УДК 517. 5

Д. М. Бушев (Ін-т математики НАН України, Київ)

ІЗОМЕТРИЧНІСТЬ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРІВ З РІЗНИМ ЧИСЛОМ ЗМІННИХ

The spaces of real functions of $n + k$ variables are constructed which are isometric to spaces of real functions given in n-dimensional Euclidean space. Some properties and examples of delta-like kernels are described which are used when constructing isometric spaces of functions with various number of variables. The statements are proved enabling one to construct delta-like kernels with many variables by using delta-like kernels with less number of variables.

Побудовані простори дійсних функцій від $n + k$ змінних, ізометричні просторам дійсних функцій, заданих на n-вимірному евклідовому просторі. Наведені деякі властивості і приклади дельтаподібних ядер, за допомогою яких будуються ізометричні простори функцій з різним числом змінних.

Доведені твердження, які дають можливість будувати дельтаподібні ядра з багатьма змінними, використовуючи дельтаподібні ядра з меншим числом змінних.

Відомо, що не всі результати з наближення функцій однієї змінної автоматично переносяться на відповідні наближення функцій n, $n \geq 2$, змінних. В зв'язку з цим виникає задача про рівність деяких апроксимаційних характеристик для функцій і класів функцій однієї змінної відповідним апроксимаційним характеристикам для функцій і класів функцій n змінних. Знаходження апроксимаційних характеристик зводиться до встановлення віддалей між двома елементами, класами елементів або даним елементом і заданим класом елементів. Тому для розв'язання цієї задачі для функцій і класів функцій з різним числом змінних достатньо ізометрично відобразити простори функцій n змінних у простори функцій $n + k$ змінних. Результати про ізометричність функціональних просторів з різним числом змінних одержані тільки для просторів комплекснозначних функцій. Відомо (див., наприклад, [1, с. 86; 2, с. 92, 111; 3, с. 64, 94; 4, с. 24, 29], що простори комплекснозначних функцій, визначених у верхній півплощині, ізометричні просторам комплекснозначних функцій, визначених на всій дійсній осі, і простори комплекснозначних функцій, визначених на одиничному полікрузі, ізометричні просторам комплекснозначних функцій, заданих на межі цього полікруга — одиничному торі.

В цій статті побудовані простори функцій $n + k$ змінних, ізометричні просторам дійсних функцій, заданих на дійсному n-вимірному евклідовому просторі. Деякі з побудованих просторів співпадають з підпросторами розв'язків рівняння Лапласа, теплопровідності, їх узагальнень та систем цих рівнянь. Тому величини апроксимаційних характеристик у підпросторах розв'язків цих рівнянь і систем рівні величинам відповідних апроксимаційних характеристик у просторах дійсних функцій, які відомі або можуть бути знайдені методами теорії наближення функцій.

Нехай

$$xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

— скалярний добуток векторів $x = (x_1, \ldots, x_n)$ і $y = (y_1, \ldots, y_n)$ у дійсному евклідовому просторі E^n,

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

— норма вектора x, $\pi^n = [-\pi, \pi)^n$ — n-вимірний куб у просторі E^n.

Позначимо через C^n, L_∞^n, $L_{\overline{p}}^n$, $\hat{L}_{\overline{p}}^n$ простори дійсних функцій, заданих на E^n, відповідно неперервних і обмежених, істотно обмежених і вимірних з нормами

$$\|f\|_{C^n} = \sup_{x\in E^n}|f(x)|, \qquad \|f\|_{\tilde{\infty}^n} = \sup_{x\in E^n}\operatorname{vrai}|f(x)|, \tag{1}$$

$$\|f\|_{\overline{p}^n} =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\ldots\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_1, x_2, \ldots, x_n|^{p_1}dx_1\right)^{p_2/p_1}dx_2\right)^{p_3/p_2}\ldots\right)^{p_n/p_{n-1}}dx_n\right)^{\frac{1}{p_n}}, \tag{2}$$

$$\|f\|_{\hat{\overline{p}}^n} = \sup_{a_n\in E}\left(\int_{a_n}^{a_n+2\pi}\left(\ldots\sup_{a_2\in E}\left(\int_{a_2}^{a_2+2\pi}\left(\sup_{a_1\in E}\int_{a_1}^{a_1+2\pi}|f(x_1, x_2, \ldots\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\ldots, x_n|^{p_1}dx_1\right)^{p_2/p_1}dx_2\right)^{p_3/p_2}\ldots\right)^{p_n/p_{n-1}}dx_n\right)^{\frac{1}{p_n}}, \tag{3}$$

$\tilde{C}^n, \tilde{L}^n_\infty, \tilde{L}^n_p$ — простори дійсних функцій, заданих на $\pi^n = [-\pi, \pi)^n$, 2π-періодичних по кожній змінній, відповідно неперервних, істотно обмежених і вимірних з нормами

$$\|f\|_{\tilde{C}^n} = \sup_{x\in\pi^n}|f(x)|, \qquad \|f\|_{\tilde{\infty}^n} = \sup_{x\in\pi^n}\operatorname{vrai}|f(x)|, \tag{4}$$

$$\|f\|_{\tilde{\overline{p}}^n} =$$

$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ldots\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x_1, x_2, \ldots, x_n|^{p_1}dx_1\right)^{p_2/p_1}dx_2\right)^{p_3/p_2}\ldots\right)^{p_n/p_{n-1}}dx_n\right)^{\frac{1}{p_n}}, \tag{5}$$

де $\overline{1} = (1, \ldots, 1) \le \overline{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \overline{\infty} = (\infty, \ldots, \infty)$ і остання нерівність означає, що $1 \le p_i < \infty$, $i = \overline{1, n}$. З означень (1) – (5) випливає, що $\tilde{C}^n \subset C^n \subset L^n_\infty \subset L^n_{\overline{p}} \subset \subset \hat{L}^n_{\overline{p}}$, $\tilde{C}^n \subset \tilde{L}^n_\infty \subset L^n_\infty$. Якщо $\overline{p} = (p, \ldots, p)$, то простори $\hat{L}^n_{\overline{p}}, L^n_{\overline{p}}, \tilde{L}^n_{\overline{p}}$ та їх норми будемо відповідно позначати $\hat{L}^n_p, L^n_p, \tilde{L}^n_p$ та $\|f\|_{\hat{p}^n}, \|f\|_{p^n}, \|f\|_{\tilde{p}^n}$. Якщо $n = 1$, то індекс n будемо опускати.

Нехай нерівність $\overline{y} \ge \overline{0}$ означає, що координати вектора $\overline{y}$ невід'ємні, а $\overline{y} > \overline{0}$, що, крім того, хоча б одна з них додатна,

$$\Pi^+_{n,k} = \left\{(x, \overline{y}) \in E^{n+k} : (\overline{y} > \overline{0})\right\}, \qquad \overline{\Pi}^+_{n,k} = \left\{(x, \overline{y}) \in E^{n+k} : (\overline{y} \ge \overline{0})\right\} \tag{6}$$

— підмножини простору E^{n+k}; X^n — один з просторів $C^n, L^n_\infty, L^n_{\overline{p}}, \hat{L}^n_{\overline{p}}$; $\tilde{X}^n$ — один з просторів $\tilde{C}^n, \tilde{L}^n_\infty, \tilde{L}^n_{\overline{p}}$; X^nM_k, $\tilde{X}^nM_k$ і $X^n\overline{M}_k$, $\tilde{X}^n\overline{M}_k$ — простори дійсних функцій $f(x, y)$, визначених відповідно на $\Pi^+_{n,k}$ і $\overline{\Pi}^+_{n,k}$ з нормами

$$\|f\|_{X^nM_k} = \sup_{\overline{y}>\overline{0}}\|f(x, \overline{y})\|_{X_n}, \qquad \|f\|_{\tilde{X}^nM_k} = \sup_{\overline{y}>\overline{0}}\|f(x, \overline{y})\|_{\tilde{X}_n}, \tag{7}$$

$$\|f\|_{X^n\overline{M}_k} = \sup_{\overline{y}\ge\overline{0}}\|f(x, \overline{y})\|_{X_n}, \qquad \|f\|_{\tilde{X}^n\overline{M}_k} = \sup_{\overline{y}\ge\overline{0}}\|f(x, \overline{y})\|_{\tilde{X}_n}. \tag{8}$$

Нехай далі $Q_a^n = [-a, a]^n \subset E^n$ — n-вимірний куб у просторі E^n, $I_{\bar{y}^k}^n(x) = I(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) \in L_1^n M_k = L^n M_k$ і $\tilde{K}_{\bar{y}^k}^n(x) = \tilde{K}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) \in \tilde{L}_1^n M_k = \tilde{L}^n M_k$ — дельтаподібні ядра такі, що при кожному $\bar{y} > \bar{0}, \eta > 0$ і $0 < \Delta < \pi$ справедливі рівності

$$\int_{E^n} I_{\bar{y}^k}^n(x)\,dx = 1 = \int_{\pi^n} \tilde{K}_{\bar{y}^k}^n(x)\,dx, \tag{9}$$

$$\lim_{\bar{y} \to \bar{0}+\bar{0}} \int_{E^n \setminus Q_\eta^n} \left| I_{\bar{y}^k}^n(x) \right| dx = \lim_{\bar{y} \to \bar{0}+\bar{0}} \int_{\pi^n \setminus Q_\Delta^n} \left| \tilde{K}_{\bar{y}^k}^n(x) \right| dx = 0. \tag{10}$$

Рівності (10), внаслідок довільності η і Δ, рівносильні рівностям

$$\lim_{\bar{y} \to \bar{0}+\bar{0}} \int_{|x| > \eta} \left| I_{\bar{y}^k}^n(x) \right| dx = \lim_{\bar{y} \to \bar{0}+\bar{0}} \int_{\Delta < |x| \le \pi} \left| \tilde{K}_{\bar{y}^k}^n(x) \right| dx = 0. \tag{11}$$

Якщо $I_{\bar{y}^k}^n(x) \ge 0$ і $\tilde{K}_{\bar{y}^k}^n(x) \ge 0$ — невід'ємні дельтаподібні ядра, то з (9) і означень (7) норм у просторах $L^n M_k$ і $\tilde{L}^n M_k$ маємо

$$\left\| I_{\bar{y}^k}^n \right\|_{1^n M_k} = \int_{E^n} I_{\bar{y}^k}^n(x)\,dx = 1 = \left\| \tilde{K}_{\bar{y}^k}^n \right\|_{\tilde{1}^n M_k} = \int_{\pi^n} \tilde{K}_{\bar{y}^k}^n(x)\,dx. \tag{12}$$

Позначимо через

$$\left\{ X^N * I_{\bar{y}^k}^n \right\} = \left\{ u(x, y) = \left(f * I_{\bar{y}^k}^n \right)(x) = \int_{E^n} f(x-t)\, I_{\bar{y}^k}^n(t)\,dt \colon (f \in X^n) \right\}, \tag{13}$$

$$\left\{ \tilde{X}^N * \tilde{K}_{\bar{y}^k}^n \right\} = \left\{ \tilde{u}(x, y) = \left(\tilde{f} * \tilde{K}_{\bar{y}^k}^n \right)(x) = \int_{\pi^n} \tilde{f}(x-t)\, \tilde{K}_{\bar{y}^k}^n(t)\,dt \colon (\tilde{f} \in \tilde{X}^n) \right\}, \tag{14}$$

$$\left\{ \overline{X^N * I_{\bar{y}^k}^n} \right\} = \left\{ v(x, y) = \begin{cases} \left(f * I_{\bar{y}^k}^n \right)(x), & \bar{y} > \bar{0}, \\ f(x), & \bar{y} = \bar{0} \end{cases} \colon (f \in X^n) \right\}, \tag{15}$$

$$\left\{ \overline{\tilde{X}^N * \tilde{K}_{\bar{y}^k}^n} \right\} = \left\{ \bar{v}(x, y) = \begin{cases} \left(\tilde{f} * \tilde{K}_{\bar{y}^k}^n \right)(x), & \bar{y} > \bar{0}, \\ \tilde{f}(x), & \bar{y} = \bar{0} \end{cases} \colon (\tilde{f} \in \tilde{X}^n) \right\} \tag{16}$$

простори згорток з дельтаподібними ядрами $I_{\bar{y}^k}^n(x)$ і $\tilde{K}_{\bar{y}^k}^n(x)$, де X^n — один з просторів C^n, L_∞^n, $L_{\bar{p}}^n$, $\hat{L}_{\bar{p}}^n$, а $\tilde{X}^n$ — один з просторів $\tilde{C}^n$, $\tilde{L}_\infty^n$, $\tilde{L}_{\bar{p}}^n$.

Сформулюємо деякі допоміжні твердження для норм. Можна довести, що норми просторів X^n і $\tilde{X}^n$ інваріантні відносно зсуву, тобто для кожного вектора $a \in E^n$ справедливі рівності

$$\| f(x+a) \|_{X^n} = \| f(x) \|_{X^n}, \qquad \| f(x+a) \|_{\tilde{X}^n} = \| f(x) \|_{\tilde{X}^n}.$$

Для норм простору $L_{\bar{p}}^n$ (див., наприклад, [5, с. 22, 23]) виконується узагальнена нерівність Мінковського

$$\left\| \int_{E^k} f(\cdot, t)\,dt \right\|_{\bar{p}^n} \le \int_{E^k} \left\| f(\cdot, t) \right\|_{\bar{p}^n} dt. \tag{17}$$

Аналогічно можна встановити, що така нерівність виконується і для норм просторів X^n і $\tilde{X}^n$, тобто

$$\left\| \int_{E^k} f(\cdot, t)\, dt \right\|_{X^n} \le \int_{E^k} \left\| f(\cdot, t) \right\|_{X^n} dt,$$

$$\left\| \int_{\pi^k} f(\cdot, t)\, dt \right\|_{\tilde{X}^n} \le \int_{\pi^k} \left\| f(\cdot, t) \right\|_{\tilde{X}^n} dt. \tag{18}$$

Відомо (див., наприклад, [5, с. 14]), що при $\overline{1} = (1, \ldots, 1) \le \overline{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \overline{\infty} = (\infty, \ldots, \infty)$ кожна функція f з простору $L^n_{\overline{p}}$ неперервна в цілому в цьому просторі. Аналогічно можна встановити, що якщо X^n — один з просторів C^n_r або $L^n_{\overline{p}}$, а $\tilde{X}^n$ — один з просторів $\tilde{C}^n$ або $\tilde{L}^n_{\overline{p}}$ і $\overline{1} \le \overline{p} < \overline{\infty}$, то кожна функція $f \in X^n$ і $\tilde{f} \in \tilde{X}^n$ неперервна в цілому в цих просторах, тобто для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для кожного $|t| < \delta(\varepsilon)$ справедливі нерівності

$$\| f(x+t) - f(x) \|_{X^n} < \varepsilon, \qquad \left\| \tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x) \right\|_{\tilde{X}^n} < \varepsilon, \tag{19}$$

де $C^n \supset C^n_r$ — підпростір рівномірно неперервних функцій простору C^n.

Доведемо, що простори згорток (13) – (16) є підпросторами відповідно просторів $X^n M_k$, $\tilde{X}^n M_k$, $X^n \overline{M}_k$, $\tilde{X}^n \overline{M}_k$, . З (13), (14), використовуючи (18) і інваріантність норм просторів X^n і $\tilde{X}^n$ відносно зсуву, маємо

$$\| u(x, y) \|_{X^n M_k} = \sup_{\overline{y} > \overline{0}} \left\| \int_{E^n} I^n_{\overline{y}^k}(t) f(x-t)\, dt \right\|_{X^n} \le$$

$$\le \sup_{\overline{y} > \overline{0}} \int_{E^n} \left| I^n_{\overline{y}^k}(t) \right| \| f(x-t)\, dt \|_{X^n} dt = \left\| I^n_{\overline{y}^k}(t) \right\|_{\overline{1}^n M_k} \| f \|_{X^n}, \tag{20}$$

$$\| \tilde{u}(x, y) \|_{\tilde{X}^n M_k} \le \sup_{\overline{y} > \overline{0}} \int_{\pi^n} \left| \tilde{K}^n_{\overline{y}^k}(t) \right| \left\| \tilde{f}(x-t) \right\|_{\tilde{X}^n} dt = \left\| \tilde{K}^n_{\overline{y}^k}(t) \right\|_{\overline{1}^n M_k} \left\| \tilde{f} \right\|_{\tilde{X}^n}. \tag{21}$$

З (15), (16), використовуючи (8) та (20), (21), одержуємо

$$\| f \|_{X^n} \le \| v(x, y) \|_{X^n \overline{M}_k} = \max \left\{ \left\| f * I^n_{\overline{y}^k} \right\|_{X^n M_k}, \| f \|_{X^n} \right\} \le \left\| I^n_{\overline{y}^k} \right\|_{1^n M_k} \| f \|_{X^n}, \tag{22}$$

$$\left\| \tilde{f} \right\|_{\tilde{X}^n} \le \| \tilde{v}(x, y) \|_{\tilde{X}^n \overline{M}_k} = \max \left\{ \left\| \tilde{f} * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k} \right\|_{\tilde{X}^n M_k}, \left\| \tilde{f} \right\|_{\tilde{X}^n} \right\} \le \left\| \tilde{K}^n_{\overline{y}^k} \right\|_{\overline{1}^n M_k} \left\| \tilde{f} \right\|_{\tilde{X}^n}. \tag{23}$$

З (20) – (23) випливає

$$\left\{ X^n * I^n_{\overline{y}^k} \right\} \subset X^n M_k, \qquad \left\{ \tilde{X}^n * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k} \right\} \subset \tilde{X}^n M_k,$$

$$\left\{ \overline{\tilde{X}^n * I^n_{\overline{y}^k}} \right\} \subset X^n \overline{M}_k, \qquad \left\{ \overline{\tilde{X}^n * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k}} \right\} \subset \tilde{X}^n \overline{M}_k.$$

Справедливе наступне твердження.

Лема 1. *Нехай $I^n_{\overline{y}^k}(x)$, $\tilde{K}^n_{\overline{y}^k}(x)$ — відповідно неперіодичне та 2π-періодичне по кожной змінній дельтаподібні ядра. Якщо X^n — один з просторів C^n_r*

або $L^n_{\overline{p}}$, *а* $\tilde{X}^n$ — *один з просторів* $\tilde{C}^n$ *або* $\tilde{L}^n_{\overline{p}}$ *і* $\overline{1} \le \overline{p} < \overline{\infty}$, *то для кожної функції* $f \in X^n$ *і* $\tilde{f} \in \tilde{X}^n$

$$\lim_{\overline{y} \to \overline{0}+\overline{0}} \left\| I^n_{\overline{y}^k} * f \right\|_{X^n} = \| f \|_{X^n}, \tag{24}$$

$$\lim_{\overline{y} \to \overline{0}+\overline{0}} \left\| \tilde{K}^n_{\overline{y}^k} * \tilde{f} \right\|_{\tilde{X}^n} = \left\| \tilde{f} \right\|_{\tilde{X}^n}. \tag{25}$$

Доведення. Використовуючи (7), (8) і інваріантність норми простору X^n відносно зсуву, маємо

$$\left\| I^n_{\overline{y}^k} * f - f \right\|_{X^n} = \left\| \int_{E^n} I^n_{\overline{y}^k}(t)(f(x-t) - f(x))\,dt \right\|_{X^n} \le$$

$$\le \int_{|t| \le \eta} \left| I^n_{\overline{y}^k}(t) \right| \| f(x-t) - f(x) \|_{X^n}\,dt +$$

$$+ \int_{|t| > \eta} \left| I^n_{\overline{y}^k}(t) \right| \| f(x-t) - f(x) \|_{X^n}\,dt \le$$

$$\le \left\| I^n_{\overline{y}^k}(t) \right\|_{1^n M_k} \sup_{|t| \le \eta} \| f(x-t) - f(x) \|_{X^n} +$$

$$+ 2\| f \|_{X^n} \int_{|t| > \eta} \left| I^n_{\overline{y}^k}(t) \right| dt = \omega_{X^n}(f, \eta) \left\| I^n_{\overline{y}^k} \right\|_{1^n M_k} + 2\| f \|_{X^n} \int_{|t| > \eta} \left| I^n_{\overline{y}^k}(t) \right| dt, \tag{26}$$

де $\omega_{X^n}(f, \eta)$ — модуль неперервності функції f у просторі X^n.

Якщо простір X^n задовольняє умови леми 1, то на підставі (19) $\lim\limits_{\eta \to 0} \omega_{X^n}(f, \eta) = 0$. Тому з (26), використовуючи (11), одержуємо

$$\lim_{\overline{y} \to \overline{0}+\overline{0}} \left\| I^n_{\overline{y}^k} * f - f \right\|_{X^n} = 0. \tag{27}$$

З (27) випливає (24). Рівність (25) доводиться аналогічно. Лему 1 доведено.

Зауважимо, що рівність $\lim\limits_{\eta \to 0} \omega_{X^n}(f, \eta) = 0$ справедлива не для всіх функцій з простору $C \setminus C_r$ і $\tilde{L}_\infty$. Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $I^n_{\overline{y}^k}(x)$ *неперіодичне, а* $\tilde{K}^n_{\overline{y}^k}(x)$ — 2π-*періодичне по кожній змінній дельтаподібне ядро,* u, $\tilde{u}$ *і* v, $\tilde{v}$ — *довільні функції, які належать відповідно просторам* $\left\{ X^n * I^n_{\overline{y}^k} \right\}$, $\left\{ \tilde{X}^n * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k} \right\}$, $\left\{ \overline{X^n * I^n_{\overline{y}^k}} \right\}$ *і* $\left\{ \overline{\tilde{X}^n * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k}} \right\}$.

A. *Якщо* X^n — *один із просторів* C^n, L^n_∞, $L^n_{\overline{p}}$, $\hat{L}^n_{\overline{p}}$, *а* $\tilde{X}^n$ — *один із просторів* $\tilde{C}^n$, $\tilde{L}^n_\infty$, $\tilde{L}^n_{\overline{p}}$, $\overline{1} \le \overline{p} < \overline{\infty}$, *то простори згорток* $\left\{ \overline{X^n * I^n_{\overline{y}^k}} \right\}$ *і* $\left\{ \overline{\tilde{X}^n * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k}} \right\}$ *ізоморфні відповідно просторам* X^n *і* $\tilde{X}^n$ *і справедливі нерівності* (22), (23).

B. *Якщо* X^n — *один із просторів* C^n_r *або* $L^n_{\overline{p}}$, *а* $\tilde{X}^n$ — *один із просторів* $\tilde{C}^n$ *або* $\tilde{L}^n_{\overline{p}}$, $\overline{1} \le \overline{p} < \overline{\infty}$, *то простори згорток* $\left\{ X^n * I^n_{\overline{y}^k} \right\}$ *і* $\left\{ \tilde{X}^n * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k} \right\}$ *ізоморфні відповідно просторам* X^n *і* $\tilde{X}^n$ *і*

$$\| f \|_{X^n} \le \left\| I^n_{\overline{y}^k} * f \right\|_{X^n M_k} \le \left\| I^n_{\overline{y}^k} \right\|_{1^n M_k} \| f \|_{X^n}, \tag{28}$$

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{\tilde{X}^n} \le \left\|\tilde{K}^n_{\bar{y}^k} * \tilde{f}\right\|_{\tilde{X}^n M_k} \le \left\|\tilde{K}^n_{\bar{y}^k}\right\|_{\tilde{1}^n M_k} \left\|\tilde{f}\right\|_{\tilde{X}^n}. \tag{29}$$

Нехай, крім цього, дельтаподібні ядра $I^n_{\bar{y}^k}(x)$ і $\tilde{K}^n_{\bar{y}^k}(x)$ невід'ємні. Якщо виконується умова А, *то простори згорток $\left\{\overline{X^n * I^n_{\bar{y}^k}}\right\}$ і $\left\{\overline{\tilde{X}^n * \tilde{K}^n_{\bar{y}^k}}\right\}$ ізометричні відповідно просторам X^n і $\tilde{X}^n$ і*

$$\|v(x, y)\|_{X^n \overline{M}_k} = \|f\|_{X^n}, \quad \|\tilde{v}(x, y)\|_{\tilde{X}^n \overline{M}_k} = \left\|\tilde{f}\right\|_{\tilde{X}^n}. \tag{30}$$

Якщо ж виконуються умови В, *то простори згорток $\left\{X^n * I^n_{\bar{y}^k}\right\}$ і $\left\{\tilde{X}^n * \tilde{K}^n_{\bar{y}^k}\right\}$ ізометричні відповідно просторам X^n і $\tilde{X}^n$ і*

$$\|u(x, y)\|_{X^n M_k} = \|f\|_{X^n}, \quad \|\tilde{u}(x, y)\|_{\tilde{X}^n M_k} = \left\|\tilde{f}\right\|_{\tilde{X}^n}. \tag{31}$$

Доведення. Нерівності (22), (23) для норм були встановлені раніше. Нехай відображення простору X^n у простір згорток $\left\{\overline{X^n * I^n_{\bar{y}^k}}\right\}$ задається співвідношенням (15). З (15) випливає, що це відображення є лінійним. Тому для доведення ізоморфізму просторів $\left\{\overline{X^n * I^n_{\bar{y}^k}}\right\}$ і X^n достатньо показати, що для кожного образу $v(x, y) \in \left\{\overline{X^n * I^n_{\bar{y}^k}}\right\}$ існує єдиний прообраз $f \in X^n$. Припустимо, що існує ще одна функція $f_1 \in X^n$ така, що

$$v(x, y) = \begin{cases} \left(f_1 * I^n_{\bar{y}^k}\right)(x), & \bar{y} > \bar{0}; \\ f_1(x), & \bar{y} = \bar{0}. \end{cases} \tag{32}$$

З означення (8) норми у просторі $X^n \overline{M}_k$ і з (15), (32) випливає, що майже при всіх дійсних x справедлива рівність $f_1(x) = f(x)$. Значить, згідно з означенням рівності елементів у просторі X^n, $f_1(x) = f(x)$ і відображення, яке задається в (15), ізоморфне.

Аналогічно доводиться, що простір $\left\{\overline{\tilde{X}^n * \tilde{K}^n_{\bar{y}^k}}\right\}$ ізоморфний простору $\tilde{X}^n$.

Нехай відображення простору X^n у простір $\left\{X^n * I^n_{\bar{y}^k}\right\}$ задається співвідношенням (13). З (13), внаслідок дистрибутивності операції згортки відносно додавання, випливає, що це відображення є лінійним. Припустимо, що існує ще одна функція $f_1 \in X^n$ така, що справедливе (13) при заміні f на f_1. З (13) маємо

$$\left((f - f_1) * I^n_{\bar{y}^k}\right)(x) = 0. \tag{33}$$

Якщо для простору X^n виконуються умови В, то за лемою 1 виконується (24). З (20), (24) випливає (28). Нерівність (29) доводиться аналогічно. З (28), (33) випливає

$$\|f - f_1\|_{X^n} \le \left\|(f - f_1) * I^n_{\bar{y}^k}\right\|_{X^n M_k} = 0. \tag{34}$$

Якщо $X^n = C^n_r$, то з (34) випливає, що для всіх дійсних x

$$f_1(x) = f(x). \tag{35}$$

Якщо ж $X^n = L^n_{\overline{p}}$, то (35) справедлива майже для всіх дійсних x. З (35), враховуючи означення рівності функцій у просторах C^n_r і $L^n_{\overline{p}}$, випливає, що $f_1 = f$ і простір $\left\{ X^n * I^n_{\overline{y}^k} \right\}$ ізоморфний простору X^n. Аналогічно встановлюємо, що простір $\left\{ \tilde{X}^n * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k} \right\}$ ізоморфний простору $\tilde{X}^n$.

Нехай ядра $I^n_{\overline{y}^k}(x)$ і $\tilde{K}^n_{\overline{y}^k}(x)$ невід'ємні. Тоді з (12) та (22), (23), (28), (29) випливають (30), (31). Значить, норми образів рівні нормам прообразів. Отже, внаслідок ізоморфізму, при виконанні умови А простори $\left\{ \overline{X^n * I^n_{\overline{y}^k}} \right\}$ і $\left\{ \overline{\tilde{X}^n * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k}} \right\}$, або при виконанні умов В простори $\left\{ X^n * I^n_{\overline{y}^k} \right\}$ і $\left\{ \tilde{X}^n * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k} \right\}$ ізометричні відповідно просторам X^n і $\tilde{X}^n$, і теорему 1 доведено.

Відмітимо, що у випадку ізоморфізму нерівності (22), (23), (28), (29) можуть бути використані для оцінки знизу і зверху норм образів через норми прообразів. Оскільки відповідні підпростори ізоморфних або ізометричних просторів відповідно ізоморфні або ізометричні, то з теореми 1 випливає наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $I^n_{\overline{y}^k}(x)$ — *неперіодичне, а* $\tilde{K}^n_{\overline{y}^k}(x)$ — 2π-*періодичне по кожній змінній дельтаподібне ядро,* $X^n \supset U^n$ *і* $\tilde{X}^n \supset \tilde{U}^n$ — *довільні підпростори простору* X^n *і* $\tilde{X}^n$, u, $\tilde{u}$, v *і* $\tilde{v}$ — *довільні функції, які належать відповідно підпросторам* $\left\{ U^n * I^n_{\overline{y}^k} \right\}$, $\left\{ \tilde{U}^n * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k} \right\}$, $\left\{ \overline{U^n * I^n_{\overline{y}^k}} \right\}$ *і* $\left\{ \overline{\tilde{U}^n * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k}} \right\}$.

Якщо для просторів X^n *і* $\tilde{X}^n$ *виконується умова* А, *то підпростори згорток* $\left\{ \overline{U^n * I^n_{\overline{y}^k}} \right\}$ *і* $\left\{ \overline{\tilde{U}^n * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k}} \right\}$ *ізоморфні відповідно підпросторам* U^n *і* $\tilde{U}^n$, *і виконуються нерівності* (22), (23). *Якщо ж для просторів* X^n *і* $\tilde{X}^n$ *виконуються умови* В, *то підпростори згорток* $\left\{ U^n * I^n_{\overline{y}^k} \right\}$ *і* $\left\{ \tilde{U}^n * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k} \right\}$ *ізоморфні відповідно підпросторам* U^n *і* $\tilde{U}^n$, *і справедливі нерівності* (28), (29).

Нехай, крім того, дельтаподібні ядра $I^n_{\overline{y}^k}(x)$ *і* $\tilde{K}^n_{\overline{y}^k}(x)$ *невід'ємні. Тоді при виконанні умови* А *підпростори згорток* $\left\{ \overline{U^n * I^n_{\overline{y}^k}} \right\}$ *і* $\left\{ \overline{\tilde{U}^n * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k}} \right\}$, *або при виконанні умов* В *підпростори згорток* $\left\{ U^n * I^n_{\overline{y}^k} \right\}$ *і* $\left\{ \tilde{U}^n * \tilde{K}^n_{\overline{y}^k} \right\}$ *ізометричні відповідно підпросторам* U^n *і* $\tilde{U}^n$ *і справедливі рівності* (30), (31).

Відмітимо, що лема 1, теорема 1 і наслідок 1 справедливі для просторів функцій і дельтаподібних ядер, визначених на множині

$$E^n \times M_k = \left\{ (x, y) \colon (x \in E^n) \wedge (y \in M_k \subset E^k) \right\}.$$

Для наведення прикладів ізоморфних і ізометричних просторів достатньо, за наслідком 1, навести приклади дельтаподібних ядер. Доведемо твердження, за допомогою яких можна будувати дельтаподібні ядра.

Лема 2. *Нехай функція* $I(x) \in L^n$,

$$\int_{E^n} I(x)\,dx = 1, \tag{36}$$

функції $\varphi_i(\overline{y}) = \varphi(y)$, $i = \overline{1, n}$, *додатні на множині* $\Pi^+_{0,k} = \left\{ \overline{y} \in E^k : (\overline{y} > \overline{0}) \right\}$ *і*

$$\lim_{\overline{y} \to \overline{0} + \overline{0}} \varphi_i(\overline{y}) = 0. \tag{37}$$

Тоді функція

$$\Phi^n_{\bar{y}^k}(x) = \left(\prod_{i=1}^n \varphi_i(y)\right)^{-1} I\left(\frac{x_1}{\varphi_1(y)}, \ldots, \frac{x_n}{\varphi_n(y)}\right) \tag{38}$$

є дельтаподібним ядром.

Доведення. Позначимо через

$$Q^n_{\eta/\bar{\varphi}} = \left[-\frac{\eta}{\varphi_1(y)}, \frac{\eta}{\varphi_1(y)}\right] \times \ldots \times \left[-\frac{\eta}{\varphi_n(y)}, \frac{\eta}{\varphi_n(y)}\right] \subset E^n \tag{39}$$

n-вимірний паралелепіпед у просторі E^n. З (38), використовуючи заміну змінних, (36), (39) і враховуючи, що функції $\varphi_i(y)$ додатні на $\Pi^+_{0,k}$, маємо

$$\int_{E^n} \Phi^n_{\bar{y}^k}(x)dx = \int_{E^n} I(u)du = 1, \tag{40}$$

$$\int_{E^n} \left|\Phi^n_{\bar{y}^k}(x)\right|dx = \int_{E^n} |I(u)|du = \|I\|_{1^n}, \tag{41}$$

$$\int_{E^n/Q^n_\eta} \left|\Phi^n_{\bar{y}^k}(x)\right|dx = \int_{E^n/Q^n_{\eta/\bar{\varphi}}} |I(u)|du. \tag{42}$$

Оскільки функція $I(x) \in L^n$, то $\|I\|_{1^n} < \infty$. Тому з (42), використовуючи (37), (39) і додатність функцій $\varphi_i(y)$ на $\Pi^+_{0,k}$, одержуємо

$$\lim_{\bar{y} \to \bar{0}+\bar{0}} \int_{E^n/Q^n_\eta} \left|\Phi^n_{\bar{y}^k}(x)\right|dx = 1. \tag{43}$$

З (40), (41), (43) випливає, що функція $\Phi^n_{\bar{y}^k}(x)$ є дельтаподібним ядром, і лему 2 доведено.

Відмітимо, що дельтаподібні ядра

$$\Phi^n_{\bar{y}^k}(x) = \frac{1}{y^n} I\left(\frac{x_1}{y}, \ldots, \frac{x_n}{y}\right)$$

використовувались в [6, с. 17].

Відомо [6, с. 12 – 14, 16; 7, с. 149, 150], що для функцій

$$P(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)\pi^{-(n+1)/2}}{\left(1+|x|^2\right)^{(n+1)/2}} = F^{-1}(e^{-|u|})(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E^n} e^{-|u|} e^{-iux} du =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty e^{-(u_1^2+\ldots+u_n^2)^{1/2}} \prod_{i=1}^n \cos u_i x_i du_1 \ldots du_n, \tag{44}$$

$$W(x) = (4\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/4} = F^{-1}(e^{-|u|^2})(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E^n} e^{-|u|^2} e^{-iux} du, \tag{45}$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 = F^{-1}(\varphi_1(|u|))(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^1 (1-|u|)e^{-iux} du, \tag{46}$$

де

$$F^{-1}(\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{E^n} \varphi(u) e^{-iux} du \tag{47}$$

— обернене перетворення Фур'є функції $\varphi(u)$, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функція Ейлера, справедлива рівність (36).

З (44) – (46) після заміни змінних внаслідок леми 2 випливає, що функції

$$P^n_{\varphi(\overline{y})}(x) = \varphi^{-n}(\overline{y})P\left(\frac{x}{\varphi(\overline{y})}\right) = \frac{\varphi(\overline{y})\Gamma((n+1)/2)\pi^{-(n+1)/2}}{(\varphi^2(\overline{y})+|x|^2)^{(n+1)/2}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E^n} e^{-\varphi(\overline{y})|u|}e^{-iux}du = \frac{1}{\pi^n}\int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_0^\infty e^{-\varphi(\overline{y})\left(\sum\limits_{i=1}^n u_i^2\right)^{1/2}} \prod_{i=1}^n \cos u_i x_i du_1 \ldots du_n, \tag{48}$$

$$W^n_{\varphi(\overline{y})}(x) = (\varphi(\overline{y}))^{-n/2}W\left((\varphi(\overline{y}))^{-n/2}x\right) = (4\pi\varphi(\overline{y}))^{-n/2}e^{-|x|^2/4\varphi(\overline{y})} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E^n} e^{-\varphi(\overline{y})|u|^2}e^{-iux}du = \frac{1}{\pi^n}\int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_0^\infty e^{-\varphi(\overline{y})\sum\limits_{i=1}^n u_i^2} \prod_{i=1}^n \cos u_i x_i du_1 \ldots du_n. \tag{49}$$

$$F_{\varphi(\overline{y})}(x) = \varphi^{-1}(\overline{y})F(\varphi^{-1}(\overline{y})x) = \left(2\pi\varphi(\overline{y})\right)^{-1}\left(\frac{\sin(x/2\varphi(\overline{y}))}{x/2\varphi(\overline{y})}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\varphi^{-1}(\overline{y})}^{\varphi^{-1}(\overline{y})} (1-\varphi(\overline{y})|t|)e^{-itx}dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\varphi^{-1}(\overline{y})} (1-\varphi(\overline{y})t)\cos tx\,dt \tag{50}$$

є відповідно дельтаподібними узагальненими ядрами Абеля – Пуассона, Гаусса – Вейєрштрасса і Фейєра.

Лема 3. *Згортка двох дельтаподібних ядер є дельтаподібним ядром.*

Доведення. Нехай $\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k}(x)$ і $\left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}(x)$ — довільні дельтаподібні ядра, визначені на $\Pi^+_{n,k}$ (6). Використовуючи означення (7) норми у просторі $L^n_1 M_k = L^n M_k$, узагальнену нерівність Мінковського (17) і інваріантність норми відносно зсуву, одержуємо

$$\left\|\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k} * \left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}\right\|_{1^n M_k} = \sup_{\overline{y}>\overline{0}}\left\|\int\limits_{E^n}\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k}(t)\left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}(x-t)\,dt\right\|_{1^n} \le$$

$$\le \sup_{\overline{y}>\overline{0}}\int\limits_{E^n}\left|\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k}(t)\right|\left\|\left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}(x-t)\right\|_{1^n}dt \le \left\|\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k}\right\|_{1^n M_k}\left\|\left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}\right\|_{1^n M_k}. \tag{51}$$

Оскільки $\left(I^i\right)^n_{\overline{y}^k}(x)$ — дельтаподібні ядра, то

$$\left\|\left(I^i\right)^n_{\overline{y}^k}\right\|_{1^n M_k} < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Тому з (51) випливає, що функція $\left(\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k} * \left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}\right)(x)$ належить простору $L^n M_k$ і функція $\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k}(x)\left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}(x-t)$ абсолютно інтегровна на E^{2n}. Використовуючи теорему Фубіні про заміну порядку інтегрування, заміну змінних і (9), маємо

$$\int\limits_{E^n}\left(\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k} * \left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}\right)(x)\,dx = \int\limits_{E^n}\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k}(t)\,dt\int\limits_{E^n}\left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}(u)\,du = 1, \tag{52}$$

а при довільному $\eta > 0$ одержуємо

$$\int\limits_{|x|>\eta}\left|\left(\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k} * \left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}\right)(x)\right|dx \le \int\limits_{E^n}\left|\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k}(t)\right|\left(\int\limits_{|x|>\eta}\left|\left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}(x-t)\right|dx\right)dt \le$$

$$\le \int\limits_{E^n}\left|\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k}(t)\right|\left(\int\limits_{|u|>\eta-|t|}\left|\left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}(u)\right|du\right)dt \le$$

$$\le \int\limits_{|t|<\eta/2}\left|\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k}(t)\right|dt \int\limits_{|u|>\eta/2}\left|\left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}(u)\right|du +$$

$$+ \int\limits_{|t|\ge\eta/2}\left|\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k}(t)\right|dt \int\limits_{E^n}\left|\left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}(u)\right|du \le$$

$$\le \left\|\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k}\right\|_{1^n M_k} \int\limits_{|u|>\eta/2}\left|\left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}(u)\right|du +$$

$$+ \left\|\left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}\right\|_{1^n M_k} \int\limits_{|t|>\eta/2}\left|\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k}(t)\right|dt. \tag{53}$$

З (11), (53) випливає, що для довільного $\eta > 0$

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int\limits_{|x|>\eta}\left|\left(\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k} * \left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}\right)(x)\right|dx = 0, \tag{54}$$

а з (51), (52), (54) — що функція $\left(\left(I^1\right)^n_{\overline{y}^k} * \left(I^2\right)^n_{\overline{y}^k}\right)(x)$ — дельтаподібне ядро. Лему 3 доведено.

Наслідок 2. *Згортка двох невід'ємних дельтаподібних ядер є невід'ємним дельтаподібним ядром.*

Лема 3 і наслідок 2 дають можливість будувати дельтаподібні ядра, які не можна побудувати, використовуючи тільки лему 2.

За теоремою Планшереля (див., наприклад, [8, с. 180]), для кожної функції $\varphi \in L_2^n$ справедливі формули обертання, тобто майже для всіх $x \in E^n$ справедлива рівність

$$F\left(F^{-1}(\varphi)\right)(x) = F^{-1}(F(\varphi))(x) = \varphi(x), \tag{55}$$

де

$$F(\varphi)(x) = \int\limits_{E^n}\varphi(u)e^{iux}du \tag{56}$$

— перетворення Фур'є функції $\varphi(x)$. Якщо функції f і g належать простору L_2, то (див., наприклад, [7, с. 126]) для всіх дійсних x справедлива рівність

$$(f*g)(x) = F^{-1}(F(f)F(g))(x). \tag{57}$$

Можна довести, що аналогічна рівність справедлива для функцій $f \in L_2^n$, $g \in L_2^n$ і для всіх $x \in E^n$. Оскільки при $\overline{y} > \overline{0}$ функція $\varphi(\overline{y}) = \sum_{i=1}^k y_i$ задовольняє умови леми 2, з (48), (49) випливає, що

$$P^n_{\overline{y}^k}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E^n} e^{-\sum\limits_{i=1}^k y_i|u|} e^{-iux}du, \qquad W^n_{\overline{y}^k}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E^n} e^{-\sum\limits_{i=1}^k y_i|u|^2} e^{-iux}du \tag{58}$$

— відповідно дельтаподібні ядра Абеля – Пуассона і Гаусса – Вейєрштрасса. Далі, оскільки функції $e^{-\sum_{i=1}^{k} y_i|u|}$ і $e^{-\sum_{i=1}^{k} y_i|u|^2}$ належать простору L_2^n, з (58), використовуючи (47), (57), для всіх $x \in E^n$ одержуємо

$$\left(P_{\overline{y}^k}^n * W_{\overline{y}^k}^n\right)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{E^n} e^{-\sum\limits_{i=1}^{k} y_i\left(|u| + |u|^2\right)} e^{-iux} du \tag{59}$$

на підставі наслідку 2 функція $\left(P_{\overline{y}^k}^n * W_{\overline{y}^k}^n\right)(x)$ є невід'ємним дельтаподібним ядром.

Доведемо леми 4, 5, за допомогою яких можна будувати дельтаподібні ядра, використовуючи дельтаподібні ядра з меншим числом змінних.

Лема 4. *Нехай* $\overline{y}^m = (y_1, \ldots, y_m)$, $\overline{y}^{k-m} = (y_{m+1}, \ldots, y_k)$ *— вектори з невід'ємними координатами і* $\overline{y}^m > \overline{0}$, *або* $\overline{y}^{k-m} > \overline{0}$, $K_{\overline{y}^m}^n(x) = K\left(x, \overline{y}^m\right)$, $I_{\overline{y}^{k-m}}^n(x) = I\left(x, \overline{y}^{k-m}\right)$ *— дельтаподібні ядра, задані відповідно на* $\Pi_{n,m}^+$ *і* $\Pi_{n,k-m}^+$, *де* $1 \leq m \leq k-1$. *Тоді згортка цих дельтаподібних ядер є дельтаподібним ядром, заданим на* $\Pi_{n,k}^+$, *тобто функція* $I_{\overline{y}^k}^n(x) = \left(K_{\overline{y}^m}^n * I_{\overline{y}^{k-m}}^n\right)(x)$ *— дельтаподібне ядро. При цьому якщо* $\overline{y}^m = \overline{0}$ *або* $\overline{y}^{k-m} = \overline{0}$, *то відповідно* $I_{\overline{y}^k}^n(x) = I_{\overline{y}^{k-m}}^n(x)$ *і* $I_{\overline{y}^k}^n(x) = K_{\overline{y}^m}^n(x)$.

Доведення. Оскільки $K_{\overline{y}^m}^n(x)$ і $I_{\overline{y}^{k-m}}^n(x)$ — дельтаподібні ядра, то з (9), (11) випливає

$$\int\limits_{E^n} K_{\overline{y}^m}^n(x)dx = \int\limits_{E^n} I_{\overline{y}^{k-m}}^n(x)dx = 1,$$

$$\lim_{\overline{y}^m \to \overline{0}^m + \overline{0}^m} \int\limits_{|x|>\eta} \left|K_{\overline{y}^m}^n(x)\right|dx = \lim_{\overline{y}^{k-m} \to \overline{0}^{k-m} + \overline{0}^{k-m}} \int\limits_{|x|>\eta} \left|I_{\overline{y}^{k-m}}^n(x)\right|dx = 0.$$

В подальшому доведення проводиться аналогічно доведенню леми 3. Потрібно тільки замінити ядра $\left(I^1\right)_{\overline{y}^k}^n(x)$ і $\left(I^2\right)_{\overline{y}^k}^n(x)$ відповідно ядрами $K_{\overline{y}^m}^n(x)$ і $I_{\overline{y}^{k-m}}^n(x)$, норми

$$\left\|\left(I^1\right)_{\overline{y}^k}^n\right\|_{1^n M_k}, \quad \left\|\left(I^2\right)_{\overline{y}^k}^n\right\|_{1^n M_k}, \quad \left\|\left(I^1\right)_{\overline{y}^k}^n * \left(I^2\right)_{\overline{y}^k}^n\right\|_{1^n M_k}$$

відповідно нормами

$$\left\|K_{\overline{y}^m}^n\right\|_{1^n M_m}, \quad \left\|I_{\overline{y}^{k-m}}^n\right\|_{1^n M_{k-m}}, \quad \left\|K_{\overline{y}^m}^n * I_{\overline{y}^{k-m}}^n\right\|_{1^n M_k}.$$

Відмітимо, що згортка двох невід'ємних дельтаподібних ядер $K_{\overline{y}^m}^n(x)$ і $I_{\overline{y}^{k-m}}^n(x)$ є невід'ємним дельтаподібним ядром.

Наслідок 3. *Якщо функції* $I_{y_i}^n(x)$, *де* $i = 1, 2, \ldots, k$ *— дельтаподібні ядра, визначені на* $\Pi_{n,1}^+$, *то їх згортка — дельтаподібне ядро, визначене на* $\Pi_{n,k}^+$, *тобто функція*

$$I_{\overline{y}^k}^n(x) = \left(I_{y_1} * \left(I_{y_2} * \ldots * (I_{y_{k-1}} * I_{y_k})\right)\right)(x) = \left(I_{y_1} * I_{y_2} * \ldots * I_{y_{k-1}} * I_{y_k} *\right)(x)$$

— *дельтаподібне ядро. При цьому якщо* $y_i = 0$, *то* $I^n_{\bar{y}^k}(x) = \left(I_{y_1} * \ldots * I_{y_{i-1}} * I_{y_{i+1}} * \ldots * I_{y_k}\right)(x)$.

Якщо

$$P^n_{y_i}(x) = \frac{y_i \Gamma((n+1)/2)\pi^{-(n+1)/2}}{\left(y_i^2 + |\bar{x}|^2\right)^{(n+1)/2}},$$

$$W^n_{y_j}(x) = (4\pi y_j)^{-n/2} e^{-|x|^2/4y_j}$$

— дельтаподібні ядра Абеля – Пуассона, Гаусса – Вейєрштрасса (58), визначені на $\Pi^+_{n,1}$, то за наслідком 3, функції

$$\left(P^n_{y_1} * \ldots * P^n_{y_k}\right)(x), \quad \left(W^n_{y_1} * \ldots * W^n_{y_k}\right)(x), \quad \left(P^n_{y_1} * \ldots * P^n_{y_m} * W^n_{y_{m+1}} * \ldots * W^n_{y_k}\right)(x)$$

— невід'ємні дельтаподібні ядра, визначені на $\Pi^+_{n,k}$. Оскільки при $y_k > 0$ функції $e^{-y_j|u|}$, $e^{-y_j|u|^2}$ належать простору L^n_2, то, використовуючи (57), (58), маємо

$$P^n_{\bar{y}^k}(x) = \left(P^n_{y_1} * \ldots * P^n_{y_k}\right)(x), \qquad W^n_{\bar{y}^k}(x) = \left(W^n_{y_1} * \ldots * W^n_{y_k}\right)(x),$$

$$\left(P^n_{y_1} * \ldots * P^n_{y_m} * W^n_{y_{m+1}} * \ldots * W^n_{y_k}\right)(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E^n} \exp\left(-\left(\sum_{j=1}^{m} y_j |u| + \sum_{j=m+1}^{k} y_j |u|^2\right)\right) e^{-iux} du.$$

Лема 5. *Якщо функції* $\left(I^i\right)_{\bar{y}^k}(x_i)$ — *дельтаподібні ядра, задані на* $\Pi^+_{1,k}$, *то функція*

$$I^n_{\bar{y}^k}(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(I^i\right)_{\bar{y}^k}(x_i)$$

— *дельтаподібне ядро, задане на* $\Pi^+_{n,k}$.

Наслідок 4. *Якщо дельтаподібні ядра* $\left(I^i\right)_{\bar{y}^k}(x_i)$ *невід'ємні, то дельтаподібне ядро*

$$I^n_{\bar{y}^k}(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(I^i\right)_{\bar{y}^k}(x_i)$$

— *невід'ємне.*

Лема 6. *Нехай функції* $\varphi_i(\bar{y}) = \varphi_i(y)$, $i = \overline{1, n}$, *задовольняють умови леми* 2, *функція* $I(|x|)$ *абсолютно інтегровна на всій дійсній осі і*

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(|x|)dx = 2\int_{0}^{\infty} I(|x|)dx = 1. \tag{60}$$

Тоді функція

$$I^n_{\overline{\varphi}(y)}(x) = \frac{\Gamma(n/2) I\left(\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i/\varphi_i(y))^2\right)^{1/2}\right)}{\pi^{n/2} \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(y) \left(\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i/\varphi_i(y))^2\right)^{(n-1)/2}\right)} \tag{61}$$

є дельтаподібним ядром, визначеним на $\Pi^+_{n,k}$, *де* $\Gamma(\alpha)$ *— гамма-функція Ейлера.*

Доведення. Позначимо

$$\mu(y) = \max_{i=\overline{1,n}}\{\varphi_i(y)\} \quad \text{і} \quad Q^n_{\eta/\mu(y)} = \left(-\frac{\eta}{\mu(y)}, \frac{\eta}{\mu(y)}\right)^n \subset E^n$$

— n-вимірний куб у просторі E^n. Тоді з співвідношень (39) випливає, що

$$E^n / Q^n_{\eta/\overline{\varphi}} \subseteq E^n / Q^n_{\eta/\mu(y)}. \tag{62}$$

З (61), використовуючи заміну змінних, (62) і враховуючи, що функції $\varphi_i(y)$ додатні, одержуємо

$$\int_{E^n} I^n_{\overline{\varphi}(y)}(x)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int_{E^n} \frac{I\left(\left(\sum_{i=1}^n (x_i/\varphi_i(y))^2\right)^{1/2}\right)}{\left(\left(\sum_{i=1}^n (x_i/\varphi_i(y))^2\right)^{(n-1)/2}\right)} d\left(\frac{x_1}{\varphi_1(y)}\right) \ldots d\left(\frac{x_n}{\varphi_n(y)}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int_{E^n} \frac{I(|u|)}{|u|^{n-1}}\,du, \qquad \int_0^\infty \left| I^n_{\overline{\varphi}(y)}(x)\,dx \right| dx = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int_{E^n} \frac{|I(|u|)|}{|u|^{n-1}}\,du, \tag{63}$$

$$\int_{E^n/Q^n_{\eta/\overline{\varphi}}} \left| I^n_{\overline{\varphi}(y)}(x) \right| dx = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int_{E^n/Q^n_{\eta/\overline{\varphi}}} \frac{|I(|u|)|}{|u|^{n-1}}\,du \le$$

$$\le \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int_{E^n/Q^n_{\eta/\mu(y)}} \frac{|I(|u|)|}{|u|^{n-1}}\,du, \tag{64}$$

де η — довільне додатне число. Переходячи в (63), (64) до узагальненої полярної системи координат (див., наприклад, [9, с. 401 – 403]) і використовуючи (60), маємо

$$\int_{E^n} I^n_{\overline{\varphi}(y)}(x)\,dx = 2\int_0^\infty I(r)\,dr = 1, \qquad \int_{E^n} \left| I^n_{\overline{\varphi}(y)}(x) \right| dx = 2\int_0^\infty |I(r)|\,dr < \infty, \tag{65}$$

$$\int_{E^n/Q^n_\eta} \left| I^n_{\overline{\varphi}(y)}(x) \right| dx \le 2 \int_{\eta/\mu(y)}^\infty |I(r)|\,dr. \tag{66}$$

З (37) випливає, що для кожного $\eta > 0$, $\lim\limits_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \mu(\overline{y}) = \lim\limits_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \mu(y) = 0$. Тому з (65), (66) отримуємо

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int_{E^n/Q^n_\eta} \left| I^n_{\overline{\varphi}(y)}(x) \right| dx = 0. \tag{67}$$

З (65) – (67) і означення дельтаподібного ядра випливає, що функція $I^n_{\overline{\varphi}(y)}(x)$ — дельтаподібне ядро. Лему 6 доведено.

Наслідок 5. *Якщо функції* $I(|x|)$ *і* $\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = \ldots = \varphi_n(y) = \varphi(y)$ *задовольняють умови леми* 6, *то функція*

$$I^n_{\varphi(y)}(x) = \frac{\Gamma(n/2) I\left(|x|/\varphi(y)\right)}{\pi^{n/2}\varphi(y)|x|^{n-1}} \tag{68}$$

є дельтаподібним ядром, визначеним на множині $\Pi^+_{n,k}$.

Оскільки, згідно з (44), функція

$$P(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

задовольняє умови наслідку 5, то з (44), (68) випливає, що функція

$$(P_1)^n_{\bar{y}^k}(|\bar{x}|) = \frac{\Gamma(n/2)\sum_{i=1}^k y_i \pi^{-n/2-1}}{|\bar{x}|^{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^k y_i\right)^2 + |\bar{x}|^2\right)} = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2+1}|\bar{x}|^{n-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\sum\limits_{j=1}^{k} y_j |t|} e^{-it|\bar{x}|} dt$$

— невід'ємне дельтаподібне ядро, визначене на $\Pi^+_{n,k}$.

Найскладнішим при встановленні дельтаподібності ядра є перевірка рівностей (10). Виявляється, що (10) буде істинною, якщо невід'ємна функція задовольняє (9) і є оберненим перетворенням Фур'є деякої функції.

Доведемо, що формули (55) справедливі і у випадку, коли обернене перетворення Фур'є $F^{-1}(\varphi)(x)$ належить простору L^n_p і $1 \le p \le 2$. Якщо $p = 1$, то (див., наприклад, [6, с. 8]) перетворення Фур'є $F\left(F^{-1}(\varphi)\right)(x)$ функції $F^{-1}(\varphi)$ є рівномірно неперервною і обмеженою функцією на E^n і $\lim\limits_{|x|\to\infty} F\left(F^{-1}(\varphi)\right)(x) = 0$. Якщо ж $1 \le p \le 2$, то, за теоремою Хаусдорфа – Юнга (див., наприклад, [6, с. 201]) функція $F\left(F^{-1}(\varphi)\right)$ належить простору L^n_q, де $1/p + 1/q = 1$. Отже, якщо $1 \le p \le 2$, то функції φ і $F\left(F^{-1}(\varphi)\right)$ локально абсолютно інтегровні на E^n. Відомо (див., наприклад, [10, с. 16]), що формули (55) справедливі для кожної узагальненої функції φ в розумінні рівності узагальнених функцій. Отже, враховуючи локально абсолютну інтегровність функцій φ і $F\left(F^{-1}(\varphi)\right)$, внаслідок леми Дюбуа – Реймона [10, с. 95, 96], майже при кожному $x \in E^n$ рівності (55) справедливі для функцій, перетворення Фур'є яких належить простору L^n_p, де $1 \le p \le 2$.

Нехай далі на $\Pi^+_{n,k}$ задані функції

$$\psi(|u_1|, \ldots, |u_n|, y_1, \ldots, y_k) = \psi_{\bar{y}^k}(|u_1|, \ldots, |u_n|) = \psi^n_{\bar{y}^k}(|u|),$$

$$\Psi^n_{\bar{y}^k}(x) = F^{-1}\left(\psi^n_{\bar{y}^k}(|u|)\right)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{E^n} \psi^n_{\bar{y}^k}(|u|) e^{-iux} du =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \int\limits_0^{\infty} \ldots \int\limits_0^{\infty} \psi^n_{\bar{y}^k}(u) \prod_{i=1}^n \cos u_i x_i du_1 \ldots du_n. \tag{69}$$

Якщо вважати, що при кожному $\bar{y} > \bar{0}$ функція $\Psi^n_{\bar{y}^k}(x)$ належить простору L^n, то з (55) випливає, що майже при кожному $x \in E^n$

$$F\left(F^{-1}\left(\psi^n_{\bar{y}^k}(|u|)\right)\right)(x) = F^{-1}\left(F\left(\psi^n_{\bar{y}^k}(|u|)\right)\right)(x) = \psi^n_{\bar{y}^k}(|x|), \tag{70}$$

функція $F\left(F^{-1}\left(\psi^n_{\bar{y}^k}(|u|)\right)\right)(x)$ рівномірно неперервна і обмежена на E^n і

$$\lim_{|x|\to\infty} F\Big(F^{-1}\Big(\psi^n_{\bar{y}^k}(|u|)\Big)\Big)(x) = 0.$$

Тому з (70) випливає, що функція $\psi^n_{\bar{y}^k}(|x|)$ рівномірно неперервна і обмежена майже при всіх $x \in E^n$. Оскільки функція $\Psi^n_{\bar{y}^k}(x) = F^{-1}\Big(\psi^n_{\bar{y}^k}(|u|)\Big)(x)$ не змінюється при зміні значень функції $\psi^n_{\bar{y}^k}(|u|)$ на множині лебегової міри нуль простору E^n, можна вважати, що при кожному $\bar{y} > \bar{0}$ функція $\psi^n_{\bar{y}^k}(|x|)$ рівномірно неперервна і обмежена на E^n,

$$\lim_{|x|\to\infty} \psi_{\bar{y}^k}(|x_1|, \ldots, |x_n|) = 0 \tag{71}$$

і рівність (70) справедлива при всіх $x \in E^n$. З (9), (70), (71) випливає, що для того, щоб функція $\Psi^n_{\bar{y}^k}(x)$ була дельтаподібним ядром, необхідно, щоб при кожному $\bar{y} > \bar{0}$ функція $\psi^n_{\bar{y}^k}(|u|)$ була рівномірно неперервною і обмеженою на E^n, виконувалась (71) і

$$F\Big(F^{-1}\Big(\psi^n_{\bar{y}^k}(|u|)\Big)\Big)(\bar{0}) = \int_{E^n} \Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\,dx = \psi^n_{\bar{y}^k}(0) = 1. \tag{72}$$

Розглянемо допоміжні твердження про згортку перетворень Фур'є.

Відомо (див., наприклад, [6, с. 9]), що перетворення Фур'є згортки абсолютно інтегровних функцій дорівнює добутку перетворень Фур'є цих функцій. Це твердження має таке узагальнення.

Лема 7. *Нехай функція* $g \in L^n$, *а* $\varphi \in L^n_p$ *і* $1 \le p \le 2$. *Тоді майже для всіх* $x \in E^n$

$$F(g * \varphi)(x) = \int_{E^n} (g * \varphi)(t) e^{itx} dt = F(g)(x) F(\varphi)(x). \tag{73}$$

Якщо функція $F(g)(x)F(\varphi)(x)$ *належить простору* L^n_q *і* $1 \le q \le 2$, *то майже для всіх* $x \in E^n$

$$(g * \varphi)(x) = F^{-1}(F(g * \varphi))(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E^n} F(g)(t) F(\varphi)(t) e^{-itx} dt. \tag{74}$$

Якщо ж функція $F(g)(x)F(\varphi)(x)$ *належить простору* L^n, *то функція* $(g * \varphi)(x)$ *обмежена і рівномірно неперервна на* E^n, *рівність* (74) *справедлива при всіх* $x \in E^n$ *і* $\lim_{|x|\to\infty} (g * \varphi)(x) = 0$.

Доведення. Рівність (73) випливає з теореми 2.6 (див., наприклад, [6, с. 27]).

Якщо функція $F(g)(x)F(\varphi)(x)$ належить простору L^n_q і $1 \le q \le 2$, то з (73), в силу (55), майже для всіх $x \in E^n$ справедлива рівність (74). Якщо ж функція $F(g)(x)F(\varphi)(x)$ належить простору L^n, то функція $F^{-1}(F(g)F(\varphi))(x)$ обмежена і рівномірно неперервна на E^n і

$$\lim_{|x|\to\infty} F^{-1}(F(g)F(\varphi))(x) = 0.$$

Оскільки $g \in L^n$, а $\varphi \in L^n_p$, то (див., наприклад, [6, с. 9]) функція $(g * \varphi)(x) \in$ $\in L^n_p$. Тому згідно з означенням рівності функцій у просторі L^n_p, $1 \le p \le \infty$, на підставі справедливості майже скрізь (74), можна вважати, що функція $(g *$

$*\varphi)(x)$ обмежена і рівномірно неперервна на E^n, а (74) справедлива при всіх $x \in E^n$ і $\lim\limits_{|x|\to\infty}(g*\varphi)(x) = 0$. Лему 7 доведено.

Лема 8. *Нехай функція* $\Psi^n_{\bar{y}^k}(x) = F^{-1}\left(\psi^n_{\bar{y}^k}(|u|)\right)(x)$ *належить простору* $L^n_1 M_k = L^n M_k$ (7), *функція* $\psi^n_{\bar{y}^k}(|u|)$ *обмежена на* $\Pi^+_{n,k}$ *і для кожного* $u \in E^n$

$$\lim_{\bar{y}\to\bar{0}+\bar{0}} \psi^n_{\bar{y}^k}(|u|) = 1. \tag{75}$$

Тоді для кожної функції $\varphi \in L^n$, *перетворення Фур'є якої* $F(\varphi) \in L^n$,

$$\int\limits_{E^n} \Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{E^n} \psi^n_{\bar{y}^k}(|u|)F^{-1}(\varphi)(u)\,du, \tag{76}$$

$$\lim_{\bar{y}\to\bar{0}+\bar{0}} \int\limits_{E^n} \Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0). \tag{77}$$

Доведення. Оскільки при кожному $\bar{y} > \bar{0}$ функція $\Psi^n_{\bar{y}^k}(x)$ належить простору L^n, а функція $\psi^n_{\bar{y}^k}(|t|)$ обмежена на E^n, то з (70) випливає, що $F\left(\Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\right)(t) = \psi^n_{\bar{y}^k}(|t|)$ обмежена на E^n. Тому на підставі того, що функція $F(\varphi) \in L^n$, функція $F(\varphi)(t)F\left(\Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\right)(t) = F(\varphi)(t)\psi^n_{\bar{y}^k}(|t|)$ при кожному $\bar{y} > \bar{0}$ належить простору L^n. Отже, за лемою 7, при кожному $\bar{y} > \bar{0}$ функція $\left(\Psi^n_{\bar{y}^k} * \varphi\right)(x)$ обмежена і рівномірно неперервна на E^n і при всіх $x \in E^n$

$$\left(\Psi^n_{\bar{y}^k} * \varphi\right)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{E^n} F(\varphi)(t)\psi^n_{\bar{y}^k}(|t|)e^{-itx}\,dt. \tag{78}$$

З (78), використовуючи заміну змінних і (47), маємо

$$\left(\Psi^n_{\bar{y}^k} * \varphi\right)(x) = \int\limits_{E^n} F^{-1}(\varphi)(t)\psi^n_{\bar{y}^k}(|t|)e^{-itx}\,dt. \tag{79}$$

З (79), враховуючи парність функції $\Psi^n_{\bar{y}^k}(x)$ по змінних $t_1, \ldots, t_n$, одержуємо

$$\left(\Psi^n_{\bar{y}^k} * \varphi\right)(0) = \int\limits_{E^n} \Psi^n_{\bar{y}^k}(-x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{E^n} \Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{E^n} F^{-1}(\varphi)(t)\psi^n_{\bar{y}^k}(|t|)\,dt,$$

і рівність (76) доведено. Оскільки функція $\psi^n_{\bar{y}^k}(|u|)$ обмежена на $\Pi^+_{n,k}$, а функція $F^{-1}(\varphi) \in L^n$, з (76), використовуючи теорему Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла (див., наприклад, [5, с. 13]) і (75), маємо

$$\lim_{\bar{y}\to\bar{0}+\bar{0}} \int\limits_{E^n} \Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{E^n} F^{-1}(\varphi)(t)\,dt = F\left(F^{-1}(\varphi)\right)(0) = \varphi(0).$$

Лему 8 доведено.

Відмітимо, що (76) випливає з (55) і формули множення (див., наприклад, [6, с. 15]).

Наслідок 6. *Якщо виконуються умови леми 8, функція* $\Psi^n_{\bar{y}^k}(x)$ *невід'ємна на* $\Pi^+_{n,k}$ *і*

$$\psi^n_{\bar{y}^k}(0) = 1, \tag{80}$$

то функція $\Psi^n_{\bar{y}^k}(x)$ *— невід'ємне дельтаподібне ядро.*

Доведення. З (72), (80) і означення дельтаподібного ядра випливає, що достатньо встановити, що для кожного $\eta > 0$ справедливі рівності (11), тобто

$$\lim_{\bar{y}\to\bar{0}+\bar{0}} \int\limits_{|x|>\eta} \Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\,dx = 0. \tag{81}$$

Позначимо через $B^n_R = \left\{x \in E^n : |\bar{x}| < R\right\}$ і $\overline{B}^n_R$ кулю і замкнену кулю з центром в початку координат радіуса R. На підставі (9) рівність (81) рівносильна рівності

$$\lim_{\bar{y}\to\bar{0}+\bar{0}} \int\limits_{\overline{B}^n_R} \Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\,dx = 1. \tag{82}$$

Нехай $0 < a < \eta < b$. За лемою 1 [10, с. 87] існують нескінченно диференційовні фінітні функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$, рівні відповідно нулю на множинах $E^n \setminus B^n_b$ і $E^n \setminus B^n_\eta$ і одиниці на множинах $\overline{B}^n_\eta$ і $\overline{B}^n_a$, такі, що $0 \le \varphi_1(x) \le 1$ і $0 \le \varphi_2(x) \le 1$. Оскільки функція $\Psi^n_{\bar{y}^k}(x)$ невід'ємна, то, використовуючи означення функцій $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$, одержуємо

$$\int\limits_{E^n} \Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\varphi_2(x)\,dx = \int\limits_{\overline{B}^n_\eta} \Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\varphi_2(x)\,dx \le \int\limits_{\overline{B}^n_\eta} \Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\,dx \le$$

$$\le \int\limits_{\overline{B}^n_b} \Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\varphi_1(x)\,dx = \int\limits_{E^n} \Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\varphi_1(x)\,dx. \tag{83}$$

Відомо (див., наприклад, [10, с. 88, 149, 159]), що перетворення Фур'є нескінченно диференційовної фінітної функції є абсолютно інтегровною функцією на E^n. Отже, функції φ_1, $F(\varphi_1)$, φ_2 і $F(\varphi_2)$ абсолютно інтегровні на E^n, а функції $\Psi^n_{\bar{y}^k}(x)$ і $\varphi_1(x)$, $\Psi^n_{\bar{y}^k}(x)$ і $\varphi_2(x)$ задовольняють умови леми 8. З (83), використовуючи (77) і означення функцій φ_1 і φ_2, маємо

$$1 = \varphi_2(0) = \lim_{\bar{y}\to\bar{0}+\bar{0}} \int\limits_{E^n} \Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\varphi_2(x)\,dx \le \lim_{\bar{y}\to\bar{0}+\bar{0}} \int\limits_{\overline{B}^n_\eta} \Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\,dx \le$$

$$\le \lim_{\bar{y}\to\bar{0}+\bar{0}} \int\limits_{E^n} \Psi^n_{\bar{y}^k}(x)\varphi_1(x)\,dx = \varphi_1(0) = 1. \tag{84}$$

З (84) випливає (82), а отже, і (81), і наслідок 6 доведено.

Приклади періодичних дельтаподібних ядер можна наводити, знаючи приклади неперіодичних дельтаподібних ядер. Нехай

$$\tilde{g}(x) = \tilde{g}(\bar{x}) = \sum_{\overline{m}\in Z^n} g(\bar{x} - 2\pi\overline{m}) \tag{85}$$

— функція, яку називають 2π-періодичним аналогом функції $g \in L^n$, де

$$Z^n = \left\{\overline{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in E^n : m_i \in Z\right\} \tag{86}$$

— цілочислова решітка у просторі E^n. З [6, с. 280, 281] випливає, що функція $\tilde{g}$ належить простору $\tilde{L}^n$ і має ряд Фур'є

$$\sum_{\overline{m}\in Z^n} F^{-1}(g)(\overline{m})e^{-i\overline{mx}} \sim \tilde{g}(\overline{x}), \tag{87}$$

$$\|\tilde{g}\|_{\tilde{1}^n} \leq \|g\|_{1^n}. \tag{88}$$

Позначимо через $\{\pi^n - 2\pi\overline{m}\}$ зсуви куба $\pi^n = [0, 2\pi)^n$ на вектор $2\pi\overline{m}$ у просторі E^n. Для різних векторів $\overline{m} \in Z^n$ множини $\{\pi^n - 2\pi\overline{m}\}$ попарно не перетинаються і

$$\bigcup_{\overline{m}\in Z^n} \{\pi^n - 2\pi\overline{m}\} = E^n. \tag{89}$$

Якщо $g(x) \geq 0$, то почленно інтегруючи ряд (85), що можливо на підставі (88), і використовуючи заміну змінних і (89), маємо

$$\|\tilde{g}\|_{\tilde{1}^n} = \int_{\pi^n} \sum_{\overline{m}\in Z^n} g(\overline{x} - 2\pi\overline{m})\,dx = \sum_{\overline{m}\in Z^n} \int_{\pi^n} g(\overline{x} - 2\pi\overline{m})\,dx =$$

$$= \int\limits_{\bigcup_{\overline{m}\in Z^n}\{\pi^n - 2\pi\overline{m}\}} g(t)\,dt = \int_{E^n} g(t)\,dt = \|g\|_{1^n}. \tag{90}$$

Періодичні аналоги функцій успадковують деякі властивості цих функцій.

Лема 9. *Нехай* $I^n_{\overline{y}^k}(x)$ *— дельтаподібне ядро. Тоді його* 2π*-періодичний аналог* $\tilde{I}^n_{\overline{y}^k}(x)$ (85) *є також дельтаподібним ядром. Якщо ж* $I^n_{\overline{y}^k}(x)$ *невід'ємне і парне по змінній* x_i, *то таке ж і ядро* $\tilde{I}^n_{\overline{y}^k}(x)$.

Доведення. З (85) випливає

$$\tilde{I}^n_{\overline{y}^k}(x) = \tilde{I}^n_{\overline{y}^k}(\overline{x}) = \sum_{\overline{m}\in Z^n} I^n_{\overline{y}^k}(\overline{x} - 2\pi\overline{m}). \tag{91}$$

Якщо $I^n_{\overline{y}^k}(x)$ — невід'ємне і парне по змінній x_i, то з (91) випливає, що функція $\tilde{I}^n_{\overline{y}^k}(x)$ невід'ємна і парна по змінній x_i. З (88) і означень (7) маємо

$$\left\|\tilde{I}^n_{\overline{y}^k}\right\|_{\tilde{1}^n M_k} = \sup_{\overline{y}>\overline{0}} \left\|\tilde{I}^n_{\overline{y}^k}\right\|_{\tilde{1}^n} \leq \sup_{\overline{y}>\overline{0}} \left\|I^n_{\overline{y}^k}\right\|_{1^n} = \left\|I^n_{\overline{y}^k}\right\|_{1^n M_k}. \tag{92}$$

Як і при доведенні (90), використовуючи (9), одержуємо

$$\int_{\pi^n} \tilde{I}^n_{\overline{y}^k}(x)\,dx = \int_{\pi^n} I^n_{\overline{y}^k}(x)\,dx = 1. \tag{93}$$

Позначимо через $B^\pi_\Delta = \left\{x \in E^n \colon 0 < \Delta < |x| \leq \pi\right\}$ підмножини простору E^n, а через $\{B^\pi_\Delta - 2\pi\overline{m}\}$ — зсуви цих підмножин на вектор $2\pi\overline{m}$. Для різних векторів $\overline{m} \in Z^n$ підмножини $\{B^\pi_\Delta - 2\pi\overline{m}\}$ попарно не перетинаються і

$$\bigcup_{\overline{m}\in Z^n} \{B^\pi_\Delta - 2\pi\overline{m}\} \subset \left\{x \in E^n \colon |x| > \Delta > 0\right\}. \tag{94}$$

З (91), використовуючи заміну змінних і (94), маємо

$$\int_{\Delta<|x|\leq\pi} \left|\tilde{I}^n_{\overline{y}^k}(x)\right| dx \leq \sum_{\overline{m}\in Z^n} \int_{\Delta<|x|\leq\pi} \left|I^n_{\overline{y}^k}(\overline{x} - 2\pi\overline{m})\right| dx =$$

$$= \int\limits_{\bigcup_{\overline{m}\in Z^n}\{B^\pi_\Delta - 2\pi\overline{m}\}} \left|I^n_{\overline{y}^k}(x)\right| dx \leq \int_{|x|>\Delta} \left|I^n_{\overline{y}^k}(x)\right| dx. \tag{95}$$

З (11), (93) і (95) випливає, що функція $\tilde{I}^{n}_{\bar{y}^k}(x)$ — дельтаподібне ядро, і лему 9 доведено.

Якщо $\varphi(\bar{y}) = 1/n$, де n — довільне натуральне число, то за лемою 9, 2π-періодичний аналог узагальненого ядра Фейєра (50), згідно з рівностями (55), (72), (87), перетворюється в добре відоме дельтаподібне тригонометричне ядро Фейєра, тобто

$$\tilde{F}_{1/n}(x) = \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (1 - k/n) \cos kx \right) / \pi .$$

Відмітимо, що для кожного періодичного дельтаподібного ядра $\tilde{K}^{n}_{\bar{y}^k}(x)$ існує неперіодичний аналог $K^{n}_{\bar{y}^k}(x)$. Дійсно, якщо функція $\tilde{K}^{n}_{\bar{y}^k}(x)$ — дельтаподібне ядро, то з (9), (11) випливає, що функція

$$K^{n}_{\bar{y}^k}(x) = \begin{cases} \tilde{K}^{n}_{\bar{y}^k}(x), & |x_i| \le \pi; \\ 0, & |x_i| > \pi, \ i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

— також дельтаподібне ядро, а з (85) — що для функції $K^{n}_{\bar{y}^k}(x)$ 2π-періодичним аналогом буде функція $\tilde{K}^{n}_{\bar{y}^k}(x)$.

1. *Функциональный анализ* (серия "Справочная математическая библиотека") / Под ред. С. Г. Крейна. – 2-е изд. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
2. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H_p : пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 368 с.
3. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции : пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 368 с.
4. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
6. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах: пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
7. *Никольский С. М.* Курс математического анализа: В 2-х т. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 392 с.
8. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 480 с.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1966. – Т. 3. – 656 с.
10. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – 4-е изд. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

Одержано 13.12.96