УДК 517.9

О. А. Бойчук (Ін-т математики НАН України, Київ),
С. А. Кривошея (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

КРИТЕРІЙ РОЗВ'ЯЗНОСТІ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ЛЯПУНОВА

By using the theory of generalized inverse operators, we establish the criterion of solvability and study the structure of a set of solutions of the Lyapunov type matrix equations $AX - XB = D$ and $X - AXB = D$.

За допомогою теорії узагальнено обернених операторів одержано критерій розв'язності та досліджено структуру множини розв'язків матричних рівнянь $AX - XB = D$, $X - AXB = D$ типу Ляпунова.

Розглянемо матричні рівняння

$$AX - XB = D, \tag{1}$$

$$X - AXB = D, \tag{2}$$

де A, B та D — відомі матриці розмірів відповідно $(m \times m)$, $(n \times n)$ та $(m \times n)$, а X — невідома матриця розміру $(m \times n)$. До дослідження розв'язності матричних рівнянь типу (1), (2) зводиться багато задач теорії стійкості, теорії оптимального керування та ін. [1]. Структура множини розв'язків однорідного рівняння (1) $(D = 0)$ була досліджена Фробеніусом в 1910 р. [2, 3] (див. також [4]). Окремі випадки розв'язності рівнянь (1), (2) розглянуто в роботах [2, 3, 5, 6]. У даній роботі на основі теорії узагальнено обернених операторів [7] отримано критерій розв'язності рівнянь (1), (2) в термінах жорданової структури матриць A та B.

1. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що рівняння (1) має вигляд

$$LZ \overset{\text{def}}{=} A_0 Z - Z B_0 = D, \tag{3}$$

де $A_0 = \operatorname{diag}\{I_{p_1}(\lambda_1), \ldots, I_{p_u}(\lambda_u)\}$, $B_0 = \operatorname{diag}\{I_{q_1}(\mu_1), \ldots, I_{q_v}(\mu_v)\}$ — нормальні жорданові форми матриць A та B відповідно $(A = UA_0U^{-1}$, $B = VB_0V^{-1})$, $I_{p_i}(\lambda_i) = \lambda_i E_{p_i} + H_{p_i}$, $I_{q_j}(\mu_j) = \mu_j E_{q_j} + H_{q_j}$ — жорданові блоки, $\sum_{i=1}^{u} p_i = m$, $\sum_{j=1}^{v} q_j = n$, $Z = U^{-1}XV$, $F = U^{-1}DV$. Оскільки $L : C_{m\times n} \to C_{m\times n}$ — лінійний оператор, який діє в скінченновимірному просторі, то, як відомо [7], рівняння (3) розв'язне тоді і тільки тоді, коли виконується умова $P_{N(L^*)}F = 0$. Загальний розв'язок операторного рівняння (3) має вигляд

$$Z = \sum_{k=1}^{n_0} c_k Z_k + L^+ F, \tag{4}$$

де $P_{N(L^*)}$ — ортопроектор на ядро $(\operatorname{Ker} L^*)$ спряженого оператора L^*; $n_0 = \dim \operatorname{Ker} L$; $Z_1, \ldots, Z_{n_0}$ — базис $\operatorname{Ker} L$; $c_1, \ldots, c_{n_0}$ — довільні параметри; L^+ — псевдообернений оператор, який може бути побудований, наприклад, за формулами [7]

$$L^+ = L^*(LL^* + P_{N(L^*)})^{-1} = (L^*L + P_{N(L)})^{-1}L. \tag{5}$$

В даній роботі побудовано базиси ядер відповідних лінійних операторів, за допомогою яких конкретизовано критерії розв'язності рівнянь (1), (2) та досліджено множини їх розв'язків.

У просторі $C_{m\times n}$-комплексних матриць розміру $(m\times n)$ введемо скалярний добуток матриць $K=(k_{ij})$, $T=(t_{ij})$ за формулою

$$\langle K,T\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\overline{t_{ij}}, \tag{6}$$

(аксіоми скалярного добутку можна перевірити безпосередньо). Використавши означення спряженого оператора в гільбертовому просторі: $\langle LK,T\rangle=\langle K,L^*T\rangle$, дістанемо $L^*Z = A_0^*Z - ZB_0^*$. Побудуємо базиси $\operatorname{Ker} L$ і $\operatorname{Ker} L^*$. Для цього матрицю Z в (3) шукатимемо в блочному вигляді $Z=(Z_{ij})$, $i=1,\ldots,u$; $j=1,\ldots,v$, де Z_{ij} — матриця розміру $(p_i\times q_j)$. Зобразивши матрицю F в аналогічному блочному вигляді $F=(F_{ij})$, одержимо

$$(\mu_j-\lambda_i)Z_{ij} + H_{p_i}Z_{ij} - Z_{ij}H_{q_j} = F_{ij}. \tag{7}$$

Як відомо [4], при виконанні умови $\mu_j\neq\lambda_i$ рівняння (7) має єдиний розв'язок для будь-якої матриці F_{ij}.

Нехай $\mu_j=\lambda_i$. Рівняння (7) запишемо у вигляді

$$L_{ij}Z_{ij} \overset{\text{def}}{=} H_{p_i}Z_{ij} - Z_{ij}H_{q_j} = F_{ij}, \tag{8}$$

де $L_{ij}\colon C_{p_i\times q_j}\to C_{p_i\times q_j}$.

Лема 1. *Лінійний оператор L є фредгольмовим оператором:*

$$\dim\operatorname{Ker} L = \dim\operatorname{Ker} L^* = n_0 = \sum_{i=1}^{u}\sum_{j=1}^{v}\tau_{ij},$$

де $\tau_{ij}=r_{ij}=\min(p_i,q_j)$ *при* $\mu_j=\lambda_i$, $\tau_{ij}=0$ *при* $\mu_j\neq\lambda_i$.

Доведення. Достатньо знайти індекси операторів L_{ij}. Розглянувши рівняння $L_{ij}Z_{ij}=0$, $L_{ij}^*Z_{ij}=0$ неважко переконатись, що базисами $\operatorname{Ker}L_{ij}$, $\operatorname{Ker}L_{ij}^*$ є відповідно системи матриць

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = \left[\begin{array}{lll} H_{p_i}^{k-1}, & k=1,\ldots,p_i; & p_i=q_j; \\ \left(0,H_{p_i}^{k-1}\right), & k=1,\ldots,p_i; & p_i<q_j; \\ \operatorname{col}\left(H_{q_j}^{k-1},0\right), & k=1,\ldots,q_j; & p_i>q_j, \end{array}\right.$$

$$\tilde\varepsilon_{ij}^{(k)} = \left[\begin{array}{lll} H_{p_i}^{*k-1}, & k=1,\ldots,p_i; & p_i=q_j; \\ \left(H_{p_i}^{*k-1},0\right), & k=1,\ldots,p_i; & p_i<q_j; \\ \operatorname{col}\left(0,H_{q_j}^{*k-1}\right), & k=1,\ldots,q_j; & p_i>q_j. \end{array}\right. \tag{9}$$

Отже, $\dim\operatorname{Ker}L_{ij} = \dim\operatorname{Ker}L_{ij}^* = r_{ij} = \min(p_i,q_j)$, $\operatorname{ind}L_{ij}=0$, $\dim\operatorname{Ker}L = \dim\operatorname{Ker}L^* = n_0$, $\operatorname{ind}L=0$.

Наслідок 1. *Системи блочних матриць вигляду*

$$Z_k^{(i,j)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \varepsilon_{ij}^{(k)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde Z_k^{(i,j)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \tilde\varepsilon_{ij}^{(k)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

утворюють базиси $\operatorname{Ker} L$ *і* $\operatorname{Ker} L^*$ *відповідно, де при фіксованих* i, j, $i = 1, \ldots, u$; $j = 1, \ldots, v$, $\mu_j = \lambda_i$, *індекс* k *змінюється від* 1 *до* r_{ij}.

Ортопроектор $P_{N(L_{ij}^*)}$ на $\operatorname{Ker} L_{ij}^*$ побудуємо, використавши формулу (3.4) з [7, с.62]

$$P_{N(L_{ij}^*)} Y = \sum_{k,l=1}^{r_{ij}} \gamma_{kl}^{(-1)} \left\langle \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(l)}, Y \right\rangle \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)}, \tag{11}$$

де $\gamma_{kl}^{(-1)}$ — елементи матриці Γ^{-1}, оберненої до матриці Грама $\Gamma = \left(\left\langle \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)}, \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(l)} \right\rangle\right)$, $k, l = 1, \ldots, r_{ij}$. Внаслідок ортогональності матриць $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$ маємо

$$\begin{gathered} \Gamma^{-1} = \operatorname{diag}\{ r_{ij}^{-1}, (r_{ij} - 1)^{-1}, \ldots, 1 \}, \\ P_{N(L_{ij}^*)} Y = \sum_{k=1}^{r_{ij}} (r_{ij} - k + 1)^{-1} \left\langle \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)}, Y \right\rangle \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)}. \end{gathered} \tag{12}$$

Ортопроектором $P_{N(L^*)}$ на $\operatorname{Ker} L^*$ є блочний оператор $P_{N(L^*)} = (P_{ij})$, дія якого на блочну матрицю $F = (F_{ij})$ визначена формулою $P_{N(L^*)} F \overset{\text{def}}{=} (P_{ij} F_{ij})$, де $P_{ij} = 0$ при $\mu_j \neq \lambda_i$, $P_{ij} = P_{N(L_{ij}^*)}$ при $\mu_j = \lambda_i$.

Врахувавши структуру матриць $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$, необхідну і достатню умову $P_{N(L^*)} F = 0$ розв'язності матричного рівняння (3) запишемо в еквівалентній формі

$$R F = 0, \tag{13}$$

де блочний оператор $R = (R_{ij})\colon C_{m \times n} \to \operatorname{Ker} L^*$ визначено формулами

$$\begin{gathered} R F \overset{\text{def}}{=} (R_{ij} F_{ij}), \\ R_{ij} F_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \qquad \text{при } \mu_j \neq \lambda_i, & \\ \left.\begin{matrix} \displaystyle\sum_{l=0}^{r_{ij}-1} \left(\sum_{k=1}^{r_{ij}-l} f_{k+lk} \right) \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(l+1)} \qquad (p_i \leq q_j), \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{r_{ij}-1} \left(\sum_{k=1}^{r_{ij}-l} f_{h_{ij}+k+lk} \right) \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(l+1)} \quad (q_j < p_i;\ p_i - q_j = h_{ij}) \end{matrix}\right\} & \text{при } \mu_j = \lambda_i \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{14}$$

(f_{k+lk}, $f_{h_{ij}+k+lk}$ — елементи матриці-блоку F_{ij}).

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Матричне рівняння* (3) *є розв'язним тоді і тільки тоді, коли матриця* $F = U^{-1} D V$ *задовольняє умову* (13). *При виконанні умови* (13) *матричне рівняння* (3) *має* n_0*-параметричну сім'ю розв'язків*

$$Z = \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{v} C^{(i,j)} Z^{(i,j)} + L^+ F, \tag{15}$$

де $n_0 = \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{v} \tau_{ij}$; $\tau_{ij} = \begin{cases} 0 & \textit{при } \mu_j \neq \lambda_i; \\ r_{ij} = \min(p_i, q_j) & \textit{при } \mu_j = \lambda_i; \end{cases}$ $C^{(i,j)} = (c_1^{(i,j)} E_m, \ldots, c_{\tau_{ij}}^{(i,j)} E_m)$, $Z^{(i,j)} = \operatorname{col}(Z_1^{(i,j)}, \ldots, Z_{\tau_{ij}}^{(i,j)})$; $c_k^{(i,j)}$ — *довільні скалярні параметри;* $Z_k^{(i,j)}$ *визначені формулою* (10); L^+ — *псевдообернений оператор* (5).

2. Розглянемо матричне рівняння (2). Як і раніше, вважатимемо, що рівняння (2) має вигляд

$$MZ \overset{\text{def}}{=} Z - A_0 Z B_0 = F, \tag{16}$$

де $A_0 = \operatorname{diag}\{ I_{p_1}(\lambda_1), \ldots, I_{p_u}(\lambda_u) \}$, $B_0 = \operatorname{diag}\{ I_{q_1}(\mu_1), \ldots, I_{q_v}(\mu_v) \}$, $Z = U^{-1} X V$, $F = U^{-1} D V$, M — лінійний оператор, $M : C_{m\times n} \to C_{m\times n}$, $Z = (Z_{ij})$, $F = (F_{ij})$ — блочні матриці, Z_{ij}, F_{ij} — матриці-блоки розмірів $(p_i \times q_i)$.

Z_{ij} визначається з рівняння

$$(1 - \lambda_i \mu_j) Z_{ij} = \mu_j H_{p_i} Z_{ij} + I_{p_i}(\lambda_i) Z_{ij} H_{q_j} + F_{ij}. \tag{17}$$

Нехай $\lambda_i \mu_j \neq 1$. Тоді, як відомо [2, 3], рівняння (17) для будь-якої матриці F_{ij} має єдиний розв'язок. Розглянемо випадок $\lambda_i \mu_j = 1$. Рівняння (17) перепишемо у вигляді

$$\mu_j H_{p_i} Z_{ij} + I_{p_i}(\lambda_i) Z_{ij} H_{q_j} = -F_{ij}. \tag{18}$$

Врахувавши, що $\lambda_i \neq 0$, помножимо рівняння (18) зліва на $I_{p_i}^{-1}(\lambda_i) = \sum_{k=1}^{p_i} (-1)^{k-1} \lambda_i^{-k} H_{p_i}^{k-1}$. Одержимо рівняння

$$\tilde{H}_{p_i} Z_{ij} + Z_{ij} H_{q_j} = I_{p_i}^{-1}(\lambda_i) F_{ij}, \tag{19}$$

$$\tilde{H}_{p_i} = \mu_j \, I_{p_i}^{-1}(\lambda_i) \, H_{p_i} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_i^2 & -\alpha_i^3 & \cdots & (-1)^{p_i} \alpha_i^{p_i} \\ 0 & 0 & \alpha_i^2 & \cdots & (-1)^{p_i - 1} \alpha_i^{p_i - 1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_i^2 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -\alpha_i^3 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_i^2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \lambda_i^{-1}. \tag{20}$$

Легко бачити, що нормальною жордановою формою матриці $\tilde{H}_{p_i}$ є матриця H_{p_i}: $\tilde{H}_{p_i} = W_i H_{p_i} W_i^{-1}$. Виконавши в (19) заміну $Y_{ij} = W_i^{-1} Z_{ij}$, одержимо рівняння

$$M_{ij} Y_{ij} \overset{\text{def}}{=} H_{p_i} Y_{ij} + Y_{ij} H_{q_j} = \tilde{F}_{ij}, \tag{21}$$

де $\tilde{F}_{ij} = -W_i^{-1} I_{p_i}^{-1} F_{ij}$.

З допомогою леми 1 можна показати, що справедливі такі твердження.

Лема 2. *Оператор* M_{ij} *є фредгольмовим:* $\dim \operatorname{Ker} M_{ij} = \dim \operatorname{Ker} M_{ij}^* = \min(p_i, q_j)$. *Базисами* $\operatorname{Ker} M_{ij}$, $\operatorname{Ker} M_{ij}^*$ *є відповідно системи матриць*

$$. E_{ij}^{(k)} = \begin{cases} G_{p_i} H_{p_i}^{k-1}, & k = 1, \ldots, p_i; \quad p_i = q_j; \\ (0, G_{p_i} H_{p_i}^{k-1}), & k = 1, \ldots, p_i; \quad p_i < q_j; \\ \operatorname{col}(G_{q_j} H_{q_j}^{k-1}, 0), & k = 1, \ldots, q_j; \quad q_j < p_i, \end{cases}$$

$$. \tilde{E}_{ij}^{(k)} = \begin{cases} H_{p_i}^{*k-1} G_{p_i}, & k = 1, \ldots, p_i; \quad p_i = q_j; \\ (H_{p_i}^{*k-1} G_{p_i}, 0), & k = 1, \ldots, p_i; \quad p_i < q_j; \\ \operatorname{col}(0, H_{q_j}^{*k-1} G_{q_j}), & k = 1, \ldots, q_j; \quad q_j < p_i, \end{cases} \tag{22}$$

$$G_{p_i} = \operatorname{diag}\{1, -1, \ldots, (-1)^{p_i - 1}\}.$$

Теорема 2. *Матричне рівняння* (16) *є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$S\overline{F} = 0, \tag{23}$$

де $\overline{F} = (\overline{F}_{ij})$ — *блочна матриця:* $\overline{F}_{ij} = F_{ij}$ *при* $\lambda_i \mu_j \neq 1$, $\overline{F}_{ij} = \tilde{F}_{ij}$ *при* $\lambda_i \mu_j = 1$, *а* $S = (S_{ij})$ — *блочний оператор, дія якого на матрицю* $\overline{F}$ *визначається формулами* $S\overline{F} = (S_{ij}\overline{F}_{ij})$,

$$S_{ij}\overline{F}_{ij} =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{при } \lambda_i \mu_j \neq 1, \\ \left.\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{l=0}^{r_{ij}-1}\left(\sum_{k=1}^{r_{ij}-l}(-1)^{k-1}\tilde{f}_{k+lk}\right)\tilde{E}_{ij}^{(l+1)} & (p_i \leq q_j), \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{r_{ij}-1}\left(\sum_{k=1}^{r_{ij}-l}(-1)^{k-1}\tilde{f}_{h_{ij}+k+lk}\right)\tilde{E}_{ij}^{(l+1)} & (q_j > p_i;\ h_{ij} = q_j - p_i) \end{array}\right\} \text{при } \lambda_i \mu_j \neq 1, \end{cases} \tag{24}$$

де $\tilde{f}_{k+lk}$, $\tilde{f}_{h_{ij}+k+lk}$ – *елементи матриці-блоку* $\tilde{F}_{ij}$, $r_{ij} = \min(p_i, q_j)$.

При виконанні умови (23) матричне рівняння (16) має n_0-параметричну сім'ю розв'язків

$$Z = \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{v} C^{(i,j)} Z^{(i,j)} + M^{+} F, \tag{25}$$

де $n_0 = \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{v} \tau_{ij}$; $\tau_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda_i \mu_j \neq 1; \\ r_{ij} & \text{при } \lambda_i \mu_j = 1; \end{cases}$ $C^{(i,j)} = (c_1^{(i,j)} E_m, \ldots$ $\ldots, c_{\tau_{ij}}^{(i,j)} E_m)$; $Z^{(i,j)} = \operatorname{col}(Z_1^{(i,j)}, \ldots, Z_{\tau_{ij}}^{(i,j)})$; $c_k^{(i,j)}$ – довільні скалярні параметри; $Z_k^{(i,j)}$ – блочна матриця вигляду

$$Z_k^{(i,j)} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \ldots & W_i E_{ij}^{(k)} & \ldots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

M^{+} – псевдообернений оператор.

Зауваження. Побудова операторів L^{+}, M^{+} зводиться до побудови операторів L_{ij}^{+} і M_{ij}^{+} за допомогою формул типу (5). У випадку $p_i = q_j = 2$ оператори L_{ij}^{+} і M_{ij}^{+} виражаються через L_{ij} і M_{ij} в явному вигляді за формулами $L_{ij}^{+} = 1/2\, L_{ij}^{*}$, $M_{ij}^{+} = 1/2\, M_{ij}^{*}$.

Приклад 1. Розглянемо матричне рівняння

$$AX - XB = D \left(A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = (d_{ij}) \right). \tag{27}$$

У цьому випадку $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $U^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $V^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = \mu_1 = 2$, $p_1 = q_1 = 2$, $r_{11} = \min(p_1, q_1) = 2$,

$$F = U^{-1} D V = \begin{pmatrix} 3d_{12}+2d_{22} & -3d_{11}-2d_{21} \\ d_{12}+d_{22} & -d_{11}-d_{21} \end{pmatrix} = (F_{11}),\ F_{11} = (f_{ij})$$

Побудувавши за формулами (14) оператор

$$R = (R_{11}) : R_{11} F_{11} = (f_{11} + f_{22}) E_2 + f_{21} H_2^*,$$

одержимо критерій розв'язності рівняння (27)

$$3d_{12} + 2d_{22} - d_{11} - d_{21} = 0,\quad d_{12} + d_{22} = 0. \tag{28}$$

При виконанні умови (28) загальний розв'язок рівняння (27) має вигляд

$$X = U(c_1 E_2 + c_2 H_2 + L^+ F) V^{-1}, \tag{29}$$

де $LF \overset{\mathrm{def}}{=} H_2 F - F H_2$, $\quad L^+ F = 1/2\, L^* F = 1/2(H_2^* F - F H_2^*)$.

Приклад 2. Знайдемо критерій розв'язності матричного рівняння

$$AX - XB = D \left(A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},\ D = (d_{ij}) \right). \tag{30}$$

Маємо $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $U^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2\,(p_1 = 2)$, $\mu_1 = 0\,(q_1 = 1)$, $\mu_2 = 2\,(q_2 = 1)$.

Матриця $F = U^{-1} D V$ має вигляд

$$F = \begin{pmatrix} 3d_{11}+2d_{21}-3d_{12}-2d_{22} & -3d_{11}-2d_{21}+6d_{12}+4d_{22} \\ d_{11}+d_{21}-d_{12}-d_{22} & -d_{11}-d_{21}+2d_{12}+2d_{22} \end{pmatrix} = (F_{11}\, F_{12}),$$

де F_{11}, F_{12} – матриці розміру (2×1).

Побудуємо оператор $R = (R_{11}\, R_{12})$. Оскільки $\lambda_1 \neq \mu_1$, то $R_{11} = 0$. Оператор R_{12} будуємо, використовуючи формулу (14) $(r_{12} = \min(p_1, q_2) = 1,\ h_{12} = p_1 - q_2 = 1) : R_{12} F_{12} = f_{21}\, \tilde{\varepsilon}_{12}^{(1)}$, де f_{21}— елемент другого рядка матриці F_{12}. Критерій $RF = 0$ розв'язності рівняння (30) має вигляд $f_{21} = 2d_{12} + 2d_{22} - d_{11} - d_{21} = 0$.

1. *Reid W. T.* Ricatti diferential equations. – New York; London, 1972. – 124 p.
2. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1978.– 280 с.
3. *McDuffee C. C.* The theory of matrices. – New York: Chelsea, 1959.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988.– 552 с.
5. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969.– 362 с.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970.– 534 с.
7. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 320 с.

Одержано 19.09.97