УДК 519.46

І. І. Качурик (Хмельниц. технол. ун-т)

q-ЧИСЛА КВАНТОВИХ ГРУП, ЧИСЛА ФІБОНАЧЧІ І ОРТОГОНАЛЬНІ МНОГОЧЛЕНИ

The algebraic relations (identities) between q-numbers not containing q^{α}-factors are obtained. The formula is derived which expresses any q-number $[x]$ in terms of q-number [2]. The relations of q-numbers $[n]$ to the Fibonacci numbers, the Chebyshev polynomials, and to other special functions are established. The sums of combinations of q-numbers, in particular, the sums of their powers, are calculated. Linear and bilinear generating functions are found for the „natural" q-numbers.

Одержано алгебраїчні співвідношення (тотожності) між q-числами, які не містять q^{α}-множників. Виведено формулу, яка виражає будь-яке q-число $[x]$ через q-число [2]. Встановлено зв'язок q-чисел $[n]$ з числами Фібоначчі, многочленами Чебишева та з іншими спеціальними функціями. Обчислено суми комбінацій q-чисел, зокрема суми їх степенів. Знайдено лінійні та білінійні породжуючі функції для „натуральних" q-чисел.

1. В останні роки зростає число робіт з різних аспектів теорії квантових груп, які розглядаються як нетривіальні деформації груп і алгебр Лі. Встановлюється тісний зв'язок між зображеннями квантових груп і базисними гіпергеометричними функціями [1, 2]. Стає очевидним, що з квантовими групами тісно переплітається так зване q-числення, що являє собою скінченно-різницеве числення, але не на рівномірній, а на експоненціальній сітці [3]. А тому якщо елементи алгебри Лі — диференціальні оператори, то елементи квантових алгебр — скінченно-різницеві диференціальні оператори. В q-численні з'являються специфічні поняття числа, свої різницеві дії, правила диференціювання і інтегрування (див., наприклад, [4]). В цілому q-числення має замкнений і послідовний характер.

У теорії квантових груп як q-аналог звичайного числа x розглядається величина

$$[x] = (q^{x/2} - q^{-x/2})/(q^{1/2} - q^{-1/2}) = \operatorname{sh}\hbar x/\operatorname{sh}\hbar, \tag{1}$$

де $q = \exp 2\hbar$ — параметр. Для цілого додатного числа n q-число $[n]$ є многочленом вигляду

$$[n] = q^{(n-1)/2} + q^{(n-3)/2} + \ldots + q^{-(n-1)/2} = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} q^{k/2}. \tag{2}$$

Конкретні розрахунки в рамках q-числення завжди громіздкі. Спрощенню обчислень значно сприяла б наявність „готових" співвідношень для q-чисел, зокрема, алгебраїчних. Але навіть прості алгебраїчні співвідношення, які зустрічаються в роботах, вимагають систематики і узагальнення. Що ж стосується більш складних питань, наприклад формул для сум степенів „натуральних" q-чисел, то інформації про них майже не існує. Для порівняльного аналізу бажано б мати співвідношення типу формули Біне для чисел Фібоначчі, яке виражало б будь-яке q-число не через базу q, а через інше q-число, наприклад [2]. Важливо також встановити зв'язок многочленів (2) з відомими спеціальними функціями і на цій основі поглибити вивчення властивостей як спеціальних функцій, так і власне q-чисел. Цікавими з нашого погляду є також питання теоретико-числових властивостей q-чисел, зокрема тих, що стосуються їх подільності.

Дана робота присвячена означеним аспектам досліджень в рамках q-числення.

2. Розглянемо деякі співвідношення між q-числами, які не містять q^{α}-

множників. На основі формули (1) перш за все встановлюємо справедливість 4-параметричної тотожності

$$[a + b][c+d] - [a+c][b+d] + [a-d][b-c] = 0. \tag{3}$$

Із неї одержимо простіші формули, які знадобляться в подальшому. При $d = 0$ із (3) отримуємо тотожність $[a + b][c] - [a + c][b] + [a][b - c] = 0.$

Покладаючи в (3) $a = c$ і виконуючи заміну $d \to a$, маємо

$$[a + c][b + c] - [a - c][b - c] = [2c][a + b]. \tag{4}$$

Звідси при $a = b$ дістаємо $[b + c]^2 - [b - c]^2 = [2b][2c]$. Якщо тут покласти $b + c = a$, $b - c = d$ і ввести перепозначення $d \to b$, то одержимо формулу

$$[a + b][a - b] = [a]^2 - [b]^2. \tag{5}$$

Покладаючи в (3) $d = c + 1$ і $-a \to a$, знаходимо

$$[a - c][b + c + 1] - [b - c][a + c + 1] = [2c + 1][a - b]. \tag{6}$$

Із формули (4) при $c = 1$, $b = 0$ одержуємо співвідношення

$$[a + 1] + [a - 1] = [2][a]. \tag{7}$$

При цілих a воно виражає той факт, що будь-яке „ціле" число $[n]$ є q-середнім найближчих до нього цілих чисел $[n - 1]$ і $[n + 1]$.

З формули (4) при $c = 1$, $b = a$ знаходимо

$$[a + 1]^2 - [a - 1]^2 = [2][2a]. \tag{8}$$

При $c = 0$ і $b \to -b - 1$ з формули (6) маємо

$$[a + 1]^2 - [a]^2 = [2a + 1]. \tag{9}$$

Додамо $[a][b - 1]$ до обох частин (6), покладемо $c = 0$ і врахуємо (7). В результаті одержимо формулу $[a][b - 1] + [b][a + 1] - [2][a][b] = [b - a]$, з якої при $b = a + 1$ дістаємо (див. [5])

$$[a + 1]^2 - [2][a][a + 1] + [a]^2 = 1, \qquad ([a + 1] - [a])_q^2 = 1. \tag{10}$$

Із (3) при $c = 0$, $d = 1$ одержуємо формулу $[a][b + 1] - [b][a - 1] = [a + b]$, до якої додаємо формулу, одержану з неї заміною $b \to -b$. В результаті маємо $[a + b] + [a - b] = [a]([b + 1] - [b - 1])$. Звідси

$$([a + b] + [a - b])[b] = [a][2b]. \tag{11}$$

Використовуючи формули (5) і (7), одержуємо

$$[a + 1]^2 + [a - 1]^2 = [a]^2([2]^2 - 2) + 2. \tag{12}$$

Формула (5) при $a = 2b$ набуває вигляду $[2b]^2 - [b]^2 = [b][3b]$. Оскільки на основі (11), (7) і (5) $[2b]^2 = [b]^2(([2]^2 - 4)[b]^2 + 4)$, то

$$[3b] = \kappa^2[b]^3 + 3[b], \qquad \kappa \equiv \sqrt{[2]^2 - 2^2}. \tag{13}$$

3. Виведемо формулу, яка виражає будь-яке „ціле" число $[n]$ через $[2]$. Для цього розглянемо рекурентну послідовність елементів $v_1, v_2, \ldots v_n, \ldots$ таку, що

$$v_{n+1} = 2\alpha v_n + \beta v_{n-1}, \qquad v_1 = a, \quad v_2 = b \tag{14}$$

(a, b, α, β — деякі параметри). Безпосередньою перевіркою можна переконатися в справедливості формули (див. [6])

$$2v_n = (a+\gamma)(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta})^{n-1}+(a-\gamma)(\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta})^{n-1}, \qquad (15)$$

де $\gamma = (b-a\alpha)/\sqrt{\alpha^2+\beta}$. Якщо $a=b=2\alpha=\beta=1$, то вона співпадає з формулою Біне для чисел Фібоначчі $v_n = F(n)$:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\},$$

які задовольняють рекурентне співвідношення $F(n+1) = F(n)+F(n-1)$, $F(1)=F(2)=1$. А тому (15) можна розглядати як аналог формули Біне для елементів v_n.

Із (7) випливає, що q-числа $[n]$ (n — ціле) також задовольняють рекурентне співвідношення (14), якщо в ньому прийняти $v_n=[n]$, $2\alpha=[2]$, $\beta=-1$ ($v_1=a= 1$, $v_2=b=[2]$):

$$[n+1] = [2][n]-[n-1]. \qquad (16)$$

При цих значеннях a, b, α і β (15) набуває вигляду

$$[n] = \frac{1}{\kappa}\left\{\left(\frac{[2]+\kappa}{2}\right)^n - \left(\frac{[2]-\kappa}{2}\right)^n\right\}, \qquad \kappa \equiv \sqrt{[2]^2-2^2}. \qquad (17)$$

Ця формула визначає в термінах [2] будь-яке число $[n]$ безпосередньо через його номер n, причому $[n]$ є многочленом від [2] степеня $n-1$ (крок $\Delta n = 2$) з цілими коефіцієнтами. Наприклад, $[3] = [2]^2-1$, $[4] = [2]([2]^2-2)$, $[5] = \left\{[2]^2-((1-\sqrt{5})/2)^2\right\}\left\{[2]^2-((1+\sqrt{5})/2)^2\right\}$, $[6]=[2]([2]^2-3)([2]^2-1)$. Її можна поширити на довільні значення x, якщо взяти до уваги, що $[2] = q^{1/2}+q^{-1/2}$, $\kappa = \pm(q^{1/2}-q^{-1/2})$.

Коли $[2] = \pm i = \pm\sqrt{-1}$, то $([2]+\kappa)/2 = \pm i\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2$, $([2]-\kappa)/2 = \pm i\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2$, і з формули (17) маємо

$$[n]' = (\pm i)^{n-1}F(n).$$

Це означає, що числа Фібоначчі можна розглядати як частинний випадок q-чисел.

Зв'язок q-чисел із числами Фібоначчі існує і при деяких інших значеннях [2]. Нехай, наприклад, $[2]=\pm 3$. Тоді $\kappa = \sqrt{5}$, $([2]+\kappa)/2 = \pm\left(\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2\right)^2$, $([2]-\kappa)/2 = \pm\left(\left(1\mp\sqrt{5}\right)/2\right)^2$ і $[n]'' = (\pm 1)^{n+1}F(2n)$.

Що ж стосується непарних чисел Фібоначчі, то тепер їх можна знайти через два „сусідніх" q-числа:

$$F(2n+1) = [n+1]''-[n]'', \qquad \text{коли } [2]=3,$$

$$F(2n+1) = (-1)^n([n+1]''-[n]'')/\sqrt{5}, \qquad \text{коли } [2]=-3.$$

Аналогічно, якщо покласти $[2]=\pm\sqrt{5}$, то $k=1$, $([2]+\kappa)/2 = \left(1\pm\sqrt{5}\right)/2$, $([2]-\kappa)/2 = -\left(1\mp\sqrt{5}\right)/2$ і

$$F(2n) = \pm[2n]'''/\sqrt{5}, \qquad F(2n+1) = \pm([2n+2]'''-[2n]''')/\sqrt{5}.$$

4. Встановимо зв'язок q-чисел $[n]$ з деякими спеціальними функціями, насамперед з многочленами Чебишева першого $T_n(x)$ та другого $U_n(x)$ роду. Співставляючи відомі для них формули з формулою (17), приходимо до висновку, що

$$T_{2n}([2]/2) = \kappa^2[n]^2/2 + 1, \quad T_{2n+1}([2]/2) = \kappa^2([n+1]^2+[n]^2)/2[2] + 2/[2], \quad (18)$$

$$U_n([2]/2) = [n+1]. \quad (19)$$

Використовуючи (18) і (19), на основі співвідношень з п. 2 між q-числами можна отримати різні співвідношення для $T_n(x)$ і $U_n(x)$.

Функція $U_n(x)$ відомим чином пов'язана з многочленами Якобі $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, ультрасферичними многочленами $C_n^{(\lambda)}(x)$, з гіпергеометричною функцією ${}_2F_1(x)$. Звідси

$$[n] = \frac{n!\sqrt{\pi}}{2\Gamma(n+1/2)} P_{n-1}^{(1/2,1/2)}\left(\frac{[2]}{2}\right) = C_{n-1}^{(1)}\left(\frac{[2]}{2}\right) = n\,{}_2F_1\left(1+n,\ 1-n;\ \frac{3}{2};\ \frac{2-[2]}{4}\right).$$

Коли $q = e^{2i\theta}$, то $[n] \equiv [n]_\theta = \sin(n\theta)/\sin\theta$ і $[n+1]_\theta = U_n(\cos\theta)$. Такого вигляду q-числа можна пов'язати з неперервними ультрасферичними q-многочленами $C_n(\cos\theta, \beta\,|\,q)$, $[n+1]_\theta = C_n(\cos\theta, q\,|\,q)$, а через них з іншими відомими q-многочленами (див. [4]). Це розширює рамки вивчення властивостей q-чисел.

5. Діапазон застосування q-чисел неперервно розширюється. І тому необхідно мати формули, які б використовувались як робочі. Це перш за все формули підсумовування. Розглянемо деякі з них.

Методом індукції доводимо, що

$$\sum_{k=0}^{n}[a-2k] = [n+1][a-n], \quad \sum_{k=0}^{n}[a-(2k+1)] = [n+1][a-n-1]. \quad (20)$$

Зокрема, при $a = 0$ маємо

$$\sum_{k=0}^{n}[2k] = [n][n+1], \quad \sum_{k=1}^{n}[2k+1] = [n+1]^2. \quad (21)$$

Звідси з урахуванням (5) отримуємо $\sum_{k=|n-m|}^{n+m}[2k+1] = [2n+1][2m+1]$.

До обох частин співвідношення $[m+1] + [m-1] = [2][m]$ (див. (16)) додамо $[m+1]$ і врахуємо, що згідно з (11) $[m+1] - [m-1] = [2m]/[m]$. Маємо

$$2[m][m+1] = [2][m]^2 + [2m]. \quad (22)$$

Аналогічно,

$$2[m][m-1] = [2][m]^2 - [2m]. \quad (23)$$

Запишемо (22) для значень $m = 1, 2, \ldots, n$ (n — парне), результат додамо і врахуємо (16). Після зведення подібних членів згідно з (21) отримаємо

$$S_n = [1]^2 - [2]^2 + \ldots + [n-1]^2 - [n]^2 = -\frac{1}{[2]}\sum_{k=1}^{n}[2k] = -\frac{[n][n+1]}{[2]}.$$

Нехай n — непарне. Тоді $S_n = S_{n-1} + [n]^2 = -[n][n+1]/[2] + [n]^2 = [n]([2][n] - [n-1])/[2] = [n][n+1]/[2]$. Остаточно

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}[k]^2 = (-1)^{n+1}[n][n+1]/[2]. \quad (24)$$

Додамо (8) і (12) і врахуємо (9). Після нескладних перетворень одержуємо $\kappa^2[a]^2 = [2a+1] - [2a-1] - 2$. Це дає можливість знайти

$$\sum_{k=1}^{n}[k]^2 = \sum_{k=1}^{n}[n-k]^2 = \frac{[2n+1]-(2n+1)}{\kappa^2}. \qquad (25)$$

Тепер нам знадобиться така формула: $[\kappa]^2[m][m+1] = [2m+2] - [2m] - 2$. (Щоб її вивести, переходимо в (23) від m до $m+1$, результат додаємо до (22) і в одержаному виразі згідно з (10) робимо заміну $[m+1]^2 + [m]^2 = [2][m][m+1]+1$). З допомогою цієї формули і (16) комбінуванням (24) і (25) отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n}[2k]^2 = \frac{[2(2n+1)]-[2](2n+1)}{[2]\kappa^2}, \quad \sum_{k=1}^{n}[2k-1]^2 = \frac{[2(2n)]-[2](2n)}{[2]\kappa^2}. \qquad (26)$$

Розглянемо суму $S_n = [1][2] + [2][3] + \ldots + [n][n+1]$. З допомогою (16) знаходимо $S_{2n} = ([2(2n+1)] - [2](2n+1))/\kappa^2$. Нехай n — непарне. Тоді $S_n = S_{n-1} + [n][n+1] = ([2n] - [2][n])/\kappa^2 + [n][n+1] = ([2(n+1)] - [2](n+1))/\kappa^2$. В кінцевому підсумку отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n}[k][k+1] = \frac{[2(n+1)]-[2](n+1)}{\kappa^2}, \qquad \sum_{k=1}^{n}[k-1][k] = \frac{[2n]-[2](n)}{\kappa^2}. \qquad (27)$$

Покладаючи в (5) $b = m$, $a = 2m$, знаходимо $[m][3m] = [2m]^2 - [m]^2$. Поклавши в (13) $b = m$ і помноживши результат на $[m]$, одержуємо $[m][3m] = \kappa^2[m]^4 + 3[m]^2$. З двох останніх співвідношень отримуємо $\kappa^2[m]^4 = [2m]^2 - 4[m]^2$. Підсумуємо обидві частини цього виразу, скориставшись (25) і (26):

$$\sum_{k=1}^{n}[k]^4 = \frac{[2(2n+1)]-[2](2n+1)}{[2]\kappa^2} - 4\frac{[2n+1]-(2n+1)}{\kappa^2}.$$

Аналогічно

$$\sum_{k=1}^{n}[k][3k] = \frac{[2(2n+1)]-[2](2n+1)}{[2]\kappa^2}.$$

На основі формул (9) і (10) отримуємо співвідношення $2[n]^2 = [2][n][n+1] - [2n+1] + 1$. Комбінуємо його з (23): $[n][n+1] \pm [n]^2 = ([2n+1] \mp [2n] - 1)/([2] \mp 2)$. Ці співвідношення будуть потрібні при виведенні формул підсумовування (додаванням та відніманням виразів в (21)):

$$\sum_{k=1}^{n}[k] = \frac{[n+1]-([n]+1)}{[2]-2}, \qquad \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}[k] = \frac{(-1)^{n+1}([n+1]+[n])+1}{[2]+2}. \qquad (28)$$

6. Багато сум, пов'язаних з q-числами, зручно знаходити з допомогою формули (17), яку подамо у вигляді

$$[n] = (\alpha^n - \beta^n)/\kappa, \qquad \alpha = ([2]+\kappa)/2, \qquad \beta = ([2]-\kappa)/2. \qquad (29)$$

Обчислимо, наприклад, суму $S_n = [3] + [6] + \ldots + [3n]$. Маємо $S_n = (S_n^\alpha - S_n^\beta)/\kappa$, де S_n^α і S_n^β — суми геометричних прогресій,

$$S_n^\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha^{3k} = (\alpha^{3n+3} - \alpha^3)/(\alpha^3 - 1), \qquad S_n^\beta = S_n^\alpha(\alpha \to \beta).$$

Оскільки $\alpha^3 - 1 = (1 - \beta^3)\alpha^3$, $\beta^3 - 1 = (1 - \alpha^3)\beta^3$, $(1 - \alpha^3)(1 - \beta^3) = [2] - [6]/[3] = ([2] + 1)^2(2 - [2])$, з урахуванням (29) отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n} [3k] = \frac{[3n+3] - [3n] - [3]}{([2]+1)^2([2]-2)}.$$

Тепер, застосовуючи (13), знаходимо

$$\kappa^2 \sum_{k=1}^{n} [k]^3 = \frac{1}{[2] - 2}\left\{\frac{[3n + 3] - [3n] - [3]}{([2] + 1)^2} - 3([n + 1] - [n] - 1)\right\}.$$

Розглянемо більш складні випадки. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметична прогресія, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — геометрична прогресія із знаменником $p \neq 1$. Тоді, як відомо, суму добутків $S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$ можна знайти згідно з формулами

$$S_n(1 - p) = (a_1 - d)b_1 - a_n b_n p + \frac{d(b_1 - b_n p)}{1 - p} = a_1 b_1 - a_n b_n p + \frac{d(b_2 - b_n p)}{1 - p}, \quad (30)$$

де d — різниця арифметичної прогресії.

Використаємо (30) і знайдемо суму $S_n = 1[1] + 2[2] + \ldots + n[n]$:

$$\sum_{k=1}^{n} k[k] = \frac{n[n+1] - [n](n+1)}{[2]-2}. \quad (31)$$

Тут було враховано, що $(1-\alpha)^2 = \alpha([2]-2)$, $(1-\beta)^2 = \beta([2]-2)$.

Нехай $a_1 = a, a_2, \ldots, a_n$ — арифметична прогресія, різниця якої дорівнює d. Обчислимо суму $[1]a_1 + [2]a_2 + \ldots + [n]a_n$. Для цього подамо $[k]$ згідно з (29) і просумуємо виникаючі тут арифметико-геометричні прогресії згідно з (30):

$$\sum_{k=1}^{n} (a + d(k-1))[k] = \frac{(a+dn)([n+1] - ([n]+1)) - d([n+1] - (n+1))}{[2]-2}.$$

Зокрема, при $d = 1$, $a = 1$ $(a_k = k)$ отримуємо (31). Коли ж $a = 0$, $d = 1$, то

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)[k] = \frac{(n-1)[n+1] - n[n] + 1}{[2]-2}.$$

На основі цього результату і (28) обчислюємо суму

$$\sum_{k=1}^{n} (n-k+1)[k] = n + (n-1)[2] + \ldots + 2[n-1] + [n] =$$

$$= \frac{[n+1] - (n+1)}{[2]-2}.$$

Обчислимо тепер суму чисел $[ak + b]$. Подамо їх згідно з (29), просумуємо виникаючі тут геометричні прогресії і врахуємо, що $(1 - \alpha^a)(1 - \beta^a) = 2 - [2a]/[a]$. Після деяких спрощень одержимо

$$\sum_{k=0}^{n}[ak+b] = \frac{[a]}{[2a]-2[a]}([a(n+1)+b]-[an+b]-[a-b]-[b]), \quad a \neq 0.$$

Зокрема,

$$\sum_{k=0}^{n}[k-a] = \frac{[a+1]([n+1]-([n]+1))-[a]([n+2]-([n+1]+1))}{[2]-2}.$$

Якщо скористатись формулою (20), то з допомогою (6) (при $c=0$) знайдемо

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[k-a] =$$

$$= \frac{[a+1]\{(-1)^n([n+1]+[n])-1\}-[a]\{(-1)^n([n+2]+[n+1])+1\}}{[2]+2}.$$

За схемою Горнера визначимо результат ділення $(x^{2n}-y^{2n})/(x-y)$ і $(x^{2n+1}-$ $-y^{2n+1})/(x-y)$ при умові, що $xy=1$:

$$\frac{(x^{2n}-y^{2n})}{x-y} = \sum_{k=1}^{n}(x^{2k-1}+y^{2k-1}), \qquad \frac{(x^{2n+1}-y^{2n+1})}{x-y} = 1+\sum_{k=1}^{n}(x^{2k}+y^{2k}).$$

Покладемо тут $x=\alpha^a$, $y=\beta^a$ і врахуємо (29). Маємо

$$\sum_{k=1}^{n}[a(k-1/2)]^2 = \frac{[a(2n)]-[a](2n)}{[a]\kappa^2}, \quad \sum_{k=1}^{n}[ak]^2 = \frac{[a(2n+1)]-[a](2n+1)}{[a]\kappa^2}.$$

Використовуючи другий вираз, можемо просумувати співвідношення $[k(a-$ $-1)][k(a+1)] = [ka]^2-[k]^2$ (див. (5)). В результаті одержимо

$$\sum_{k=1}^{n}[k(a-1)][k(a+1)] = \frac{[a(2n+1)]-[a][2n+1]}{\kappa^2[a]}.$$

Тепер знайдемо суми вигляду

$$S_{\pm} = \sum_{k=0}^{N}(\pm 1)^k[n-k][m-k].$$

Спочатку розглянемо другу з них S_-. На основі (29)

$$\kappa^2 S_- = \alpha^{n+m}S'_- + \beta^{n+m}S''_- - (\alpha^{n-m}+\beta^{n-m})\varepsilon_N,$$

де $S'_- = (1-(-1)^{N+1}\beta^{2(N+1)})/(1+\beta^2)$, $S''_- = S'_-(\beta\to\alpha)$, а $\varepsilon_N = 1$ або 0, в залежності від того парне чи непарне N.

Нехай N — непарне. Тоді $\varepsilon_N = 0$, $S'_- = \kappa\beta^N[N+1]/[2]$, $S''_- = -S'_-(\beta\to\alpha)$ і

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k[n-k][m-k] = \frac{[N+1][n+m-N]}{[2]}. \tag{32}$$

Коли N — парне, то

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k[n-k][m-k] = \frac{[m][n+1]+[N-m][N-n+1]}{[2]}. \tag{33}$$

Розглянемо в (32) і (33) такі три важливі частинні випадки: $N = n + m - 1$, $N = n$ і $m = n$. При непарному N маємо відповідно $S_- = [m+n]/[2]$, $S_- = [m][n+1]/[2]$ і $S_- = [N+1][2n-N]/[2]$. Для парного N ці суми відповідно дорівнюють $S_- = [n][m]$, $S_- = [n][m+1]/[2]$ і $S_- = ([n][n+1] + [N-n][N-n+1])/[2]$.

Із (32) і (33) видно, що при непарному $N = n + m$ $S_- = 0$; коли ж $N = n + m$ парне, то $S_- = ([n][m+1] + [m][n+1])/[2]$. Незалежно від парності N при $N = n = m$ маємо $S_- = [n][n+1]/[2]$.

Обчислюючи суму S_+, одержуємо

$$\sum_{k=0}^{n}[m-k][n-k] = \{[N+1]([n+m-N+1]-[n+m-N-1]) -$$

$$-(N+1)([n-m+1]-[n-m-1])\}/\kappa^2.$$

У більш загальному випадку

$$\sum_{k=0}^{n}[ak+c][bk+d] =$$

$$= \frac{[a(n+1)+c][bn+d]-[b(n+1)+d][an+c] + [c][b-d] - [d][a-c]}{\kappa^2[(a+b)/2][(a-b)/2]},$$

якщо $b \neq a$. Коли ж $b = a$, то

$$\sum_{k=0}^{n}[ak+c][ak+d] =$$

$$= \frac{[a(n+1)]([an+c+d+1]-[an+c+d-1]) - [a](n+1)([c-d+1]-[c-d-1])}{[a]\kappa^2}.$$

Розглянемо також суму $S_n(t) = [1]t + [2]t^2 + \ldots + [n]t^n$, де t — довільне число. Підсумовуючи виникаючі тут дві геометричні прогресії з знаменниками $p = \alpha t$ і $p = \beta t$, при $\alpha t \neq 1$ і $\beta t \neq 1$ отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n}[k]t^k = \frac{t^{n+2}[n] - t^{n+1}[n+1] + t}{t^2 - [2]t + 1}. \tag{34}$$

При $t = 1/\alpha = \beta$ і $t = 1/\beta = \alpha$ відповідно маємо

$$S_n(1/\alpha) = S_n(\beta) = (([2n+1]-1)\beta - [2n])/\kappa^2 + [n]/\kappa,$$

$$S_n(1/\beta) = S_n(\alpha) = (([2n+1]-1)\alpha - [2n])/\kappa^2 - [n]/\kappa.$$

7. З'ясуємо, як змінюється сума $S_n(t)$ в (34) при фіксованому t і $n \to \infty$. Якщо $|t| < \min(|q^{1/2}|, |q^{-1/2}|)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} t^n[n] = 0$ і знаходимо (див. також [2])

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n]t^n = \frac{t}{t^2 - [2]t + 1}. \tag{35}$$

Функцію $S(t) = t/(t^2 - [2]t + 1)$ можна розглядати як породжуючу для „натуральних" q-чисел.

Неважко також знайти, що при $|t| < \min(1, |q^{-1}|)$ справедлива формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)/2}[n]t^n = \frac{t}{(1-t)(1-qt)}.$$

Якщо в (35) покласти $[2] = i = \sqrt{-1}$ і зробити заміну $it \to t$, то отримаємо генеруючу функцію для чисел Фібоначчі:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n)t^n = \frac{1}{1-t-t^2}. \tag{36}$$

Знайдемо тепер деякі білінійні породжуючі функції для q-чисел. Для цього обчислимо суму ряду $\sum_{k=1}^{\infty}[n][n]_\theta t^n$ при умові $|t| < \min(|q^{1/2}|, |q^{-1/2}|)$. Застосуємо формулу підсумовування нескінченно спадної геометричної прогресії. Після спрощень одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n][n]_\theta t^n = \frac{t(1-t^2)}{|(1-q^{1/2}\, te^{i\theta})(1-q^{-1/2}\, te^{i\theta})|^2}. \tag{37}$$

Поклавши тут $q = \exp(2i\varphi)$, будемо мати

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n]_\theta[n]_\varphi t^n = \frac{t(1-t^2)}{|(1-te^{i(\theta+\varphi)})(1-te^{i(\theta-\varphi)})|^2}. \tag{38}$$

Звідси при $\varphi = 0$ отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n[n]_\theta t^n = \frac{t(1-t^2)}{(1+t^2-[2]_\theta t)^2}.$$

Аналогічно (37) при умові $|t| < \min(1, |q^{-1}|)$ можна вивести формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)/2}[n][n]_\theta t^n = \frac{t(1-qt^2)}{|(1-te^{i\theta})(1-qte^{i\theta})|^2}. \tag{39}$$

Формули (37) – (39) можна розглядати як білінійні породжуючі функції для q-чисел.

Якщо в (37) і (39) покласти $\theta = 0$, то знайдемо лінійні породжуючі функції для q-чисел у такому вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n[n]t^n = \frac{t(1-t^2)}{(t^2-[2]t+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)/2}\, n[n]t^n = \frac{t(1-qt^2)}{(1-t)(1-qt)^2}.$$

1. *Koornwinder T. H.* Representations of the twisted $SU(2)$ quantum group and some q-hypergeometric orthogonal polynomials // Ned. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A. – 1989. – **92**, № 2. – P. 97–102.
2. *Beidenharn L. C., Lohe M. A.* Quantum groups symmetry and q-tensor algebras. – Singapore: World Sci., 1995. – 293 p.
3. *Смородинский Я. А., Шелепин А. А., Шелепин Л. А.* Групповые и вероятностные основы квантовой теории // Успехи физ. наук. – 1992. – **162**, № 3. – С. 2 – 95.
4. *Gasper G., Rahman M.* Basic hipergeometric functions. – Cambridge: Cambridge univ. press, 1990. – 287 p.
5. *Gavrilik A. M., Klimyk A. U.* Representations of q-deformed algebras $Uq(SO_{2,1})$ and $Uq(SO_{3,1})$ // J. Math. Phys. – 1994. – **35**, №10. – P. 3670 – 3686.
6. *Кужель А. В.* Математические импровизации. – Киев: Выща шк., 1983. – 96 с.

Одержано 16.04.97