_p^r(T^1))_1 = E(W_p^r(T^1); \mathcal{F}^{2n-1})_1 =$$
$$= d_{2n}(W_p^r(T^1))_1 = E(W_p^r(T^1); S_{2n,r-1})_1. \tag{4}$$

2. Рассмотрим теперь функции многих переменных $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \in R^m$, $m > 1$, 2π-периодических по каждой переменной, и их аппроксимацию на основном кубе периодов $T^m = [0, 2\pi]^m$ в метрике $L_p(T^m)$

$$\|f\|_{L_p(T^m)} := \begin{cases} \left(\frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{T^m} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \le p < \infty; \\ \operatorname{vrai\,sup}\limits_{x \in T^m} |f(x)|, & \text{если } p = \infty, \end{cases}$$

обобщенными полиномами и сплайнами.

Зафиксируем переменную x_i, $i = 1, \ldots, m$, и пусть $M_{n_k}^k = \operatorname{Lin}\{g_j^k(x_k) : j = 1, \ldots \ldots, n_k\}$ — подпространство размерности n_k функций из $L_p(T^1)$, зависящих лишь от переменной x_k, с базисом $\{g_j^k(x_k) : j = 1, \ldots, n_k\}$. Для вектора $n = = (n_1, \ldots, n_m) \in N^m$ и набора подпространств $M_n := (M_{n_1}^1, \ldots, M_{n_m}^m)$ рассмотрим совокупность функций вида

$$G_{M_n}(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} G_j(\widehat{x_k}) g_j^k(x_k), \tag{5}$$

где $\widehat{x_k}$ — вектор из R^{m-1}, полученный из вектора $(x_1, \ldots, x_m)$ отбрасыванием координаты x_k, а „коэффициенты" $G_j(\widehat{x_k})$ — произвольные функции из $L_p(T^{m-1})$. Известно (см., например, [5]), что множество всех функций вида (5) образует подпространство, т. е. замкнутое линейное многообразие в $L_p(T^m)$. Обозначим его через $F_{M_n,p}$ и будем называть подпространством ранга $n = = (n_1, \ldots, n_m)$ (и писать $\operatorname{rank} F_{M_n,p} = n$). В частности, если все подпространства

$M_{n_k}^k$ суть $\mathcal{F}^{2n_k-1}$ или S_{2n_k, r_k-1}, получим соответственно подпространства обобщенных тригонометрических полиномов $F_{\mathcal{F}^{2n-1};p}$ и обобщенных сплайнов $F_{S_{2n,r-1};p}$, где для векторов $n = (n_1, \ldots, n_m)$ и $r = (r_1, \ldots, r_m)$ из N^m $\mathcal{F}^{2n-1} := (\mathcal{F}^{2n_1-1}, \ldots, \mathcal{F}^{2n_m-1})$ и $S_{2n,r-1} := (S_{2n_1,r_1-1}, \ldots, S_{2n_m,r_m-1})$. Пусть $r = (r_1, \ldots, r_m) \in N^m$. Через $W_p^r(T^m)$ обозначим класс функций $f(x)$, $x \in T^m$, представимых в виде свертки

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{T^m} D_r(x-u)\, h(u)\, du,$$

где функция h из $L_p(T^m)$ имеет нулевое среднее значение на периоде T^1 по каждой переменной (при почти всех фиксированных значениях остальных переменных), $\|h\|_{L_p(T^m)} \le 1$, а $D_r(x) = \prod_{k=1}^m D_{r_k}(x_k)$ — произведение одномерных ядер Бернулли [4, с. 107]. Заметим, что для таких функций f $\|\partial^r f\|_{L_p(T^m)} = \|h\|_{L_p(T^m)} \le 1$, где $\partial^r f := \dfrac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_m^{r_m}}$.

Квазипоперечником по Колмогорову ранга $n \in N^m$ класса $W_p^r(T^m)$ в пространстве $L_q(T^m)$ назовем величину [6, 7]

$$D_n(W_p^r(T^m))_{L_q(T^m)} := \inf\{E(W_p^r(T^m); F_{M_{n,q}})_{L_q(T^m)} \colon \operatorname{rank} F_{M_{n,q}} \le n\},$$

где для $k, n \in N^m$ запись $k \le n$ означает, что $k_j \le n_j$ для всех $j = 1, \ldots, m$, а

$$E(W_p^r(T^m); F_{M_{n,q}})_{L_q(T^m)} := \sup_{f \in W_p^r(T^m)} \inf_{G \in F_{M_{n,q}}} \|f - G\|_{L_q(T^m)}.$$

Лемма 1. *Для любого набора* $M_{n,q} = (M_{n_1}^1, \ldots, M_{n_m}^m)$ *подпространств* $M_{n_k}^k$ *из* $L_q(T^1)$ *выполняется неравенство*

$$E(W_p^r(T^m); F_{M_{n,q}})_{L_q(T^m)} \ge \prod_{k=1}^m E(W_p^{r_k}(T^1); M_{n_k}^k)_{L_q(T^1)}. \qquad (6)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем f_k из $W_p^{r_k}(T^1)$, $k = 1, \ldots, m$, удовлетворяющие условию

$$E(f_k; M_{n_k}^k)_{L_q(T^1)} > E(W_p^{r_k}(T^1); M_{n_k}^k)_{L_q(T^1)} - \varepsilon.$$

Для $x \in T^m$ положим $f(x) = \prod_{k=1}^m f_k(x_k)$. Тогда $f \in W_p^r(T^m)$, и легко видеть (см., например, [7]), что

$$E(f; F_{M_{n,q}})_{L_q(T^m)} = \prod_{k=1}^m E(f_k; M_{n_k}^k)_{L_q(T^1)}.$$

Поэтому

$$E(W_p^r(T^m); F_{M_{n,q}})_{L_q(T^m)} \ge E(f; F_{M_{n,q}})_{L_q(T^m)} =$$

$$= \prod_{k=1}^m E(f_k; M_{n_k}^k)_{L_q(T^1)} > \prod_{k=1}^m \left(E(W_p^{r_k}(T^1); M_{n_k}^k)_{L_q(T^1)} - \varepsilon \right).$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует (6).

Из леммы 1 следует соответствующее неравенство и для поперечников:

$$D_n(W_p^r(T^m))_{L_q(T^m)} \geq \prod_{k=1}^m d_{n_k}(W_p^{r_k}(T^1))_{L_q(T^1)}. \tag{6'}$$

Отметим, что возможны случаи, когда в (6) имеет место знак строгого неравенства (это вытекает, например, из доказанной ниже теоремы 1). Однако можно сформулировать достаточные условия для выполнения равенства в (6).

Лемма 2. *Пусть* $p = q$ *и для всех* $k = 1, \ldots, m$ *значения* $E(W_p^{r_k}(T^1); M_{n_k}^k)_{L_p(T^1)}$ *реализуются линейными методами, т. е. существуют линейные операторы* $A^k\colon L_p(T^1) \to M_{n_k}^k$ *такие, что*

$$E(W_p^{r_k}(T^1); M_{n_k}^k)_{L_p(T^1)} = \sup\left\{\|f - A^k f\|_{L_p(T^1)}\colon f \in W_p^{r_k}(T^1)\right\}.$$

Тогда

$$E(W_p^r(T^m); F_{M_{n,p}})_{L_p(T^m)} = \prod_{k=1}^m E(W_p^{r_k}(T^1); M_{n_k}^k)_{L_p(T^1)}, \tag{7}$$

причем наилучшее приближение подпространством $F_{M_{n,p}}$ *реализуется линейным оператором*

$$A\colon L_p(T^m) \to F_{M_{n,p}}, \quad A = E - \prod_{k=1}^m (E^k - A^k), \tag{8}$$

где E^k *— тождественный оператор в* $L_p(T^1)$, *„действующий по* k*-й переменной".*

Связь аппроксимативных свойств операторов A (8) и A^k исследовалась в [8] (см. также [9, с. 324–329]). Из (7) следует, что если $p = q$ и все поперечники $d_{n_k}(W_p^{r_k}(T^1))_{L_p(T^1)}$ реализуются линейными методами приближения (т. е. совпадают с линейными поперечниками), то выполняется равенство

$$D_n(W_p^r(T^m))_{L_p(T^m)} = \prod_{k=1}^m d_{n_k}(W_p^{r_k}(T^1))_{L_p(T^1)}. \tag{9}$$

Этот результат доказан в [7], при этом фактически доказана и лемма 2. Заметим, что в [7] сформулировано более общее утверждение (вместо условия $p = q$ предполагается лишь $p \leq q$), однако на наш взгляд приведенное в [7] доказательство корректно только в случае $p = q$.

3. L_1-аппроксимация классов $W_p^r(T^m)$, $p \in [1, \infty]$, обобщенными сплайнами исследовалась в [10], где доказан многомерный аналог равенства (2):

$$E(W_p^r(T^m); F_{S_{2n,r-1};1})_{L_1(T^m)} = \prod_{k=1}^m \|\varphi_{n_k, r_k}\|_{L_{p'}(T^1)}. \tag{10}$$

Сопоставляя (10), (6′) и (4), получаем следующее утверждение.

Утверждение. *Для всех* $m \in N$, $p \in [1, \infty]$, $n \in N^m$ *выполняются равенства*

$$D_{2n}(W_p^r(T^m))_{L_1(T^m)} = E(W_p^r(T^m); F_{S_{2n,r-1};1})_{L_1(T^m)} = \prod_{k=1}^m \|\varphi_{n_k, r_k}\|_{L_{p'}(T^1)}.$$

Возникает естественный вопрос: будет ли выполняться аналог равенства (3) в случае $m > 1$ при аппроксимации обобщенными полиномами и сплайнами?

Мы покажем, что в отличие от одномерного случая, при $m > 1$ обобщенные полиномы приближают уже „хуже", чем обобщенные сплайны, в том смысле, что величина

$$I(p, r, n, m) := \frac{E(W_p^r(T^m); F_{\mathcal{T}^{2n-1};1})_{L_1(T^m)}}{E(W_p^r(T^m); F_{S_{2n,r-1};1})_{L_1(T^m)}}$$

при $p \geq 2$ принимает значения большие единицы.

Теорема 1. *Пусть* $m > 1$, $p \in [2, \infty]$. *Тогда для всех* $r, n \in N^m$ *выполняются неравенства*

$$I(p, r, n, m) > 1. \tag{11}$$

Доказательство. Из соотношений двойственности С. М. Никольского (см., например, [4, с. 21]) следует, что для любого набора подпространств $M_n = (M_{n_1}^1, \ldots, M_{n_m}^m)$ такого, что для $k = 1, \ldots, m$ $M_{n_k}^k$ содержит константы,

$$E(W_p^r(T^m); F_{M_n,1})_{L_1(T^m)} = \sup_{f \in W_p^r(T^m)} \sup_{\substack{\|g\|_{L_\infty(T^m)} \leq 1 \\ g \perp F_{M_n,1}}} \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} f(x)\, g(x)\, dx =$$

$$= \sup_{\substack{\|h\|_{L_p(T^m)} \leq 1 \\ g \perp F_{\mathcal{T}^1;p'}}} \sup_{\substack{g \in W_\infty^r(T^m) \\ \partial^r g \perp F_{M_n,1}}} \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} h(x)\, g(x)\, dx =$$

$$= \sup_{\substack{g \in W_\infty^r(T^m) \\ \partial^r g \perp F_{M_n,1}}} \sup_{\substack{\|h\|_{L_p(T^m)} \leq 1 \\ h \perp F_{\mathcal{T}^1;p'}}} \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} h(x)\, g(x)\, dx =$$

$$= \sup_{\substack{g \in W_\infty^r(T^m) \\ \partial^r g \perp F_{M_n,1}}} E(g; F_{\mathcal{T}^1;p'})_{L_{p'}(T^m)}. \tag{12}$$

Равенство (10) означает, что в случае $F_{M_{2n};1} = F_{S_{2n,r-1};1}$ верхняя грань в правой части (12) реализуется на функции

$$\psi_\Pi(x; n, r) := \prod_{k=1}^{m} \varphi_{n_k, r_k}(x_k - \gamma_{r_k}),$$

где γ_{r_k} выбирается из условия $\varphi_{n_k, r_k}\left(\dfrac{\pi}{n_k} - \gamma_{r_k}\right) = 0$ (так как $\varphi_{n_k, r_k}^{(r_k)}(\cdot - \gamma_{r_k}) \perp \perp S_{2n_k, r_k - 1}$ (см. [4, с. 240], лемма 5.4), то и функция $\psi_\Pi(x; n, r)$ ортогональна подпространству $F_{S_{2n,r-1};1}$). Легко видеть,что ψ_Π ортогональна также и подпространству $F_{\mathcal{T}^{2n-1};1}$. Мы, однако, для оценки величины $E(W_p^r(T^m); F_{\mathcal{T}^{2n-1};1})_{L_1(T^m)}$ снизу с помощью соотношения (12) используем функцию

$$\psi_\Sigma(x; n, r) := \varphi_{1,|r|}((n, x)),$$

где $|r| = \sum_{k=1}^{m} r_k$, $(n, x) = \sum_{k=1}^{m} n_k x_k$. Очевидно, что $\psi_\Sigma \in W_\infty^r(T^m)$. Кроме того, $\psi_\Sigma \perp F_{\mathcal{T}^{2n-1};1}$ по той причине, что по каждой переменной x_k (при фиксированных остальных) функция ψ_Σ имеет период $2\pi / n_k$ и в среднем равна нулю, а значит, ортогональна всем базисным тригонометрическим функциям до порядка $n_k - 1$ по переменной x_k. Теперь из (12) и (10) следует

$$I(p, r, n, m) \ge \frac{\|\psi_\Sigma(\cdot; n, r)\|_{L_{p'}(T^m)}}{\|\psi_\Pi(\cdot; n, r)\|_{L_{p'}(T^m)}} = \frac{\|\varphi_{1,|r|}((n, \cdot))\|_{L_{p'}(T^m)}}{\left\|\prod_{k=1}^{m} \varphi_{n_k, r_k}\right\|_{L_{p'}(T^m)}}.$$

Учитывая, что $\|\varphi_{1,|r|}((n, \cdot))\|_{L_{p'}(T^m)} = \|\varphi_{1,|r|}\|_{L_{p'}(T^1)} \prod_{k=1}^{m} n_k^{-r_k}$, получаем

$$I(p, r, n, m) \ge \frac{\|\varphi_{1,|r|}\|_{L_{p'}(T^1)} \prod_{k=1}^{m} n_k^{-r_k}}{\prod_{k=1}^{m} \left(\|\varphi_{1,r_k}\|_{L_{p'}(T^1)} n_k^{-r_k}\right)} = \frac{\|\varphi_{1,|r|}\|_{L_{p'}(T^1)}}{\prod_{k=1}^{m} \|\varphi_{1,r_k}\|_{L_{p'}(T^1)}}. \tag{13}$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что при любом $q \in [1, 2]$ справедливо неравенство

$$\frac{\|\varphi_{1,|r|}\|_{L_q(T^1)}}{\prod_{k=1}^{m} \|\varphi_{1,r_k}\|_{L_q(T^1)}} > 1.$$

Далее для краткости будем писать φ_{r_k} вместо φ_{1,r_k} и $\|\cdot\|_q$ вместо $\|\cdot\|_{L_q(T^1)}$. В следующей лемме приведены необходимые для дальнейшего оценки $L_q(T^1)$ норм эйлеровых сплайнов.

Лемма 3. *Пусть* $q \in [1, 2]$.

1. *Для всех* $r \in N$ *выполняются неравенства*

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^q \le \|\varphi_r\|_q^q < \frac{\pi^2}{12} = \frac{2}{\pi} K_3. \tag{14}$$

2. *Если* $r \in N$ *и* $r \ge 2$, *то*

$$\|\varphi_r\|_q^q > \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{\pi^3}{24}\right)^{q-2} = \frac{8}{\pi^2} K_3^{q-2}. \tag{15}$$

Доказательство. Напомним (см., например, [4, с. 105]), что числа $K_r :=$ $:= \|\varphi_r\|_\infty$ (их называют константами Фавара) удовлетворяют неравенствам

$$1 < K_2 = \frac{\pi^2}{8} < K_4 < K_6 < \ldots < \frac{4}{\pi} < \ldots < K_5 < K_3 = \frac{\pi^3}{24} < K_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что

$$\|\varphi_r\|_1 = \frac{1}{2\pi} \bigvee_0^{2\pi} \varphi_{r+1} = \frac{1}{2\pi} 4 K_{r+1} = \frac{2}{\pi} K_{r+1},$$

$$\|\varphi_r\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi_r(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \varphi_0(x)\, \varphi_{2r}(x)\, dx \right| = \|\varphi_{2r}\|_1 = \frac{2}{\pi} K_{2r+1}.$$

Для доказательства второго из неравенств (14) используем следующий вариант неравенства Гельдера для $q \in (1, 2)$:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^q\,dx \;\le\; \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx\right)^{2-q} \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\right)^{q-1}.$$

Имеем

$$\|\varphi_r\|_q^q \;\le\; \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi_r(x)|\,dx\right)^{2-q} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi_r(x)|^2\,dx\right)^{q-1} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}K_{r+1}\right)^{2-q}\left(\frac{2}{\pi}K_{2r+1}\right)^{q-1} <$$

$$< \left(\frac{2}{\pi}K_3\right)^{2-q}\left(\frac{2}{\pi}K_3\right)^{q-1} = \frac{2}{\pi}K_3 = \frac{\pi^2}{12}.$$

Первое неравенство в (14) следует из монотонности L_q-норм:

$$\|\varphi_r\|_q \ge \|\varphi_r\|_1 = \frac{2}{\pi}K_{r+1} \ge \frac{2}{\pi}K_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Докажем (15). Так как $r \ne 1$, то $K_r \le K_3$ и

$$\|\varphi_r\|_q^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi_r(x)|^q\,|\varphi_r(x)|^{2-q}\,dx \;<\; K_r^{2-q}\|\varphi_r\|_q^q \;\le\; K_3^{2-q}\|\varphi_r\|_q^q.$$

Отсюда

$$\|\varphi_r\|_q^q > K_3^{q-2}\|\varphi_r\|_2^2 = K_3^{q-2}\,\frac{2}{\pi}K_{2r+1} >$$

$$> K_3^{q-2}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{4}{\pi} = \frac{8}{\pi^2}K_3^{q-2} = \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{\pi^3}{24}\right)^{q-2}.$$

Лемма 3 доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Используя оценки (14), для любых натуральных $r, r_1, \ldots, r_m$ и $m > 1$ при $q \in [1, 2]$ получаем неравенство

$$\frac{\|\varphi_r\|_q}{\prod_{k=1}^m \|\varphi_{r_k}\|_q} > \frac{\pi}{4}\left(\frac{12}{\pi^2}\right)^{m/q}. \tag{16}$$

Так как $\left(\frac{12}{\pi^2}\right)^{9/7} > \frac{4}{\pi}$, то из (16) следует

$$\|\varphi_r\|_q > \prod_{k=1}^m \|\varphi_{r_k}\|_q, \tag{17}$$

если только $\frac{m}{q} \ge \frac{9}{7}$. Это условие при $m \ge 3$ выполнено для всех $q \in [1, 2]$, а в случае $m = 2$ — при $q \in \left[1, \frac{14}{9}\right]$.

Пусть теперь $m = 2$, $q \in \left[\frac{14}{9}, 2\right]$. Используя (15) для оценки снизу $\|\varphi_r\|_q$ и (14) для оценки сверху $\|\varphi_{r_j}\|_q$, при любых $r, r_1, r_2 \in N$ и $r \ne 1$ имеем

$$\left(\frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_{r_1}\|_q\,\|\varphi_{r_2}\|_q}\right)^q > \frac{K_3^{q-2}\,8/\pi^2}{(K_3\,2/\pi)^2} = \frac{2}{K_3^{4-q}}.$$

Так как $q \geq \dfrac{14}{9} > \dfrac{3}{2}$, то

$$\frac{2}{K_3^{4-q}} > \frac{2}{K_3^{4-3/2}} = 2\left(\frac{24}{\pi^3}\right)^{2,5} > 1.$$

Тем самым неравенство (17) доказано при $r \neq 1$ для всех $m > 1$, $q \in [1, 2]$ и $r, r_1, \ldots, r_m \in N$. Из (17) и (13) следует утверждение теоремы 1.

***Замечание* 1.** В отличие от описанного в теореме 1 случая $p \in [2, \infty]$ при $p = 1$ и $m > 1$ ситуация иная. Так как [1; 4, с. 345]

$$d_{2n-1}(W_1^r(T^1))_1 = E(W_1^r(T^1); \mathcal{F}^{2n-1})_1 = \|\varphi_{n,r}\|_\infty$$

и поперечники реализуют линейные операторы Фавара, из (2) и леммы 2 следует, что для любых $r, n \in N^m$

$$D_{2n-1}(W_1^r(T^m))_{L_1(T^m)} = D_{2n}(W_1^r(T^m))_{L_1(T^m)} =$$

$$= E(W_1^r(T^m); F_{\mathcal{F}^{2n-1};1})_{L_1(T^m)} = E(W_1^r(T^m); F_{S_{2n,r-1};1})_{L_1(T^m)} = \prod_{k=1}^{m}\|\varphi_{n_k, r_k}\|_\infty,$$

т. е. при $p = 1$ выполнены многомерные аналоги соотношений (3) и (4).

***Замечание* 2.** Соотношение (17), доказанное для $q \in [1, 2]$ и произвольного $r > 1$, применялось в (13) в случае $r = r_1 + \ldots + r_m$. При таком выборе r для $q = \infty$ соотношение (17) не выполняется. По-видимому, критическое значение q_{kr} $(q_{kr} > 2)$ такое, что для всех $q < q_{kr}$

$$\|\varphi_{r_1+\ldots+r_m}\|_q > \prod_{k=1}^{m}\|\varphi_{r_k}\|_q,$$

зависит от значений $m, r_1, \ldots, r_m$. Можно показать, что (17) будет выполнено и при некоторых $q > 2$ (даже для произвольных $r \in N$) при достаточно больших m. Действительно, для $q \in (2, \infty)$

$$\|\varphi_r\|_q^q = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi_r(x)|^{q-2}|\varphi_r(x)|^2\,dx <$$

$$< K_r^{q-2}\|\varphi_r\|_q^2 < K_1^{q-2}\frac{2}{\pi}K_{2r+1} \leq K_1^{q-2}\frac{2}{\pi}K_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^q,$$

следовательно, для всех $r_k \geq 1$

$$\prod_{k=1}^{m}\|\varphi_{r_k}\|_q^q < \left(\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^q\right)^m.$$

С другой стороны,

$$\|\varphi_r\|_q^q \geq \|\varphi_r\|_2^q = \left(\frac{2}{\pi}K_{2r+1}\right)^{q/2} > \left(\frac{2}{\pi}\frac{4}{\pi}\right)^{q/2} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)^q.$$

Отсюда

$$\frac{\|\varphi_r\|_q^q}{\prod_{k=1}^m \|\varphi_{r_k}\|_q^q} > \frac{\left(2\sqrt{2}/\pi\right)^q}{((\pi/2)^q/3)^m},$$

и теперь правая часть этого неравенства будет неограниченно расти при $m \to \to \infty$, если только $q \geq 2$ таково, что $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^q < 1$, т. е. для всех $q \in \in \left[2, \frac{\ln 3}{\ln \pi/2}\right]$ $\left(\frac{\ln 3}{\ln \pi/2} = 2,4328\ldots\right)$.

Из изложенного следует, что утверждение теоремы 1 выполнено не только при $p \geq 2$, но в зависимости от значений m и $r \in N^m$ может выполняться и при некоторых $p < 2$.

***Замечание* 3.** Из теоремы 1 следует, в частности, что при $m > 1$ в отличие от обобщенных сплайнов, реализующих квазипоперечники классов $W_p^r(T^m)$ в $L_1(T^m)$, обобщенные полиномы при $p \geq 2$ не являются в этом смысле экстремальным подпространством (во всяком случае при достаточно больших значениях координат вектора n). Действительно,

$$\frac{E(W_p^r(T^m); F_{\mathcal{F}^{2n+1};1})_{L_1(T^m)}}{D_{2n}(W_p^r(T^m))_{L_1(T^m)}} \geq \frac{\|\varphi_{|r|}\|_{p'} \prod_{k=1}^m (n_k+1)^{-r_k}}{\prod_{k=1}^m \|\varphi_{r_k}\|_{p'} \prod_{k=1}^m n_k^{-r_k}},$$

и в силу (17) при достаточно больших n_k правая часть будет больше единицы, а значит, при таких n_k будет

$$E(W_p^r(T^m); F_{\mathcal{F}^{2n+1};1})_{L_1(T^m)} > D_{2n}(W_p^r(T^m))_{L_1(T^m)} \geq$$

$$\geq D_{2n+1}(W_p^r(T^m))_{L_1(T^m)}. \tag{18}$$

4. Рассмотрим L_q-аппроксимацию классов $W_\infty^r(T^m)$. При $m = 1$ и $q \in \in [1, \infty]$ известно (см., например, [4, с. 217, 352]), что

$$d_{2n}(W_\infty^r(T^1))_q = E(W_\infty^r(T^1); S_{2n,r-1})_q = \|\varphi_{n,r}\|_q. \tag{19}$$

В [10] доказано, что при $m > 1$ и $q \in [1, \infty]$

$$E(W_\infty^r(T^m); F_{S_{2n,r-1};q})_{L_q(T^m)} = \prod_{k=1}^m \|\varphi_{n_k,r_k}\|_q. \tag{20}$$

В следующей теореме для рассматриваемого случая приведены аналоги изложенных в предыдущих пунктах результатов.

Теорема 2. *Пусть* $m > 1$.

1. *Если* $q \in [1, \infty]$, *то для всех* r, $n \in N^m$ *выполняются равенства*

$$D_{2n}(W_\infty^r(T^m))_{L_q(T^m)} = E(W_\infty^r(T^m); F_{S_{2n,r-1};q})_{L_q(T^m)} = \prod_{k=1}^m \|\varphi_{n_k,r_k}\|_q. \tag{21}$$

2. *Если* $q \in [1, 2]$, *то*

$$\frac{E(W_\infty^r(T^m); F_{\mathcal{F}^{2n-1};q})_{L_q(T^m)}}{E(W_\infty^r(T^m); F_{S_{2n,r-1};q})_{L_q(T^m)}} > 1. \tag{22}$$

3. *При* $q \in [1, 2]$ *и достаточно больших* n_k, $k = 1, \ldots, m$, *выполняются неравенства*

$$E(W_\infty^r(T^m); F_{\mathcal{F}^{2n-1};q})_{L_q(T^m)} > D_{2n-1}(W_\infty^r(T^m))_{L_q(T^m)}. \tag{23}$$

Соотношение (21) следует из (9), (20) и (6′), соотношение (22) — из (17), а (23) устанавливается аналогично (18).

1. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими многочленами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207–256.
2. *Туровец С. П.* О наилучшем приближении в среднем дифференцируемых функций // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1968. – № 5. – С. 417–421.
3. *Тайков Л. В.* О приближении в среднем некоторых классов периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 61–70.
4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
5. *Cheney E. W.* Best approximation in tensor-product space // Lect. Notes Math. – 1980. – **773**. – P. 25–32.
6. *Бабаев М.-Б.-А.* Приближение соболевских классов функций суммами произведений функций меньшего числа переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1987. – **180**. – С. 30–31.
7. *Вакарчук С. Б.* Аппроксимация дифференцируемых функций многих переменных // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 3. – С. 37–44.
8. *Корнейчук Н. П., Переверзев С. В.* К вопросу о приближении функций двух переменных операторами, построенными на базе одномерных операторов // Теория функций и топология. – Киев, 1983. – С. 43–49.
9. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
10. *Шабозов М.* Оценки приближения дифференцируемых периодических функций двух переменных интерполяционными сплайнами // Вопросы теории аппроксимации функций. – Киев, 1980. – С. 166–172.

Получено 31.07.96