УДК 517.929

**Д. Г. Кореневский** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# КРИТЕРИИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧНОМ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ *

We obtain spectral and algebraic coefficient criterions and sufficient conditions of the asymptotic stability in a mean square for solutions of systems of linear stochastic difference equations with continuous time and delay. We consider the case of rational relation between delays and "white noise" type stochastic perturbation of coefficients. We use the Lyapunov function method and represent the most of results in terms of the Sylvester and Lyapunov matrix algebraic equations.

Одержано спектральний і алгебраїчні коефіцієнтні критерії та достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному розв'язків вказаних у назві статті систем різницевих рівнянь. Розглянуто випадок раціонального співвідношення між запізненнями та стохастичного збурення коефіцієнтів типу „білого" шуму. Використовується метод функцій Ляпунова. Більшість результатів наведено в термінах матричних алгебраїчних рівнянь Сільвестра і Ляпунова.

В настоящей статье исследования устойчивости по Ляпунову, относившиеся к детерминированным и стохастическим системам разностных уравнений с дискретным временем и запаздыванием [1] и детерминированным разностным уравнением с непрерывным временем [2], распространяются на новый класс разностных уравнений — стохастические разностные уравнения с непрерывным временем и запаздыванием. В частности, в ней представлены спектральный и алгебраические коэффициентные критерии (необходимые и достаточные условия), а также достаточные алгебраические коэффициентные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратичном решений системы таких разностных уравнений в случае рационального соотношения между запаздываниями и стохастических возмущений коэффициентов типа „белого" шума.

Алгебраические коэффициентные критерии и достаточные условия сформулированы в терминах матричных алгебраических уравнений Сильвестра и Ляпунова. Для вывода достаточных условий используется, как и в случае дискретного времени [1], $(n^2+m)$-параметрическая функция Ляпунова в виде линейной комбинации квадратичной формы фазовых переменных в текущий момент времени и таких же квадратичных форм с фазовыми переменными в сдвинутые влево на величину запаздываний моменты времени ($n$ — размерность системы, $m$ — количество запаздываний).

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим начальную задачу для системы линейных стохастических разностных уравнений с непрерывным временем $t$ и постоянными запаздываниями аргумента

$$x(t+\tau_0) = [A_0 + B_0\xi(t)]\,x(t) + \sum_{j=1}^{m}[A_j + B_j\xi(t)]\,x(t-\tau_j), \qquad t_0<t, \tag{1}$$

при начальном условии

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \qquad t_0-\tau_m-\tau_0 \le \theta \le t_0. \tag{2}$$

Здесь вектор-столбец $x\in\mathbb{R}^n$; постоянные матрицы коэффициентов $A_j, B_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $j=0,1,\ldots,m$; $\varphi(\theta)$ — детерминированное начальное условие (непрерывная начальная вектор-функция, $\varphi\in\mathbb{R}^n$); $\tau_0$ — положительная постоян-

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Объединенного фонда Правительства Украины и Международного научного фонда Дж. Сороса (грант № К42100, 1995 г.).

ная, шаг итерации; $\tau_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$; $\tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m$, — положительные постоянные, называемые запаздываниями аргумента $t$ и удовлетворяющие рациональным соотношениям вида $\tau_j = j\tau_0$, $j = 1, \ldots, m$; $\xi(t)$ — возмущающий коэффициенты $A_j$, $j = 0, 1, \ldots, m$, системы (1) скалярный стационарный случайный процесс типа стандартного белого шума (так что $\mathbf{M}\{\xi(t)\} = 0$, $\mathbf{M}\{\xi^2(t)\} = 1$, $\mathbf{M}\{\xi(t)\xi(t_1),\ t \neq t_1\} = 0$, где $\mathbf{M}$ — символ математического ожидания).

При отсутствии случайных возмущений ($B_j = 0$, $j = 0, 1, \ldots, m$) система (1) вырождается в систему детерминированных линейных разностных уравнений с непрерывным временем и запаздыванием. Состояние теории устойчивости решений систем детерминированных линейных разностных уравнений с непрерывным временем представлено в [3].

Под решением начальной задачи (1), (2) понимается $n$-мерная случайная вектор-функция $x(t; t_0, \varphi(\theta))$, которая с вероятностью единица при каждом $t > t_0$ обращает уравнение (1) в тождество, а при $t_0 - \tau_m - \tau_0 \leq t \leq t_0$ совпадает с $\varphi(\theta)$. Методом шагов можно установить, что решение $x(t; t_0, \varphi(\theta))$ существует при $t_0 < t$ и однозначно определяется начальными условиями: начальным множеством $[t_0 - \tau_m - \tau_0, t_0]$ и начальной вектор-функцией $\varphi(\theta)$.

Стационарным решением системы уравнений (1) называется решение $x(t; t_0, \varphi(\theta)) = x_0$, равное постоянному вектору $x_0$ как на начальном множестве $[t_0 - \tau_m - \tau_0, t_0]$, так и при $t_0 < t$.

Определение асимптотической устойчивости в среднем квадратичном для (1) вводится по аналогии со стохастическими уравнениями с дискретным временем (см., например, [4], гл. 2).

**Определение 1.** *Стационарное тривиальное решение* $x = 0$ *системы уравнений* (1) *называется устойчивым по Ляпунову в среднем квадратичном, если для любого сколь угодно малого числа* $\varepsilon > 0$ *можно указать другое число* $\delta > 0$ *такое, что из условия* $\|\varphi\| < \delta$ *для условного математического ожидания квадрата нормы решения* $x(t; t_0, \varphi)$,

$$\mathbf{M}\{\|x\|^2 \mid \|\varphi\| < \delta\},$$

*следует неравенство*

$$\mathbf{M}\{\cdot\} < \varepsilon.$$

**Определение 2.** *Стационарное тривиальное решение* $x = 0$ *системы уравнений* (1) *называется асимптотически устойчивым по Ляпунову в среднем квадратичном, если оно устойчиво в смысле определения* 1 *и, кроме того, для условного математического ожидания квадрата нормы решения справедливо равенство*

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{M}\{\|x\|^2 \mid \|\varphi\| < \delta\} = 0.$$

Ставится задача: сформулировать критерии и достаточные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратичном стационарного тривиального решения $x(t; t_0, \varphi(\theta)) = 0$.

Так как стохастическая система (1) является системой с переменными коэффициентами, построить характеристическое уравнение непосредственно для (1) и, следовательно, сформулировать, например, спектральный критерий в терминах корней характеристического уравнения не представляется возможным.

Один из путей получения критериев (спектрального и алгебраического, коэффициентного) асимптотической устойчивости в среднем квадратичном решений системы разностных уравнений (1) с рациональным соотношением между запаздываниями — расширение исходного $n$-мерного фазового пространства и построение уравнений для вторых моментов решений расширенной системы стохастических разностных уравнений.

**2. Эквивалентная система стохастических разностных уравнений без запаздывания и уравнения для вторых моментов.** Введем в рассмотрение вектор-столбец новых переменных $u(t)$ размера $n(m+1)$

$$u(t) = [x(t),\ x(t-\tau_1),\ \ldots\ ,\ x(t-\tau_m)]^T,$$

где $T$ — символ транспонирования.

Тогда стохастическую систему с запаздыванием (1) можно записать в виде эквивалентной ей стохастической системы размера $n(m+1)$ без запаздывания

$$u(t+\tau_0) = [A + B\xi(t)]\,u(t), \tag{3}$$

где через $A$ и $B$ обозначены квадратные размера $n(m+1)\times n(m+1)$ блочные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \ldots & A_{m-1} & A_m \\ E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & E & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & E & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & \ldots & B_m \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$E$ — единичная матрица соответствующего размера.

Обозначим через $Q(t)$ матрицу вторых моментов решений системы (3):

$$Q(t) = [q_{ik}(t)]_{i,k=1}^{n(m+1)} \equiv \mathbf{M}\{u(t)u^T(t)\}.$$

Умножая уравнение (3) почленно справа на соответствующее ему транспонированное уравнение

$$u^T(t+\tau_0) = u^T(t)[A^T + B^T\xi(t)]$$

и применяя к полученному результату операцию математического ожидания с учетом свойств случайного процесса $\xi(t)$, получаем разностное матричное уравнение для матрицы вторых моментов:

$$Q(t+\tau_0) = A\,Q(t)A^T + B\,Q(t)B^T. \tag{5}$$

С помощью кронекерового произведения матриц матричное уравнение (5) можно записать в векторно-матричной форме

$$q(t+\tau_0) = \mathcal{A}q(t), \tag{6}$$

где через $q(t)$ обозначен $n^2(m+1)^2$-мерный вектор-столбец

$$q(t) = [q_{11}(t),\ \ldots\ ,\ q_{1n}(t),\ \ldots\ ,\ q_{1n(m+1)}(t),\ \ldots\ ]^T,$$

а матрица $\mathcal{A}$ размера $n^2(m+1)^2\times n^2(m+1)^2$ имеет вид

$$\mathcal{A} = A\otimes A + B\otimes B. \tag{7}$$

**3. Спектральный критерий.** Запись уравнения моментов (5) в векторно-матричной форме (6) позволяет сформулировать спектральный критерий в виде следующего утверждения.

**Теорема 1.** *Для асимптотической устойчивости тривиального решения* $q(t) = 0$ *системы* (6) (*и следовательно, асимптотической устойчивости в* *среднем квадратичном тривиального решения* $x = 0$ *системы* (1)) *необходимо и достаточно, чтобы модули всех собственных значений матрицы* $\mathcal{A}$ (7) *были меньше единицы* (*другими словами, чтобы матрица* $\mathcal{A}$ *была сходящейся*).

***Доказательство.*** Так как система уравнений для моментов (6) является детерминированной, доказательство теоремы осуществляется стандартным для детерминированных стационарных разностных уравнений приемом — построением соответствующего характеристического уравнения. Отыскивая общее решение системы (6) в виде показательной функции $q(t) = c\lambda^t$ (т. е. в виде элементарной функции; $c, \lambda = \text{const}$), приходим к характеристическому уравнению

$$\det(E\mu - \mathcal{A}) = 0, \qquad \mu = \lambda^{\tau_0},$$

откуда следует справедливость теоремы.

**4. Алгебраические коэффициентные критерии.** Исходя из стохастической разностной системы уравнений расширенной размерности (3) можно предложить следующий критерий.

**Теорема 2** (первый алгебраический коэффициентный критерий). *Для асимптотической устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения* $u(t) = 0$ *системы* (3) (*и следовательно, асимптотической устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения* $x = 0$ *системы* (1)) *необходимо и достаточно, чтобы существовала положительно определенная матрица* $H \in \mathbb{R}^{n(m+1)\times n(m+1)}$ *— решение матричного алгебраического уравнения Сильвестра*

$$H - A^T H A - B^T H B = E. \tag{8}$$

***Доказательство.*** Введем в рассмотрение $n^2(m+1)^2$-параметрическую стохастическую функцию Ляпунова вида квадратичной формы

$$V(u(t)) = u^T(t) H u(t), \qquad H \in \mathbb{R}^{n(m+1)\times n(m+1)}. \tag{9}$$

Роль параметров играют $n^2(m+1)^2$ элементов (подлежащей определению) положительно определенной матрицы $H$ $(H = H^T > 0)$.

Выполняя присущие методу функций Ляпунова для стохастических разностных уравнений шаги (см. [4], гл. 2) — вычисление первой разности функции Ляпунова (9) на решениях системы (3)

$$\Delta V(u(t))_{(3)} = \{V(u(t+\tau_0)) - V(u(t))\}_{(3)}$$

и последующее исследование условий, при которых математическое ожидание первой разности отрицательно,

$$\mathbf{M}\{\Delta V(u(t))_{(3)}\} < 0,$$

— приходим к утверждению теоремы.

Запись матричного уравнения для моментов (5) в векторно-матричной форме (6) позволяет сформулировать еще один алгебраический коэффициентный критерий асимптотической устойчивости в среднем квадратичном.

**Теорема 3** (второй алгебраический коэффициентный критерий). *Для асимптотической устойчивости тривиального решения* $q(t) = 0$ *системы* (6) (*и следовательно, асимптотической устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения* $x = 0$ *системы* (1)) *необходимо и достаточно, чтобы существовала положительно определенная матрица* $H \in \mathbb{R}^{n^2(m+1)^2\times n^2(m+1)^2}$ *— решение дискретного матричного алгебраического уравнения Ляпунова*

$$H - \mathcal{A}^T H \mathcal{A} = E. \tag{10}$$

***Доказательство*** теоремы 3 очевидно и осуществляется с помощью $n^4(m + 1)^4$-параметрической функции Ляпунова вида квадратичной формы

$$V(q(t)) = q^T(t) H q(t), \quad H \in \mathbb{R}^{n^2(m+1)^2 \times n^2(m+1)^2}. \tag{11}$$

**5. Достаточные алгебраические коэффициентные условия.** Побудительным мотивом для поиска достаточных условий устойчивости является вид сформулированных выше алгебраических коэффициентных критериев. Так как в систему уравнений (1) входят матрицы размера $n \times n$, а соответствующие расширенной системе (3) матричное уравнение Сильвестра (8) и матричное уравнение Ляпунова (10), доставляющие критерии асимптотической устойчивости в среднем квадратичном, содержат матрицы размера $n(m+1) \times n(m+1)$ и $n^2(m+1)^2 \times n^2(m+1)^2$ соответственно, то расширение исходного фазового пространства хотя и конструктивный, однако не самый экономичный (в смысле объема вычислений) способ исследования устойчивости.

Поэтому весьма желательно получить хотя и достаточные алгебраические коэффициентные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения системы (1), но такие, которые представлялись бы алгебраически через коэффициенты системы и вместе с тем позволяли иметь дело непосредственно с описывающими систему (1) матрицами $A_j$, $B_j$, $j = 0, 1, \ldots, m$, и с уравнениями Сильвестра с матричными коэффициентами размера $n \times n$. Решение данной задачи упростит (по сравнению с критериями) проверку асимптотической устойчивости в среднем квадратичном решений системы (1). Результат такого исследования излагается ниже.

Для получения достаточных условий будем использовать метод функций Ляпунова. Построим для системы (1) функцию Ляпунова $V(x(t))$ в виде линейной комбинации $m+1$ квадратичных форм переменных $x(t)$ и $x(t-\tau_j)$, $j = 1, \ldots, m$,

$$V(x(t)) = x^T(t) H x(t) + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j x^T(t-\tau_j) H x(t-\tau_j), \tag{12}$$

с неизвестными пока что постоянной положительно определенной матрицей $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(H = H^T > 0)$ и числами (весовыми коэффициентами) $\gamma_j$, $j = 1, \ldots, m$. Если нам удастся найти уравнения или неравенства, из которых можно однозначно найти матрицу $H > 0$ и числа $\gamma_j$, то тем самым выбор функции Ляпунова в форме (12) оправдан. Далее в ходе построения функции Ляпунова будет установлено, что для того, чтобы функция (12) была положительно определенной на решениях $x(t)$ системы (1) и математическое ожидание ее первой разности $\Delta V(x(t)) = V(x(t+\tau_0)) - V(x(t))$ на этих решениях было отрицательной величиной (другими словами, чтобы $V$ была функцией Ляпунова для системы (1)), искомая матрица $H$ должна определяться из уравнения Сильвестра с матричными коэффициентами $A_0$, $B_0$, а числа $\gamma_j$, $j = 1, \ldots, m$, должны быть положительными и меньше единицы, образуя при этом последовательность

$$0 < \gamma_m < \ldots < \gamma_2 < \gamma_1 < 1. \tag{13}$$

Функция Ляпунова (12), как видно их ее структуры, является $(n^2 + m)$-параметрической ($n^2$ элементов матрицы $H$ и числа $\gamma_j$, $j = 1, \ldots, m$).

В соответствии с методом функций Ляпунова исследования устойчивости в среднем квадратичном решений разностных уравнений вычислим первую разность $\Delta V$ функции $V$ (12) на решениях системы (1) и ее математическое ожидание $\mathbf{M}\{\Delta V\}$. Имеем

$$\{\Delta V(x(t))\}_{(1)} = \{V(x(t+\tau_0)) - V(x(t))\}_{(1)} =$$

$$= \left\{x^T(t+\tau_0)Hx(t+\tau_0) + \sum_{j=1}^{m}\gamma_j x^T(t-(j-1)\tau_0)Hx(t-(j-1)\tau_0)\right\}_{(1)} -$$

$$- x^T(t)Hx(t) - \sum_{j=1}^{m}\gamma_j x^T(t-j\tau_0)Hx(t-j\tau_0) =$$

$$= \left\{[A_0 + B_0\xi(t)]x(t) + \sum_{j=1}^{m}[A_j + B_j\xi(t)]x(t-j\tau_0)\right\}^T H \times$$

$$\times \left\{[A_0 + B_0\xi(t)]x(t) + \sum_{j=1}^{m}[A_j + B_j\xi(t)]x(t-j\tau_0)\right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}\gamma_j x^T(t-(j-1)\tau_0)Hx(t-(j-1)\tau_0) -$$

$$- x^T(t)Hx(t) - \sum_{j=1}^{m}\gamma_j x^T(t-j\tau_0)Hx(t-j\tau_0) =$$

$$= x^T(t)\left\{[A_0^T + B_0^T\xi(t)]H[A_0 + B_0\xi(t)] - H\right\}x(t) +$$

$$+ x^T(t)[A_0^T + B_0^T\xi(t)]H\sum_{j=1}^{m}[A_j + B_j\xi(t)]x(t-j\tau_0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}x^T(t-j\tau_0)[A_j^T + B_j^T\xi(t)]H[A_0 + B_0\xi(t)]x(t) +$$

$$+ \left\{\sum_{j=1}^{m}x^T(t-j\tau_0)[A_j^T + B_j^T\xi(t)]\right\}H\left\{\sum_{j=1}^{m}[A_j + B_j\xi(t)]x(t-j\tau_0)\right\} -$$

$$- \sum_{j=1}^{m}\gamma_j x^T(t-j\tau_0)Hx(t-j\tau_0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}\gamma_j x^T(t-(j-1)\tau_0)Hx(t-(j-1)\tau_0). \tag{14}$$

Тогда для математического ожидания первой разности получаем следующее представление:

$$\mathbf{M}\{\Delta V(x(t))\}_{(1)} = \mathbf{M}\left\{x^T(t)(A_0^T HA_0 + B_0^T HB_0 - H + \gamma_1 H)x(t) +\right.$$

$$+ x^T(t)A_0^T H\sum_{j=1}^{m}A_j x(t-j\tau_0) + \sum_{j=1}^{m}x^T(t-j\tau_0)A_j^T HA_0x(t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} x^T(t-j\tau_0)\left[A_j^T H A_j + B_j^T H B_j - (\gamma_j - \gamma_{j+1})H\right] x(t-j\tau_0) +$$

$$+ x^T(t-m\tau_0)\left[A_m^T H A_m + B_m^T H B_m - \gamma_m H\right] x(t-m\tau_0) +$$

$$\left. + \sum_{i,j=1;\, i\neq j}^{m} x^T(t-i\tau_0)\, A_i^T H A_j\, x(t-j\tau_0) \right\}. \tag{15}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части (15), можно рассматривать как квадратичную форму переменных $x(t)$, $x(t-\tau_0)$, ... , $x(t-m\tau_0)$. Тогда (15) можно представить в матричном виде

$$\mathbf{M}\{\Delta V(x(t))\}_{(1)} = \mathbf{M}\left\{\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_0) \\ \vdots \\ x(t-m\tau_0) \end{bmatrix}^T G \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_0) \\ \vdots \\ x(t-m\tau_0) \end{bmatrix}\right\}, \tag{16}$$

где через $G$ обозначена блочная матрица

$$G = \left[\begin{array}{c|c|c} A_0^T H A_0 + B_0^T H B_0 - (1-\gamma_1)H & A_0^T H A_1 & \ldots \\ A_1^T H A_0 & A_1^T H A_1 + B_1^T H B_1 - (\gamma_1-\gamma_2)H & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m-1}^T H A_0 & A_{m-1}^T H A_1 & \ldots \\ A_m^T H A_0 & A_m^T H A_1 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c|c|c} \ldots & A_0^T H A_{m-1} & A_0^T H A_m \\ \ldots & A_1^T H A_{m-1} & A_1^T H A_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & A_{m-1}^T H A_{m-1} + B_{m-1}^T H B_{m-1} - (\gamma_{m-1}-\gamma_m)H & A_{m-1}^T H A_m \\ \ldots & A_m^T H A_{m-1} & A_m^T H A_m + B_m^T H B_m - \gamma_m H \end{array}\right]. \tag{17}$$

Математическое ожидание (17) отрицательно лишь в случае, когда квадратичная форма, стоящая в (17) под знаком математического ожидания справа, на решениях $x(t)$ системы (1) отрицательно определенная; другими словами, когда отрицательно определена матрица $G$, $G = G^T < 0$.

Необходимым условием того, что матрица $G < 0$, является отрицательная определенность матричных блоков, стоящих на ее главной диагонали,

$$\begin{gathered} A_0^T H A_0 + B_0^T H B_0 - (1-\gamma_1)H < 0, \\ A_1^T H A_1 + B_1^T H B_1 - (\gamma_1-\gamma_2)H < 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m-1}^T H A_{m-1} + B_{m-1}^T H B_{m-1} - (\gamma_{m-1}-\gamma_m) H < 0, \\ A_m^T H A_m + B_m^T H B_m - \gamma_m H < 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Так как по определению $H > 0$, из (18) следует, что коэффициенты $\gamma_j$, $j = 1, \ldots, m$, должны удовлетворять условию $1 - \gamma_1 > 0$, $\gamma_1 - \gamma_2 > 0$, ...

$=1, \ldots, m$, должны удовлетворять условию $1-\gamma_1 > 0$, $\gamma_1 - \gamma_2 > 0$, … …, $\gamma_{m-1} - \gamma_m > 0$, $\gamma_m > 0$ или, что то же самое, условию (13). Далее, симметричная блок-матрица $A_0^T H A_0 + B_0^T H B_0 - (1-\gamma_1) H$, стоящая на главной диагонали матрицы $G$ в левом верхнем углу и соответствующая основной фазовой переменной $x(t)$ системы (1), лишь тогда отрицательно определена, когда существует положительно определенное решение $H > 0$ матричного уравнения Сильвестра

$$A_0^T H A_0 + B_0^T H B_0 - (1-\gamma_1) H = -E. \tag{19}$$

Вид матричного уравнения (19) и ограничение на $\gamma_1$ (13) приводят к заключению, что матрица $A_0$ должна быть сходящейся (модули ее собственных значений меньше единицы) с некоторым запасом сходимости $\rho$ $(0 < \rho < 1)$ [5]; это приводит к неравенствам

$$1 - \rho^2 < \gamma_1 < 1. \tag{20}$$

Соотношение (19) при выбранном согласно (13) и (20) $\gamma_1$ служит уравнением для определения неизвестной матрицы $H$, входящей в функцию Ляпунова (12).

Итак, используя функцию Ляпунова (12), мы получим следующее утверждение.

**Теорема 4** (достаточные алгебраические коэффициентные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратичном). *Тривиальное решение* $x = 0$ *системы уравнений* (1) *асимптотически устойчиво в среднем квадратичном, если выполнены следующие условия*:

1) *матрица* $A_0$ — *сходящаяся с некоторым запасом сходимости* $\rho$, $0 < < \rho < 1$;

2) *существует положительно определенное решение* $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(H = H^T > > 0)$ *матричного уравнения Сильвестра* (19), *в котором произвольно выбираемое число* $\gamma_1$ *удовлетворяет условию* (20);

3) *выполняется матричное неравенство* $G < 0$, *в котором последовательность произвольно выбираемых положительных чисел* $\gamma_j$ *удовлетворяют соотношению* (13).

***Замечания.* 1.** Нетрудно заметить, что при отсутствии случайных возмущений коэффициентов $(B_j = 0,\ j = 0, 1, \ldots, m)$ из теоремы 4 следуют достаточные условия асимптотической устойчивости для системы детерминированных линейных разностных уравнений с непрерывным временем [2].

**2.** Из теоремы 4 видно, что главный вклад в свойство асимптотической устойчивости решений системы (1) вносит матрица $A_0$, стоящая в (1) при основной фазовой координате $x(t)$. От нее требуется не просто сходимость, но сходимость с „запасом"; она же определяет через уравнение Сильвестра (19) и главный член $x^T(t) H x(t)$ функции Ляпунова (12). Дополнительные исследования показывают, что с учетом этого область асимптотической устойчивости в пространстве коэффициентов, доставляемую теоремой 4, можно расширить, если в системе строгих неравенств (18) неравенства, начиная со второго, заменить на нестрогие неравенства $(\le)$ и от всей матрицы $G$ требовать отрицательную определенность только на главной фазовой координате $x(t)$ и неположительную определенность на совокупности фазовых координат $x(t)$, $x(t - -\tau_1)$, …, $x(t-\tau_m)$.

**3.** Возможем еще один путь расширить в пространстве коэффициентов системы (1) область достаточных условий асимптотической устойчивости в среднем квадратичном по сравнению с областью, определяемой теоремой 4, отличающийся от пути из замечания 2. Он связан с построением функции Ляпунова $V$, имеющей в своей конструкции более, чем $(n^2 + m)$ свободных параметров. Такой функцией является, например, $n^2(m+1)$-параметрическая комбинация квадратичных форм

$$V = x^T(t) H x(t) + \sum_{j=1}^{m} x^T(t-\tau_j) H_j x(t-\tau_j),$$

где $H$, $H_j$ — неизвестные положительно определенные матрицы, подлежащие определению из системы рекуррентных матричных уравнений Сильвестра

$$A_j^T H_j A_j + B_j^T H B_j - H_j + H_{j+1} = -E, \quad j = 1, \ldots, m-1.$$

Однако объем вычислений для оценки устойчивости при этом существенно увеличивается по сравнению с объемом вычислений в теореме 4 и, кроме того, появляется неоднозначность в определении матрицы $H_j$.


1. *Кореневский Д. Г.* К асимптотической устойчивости решений систем линейных детерминированных и стохастических стационарных разностных уравнений с запаздыванием // Докл. АН СССР. – 1992. – **322**, № 2. – С. 219–223.
2. *Кореневский Д. Г., Кайзер К.* Коэффициентные условия асимптотической устойчивости решений систем линейных разностных уравнений с непрерывным временем и запаздыванием // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 4. – С. 516–522.
3. *Жабко А. П., Харитонов В. Л.* Методы линейной алгебры в задачах управления. – СПб.: СПб. ун-т, 1993. – 320 с.
4. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
5. *Кореневский Д. Г.* Алгебраический коэффициентный критерий сходимости „с запасом" (экспоненциальной устойчивости) решений линейных стационарных разностных уравнений // Докл. АН СССР. – 1990. – **313**, № 6. – С. 1320–1323.


Получено 03.06.97