УДК 519.21

М. В. Працьовитий (Нац. пед. ун-т, Київ)

ПРО СКІНЧЕННІ ЗГОРТКИ СИНГУЛЯРНИХ РОЗПОДІЛІВ ТА „СИНГУЛЯРНИЙ АНАЛОГ" ТЕОРЕМИ ДЖЕССЕНА – ВІНТНЕРА *

Fractal properties of convolution of two Cantor's distributions are studied. By using the method of characteristic functions, sufficient conditions of the singularity are found for a convolution of an arbitrary finite number of distributions of random variables with independent s-adic digits. The hypothesis on validity of a „singular analog" of the Jessen–Wintner theorem for anomalously fractal distributions is refuted.

Вивчаються фрактальні властивості згортки двох канторівських розподілів. За допомогою методу характеристичних функцій знайдено достатні умови сингулярності згортки довільної скінченної кількості розподілів випадкових величин незалежними s-адичними цифрами. Спростовано гіпотезу про справедливість „сингулярного аналога" теореми Джессена – Вінтнера для аномально фрактальних розподілів.

1. Якщо $\xi^{(1)}$ і $\xi^{(2)}$ — незалежні випадкові величини (в. в.), а F_1 і F_2 — їх функції розподілу (ф. р.), то ф. р. F, яка відповідає в. в. $\xi = \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$, є згорткою ф. р. F_1 і F_2, тобто

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(z-x)\,dF_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(z-x)\,dF_1(x) \equiv (F_1 * F_2)(z). \qquad (1)$$

Відомо [1, 2], що ξ має: *дискретний розподіл*, якщо $\xi^{(1)}$ і $\xi^{(2)}$ — дискретні; *сингулярний*, якщо один доданок сингулярний, а інший дискретний, *абсолютно неперервний*, якщо хоча б один з доданків має абсолютно неперервний розподіл. У випадку сингулярності обох доданків сума може мати і сингулярний розподіл, і абсолютно неперервний, і може бути сумішшю двох попередніх; при цьому рівністю (1) практично важко скористатися. Задача знаходження необхідних та достатніх умов абсолютної неперервності (сингулярності) згортки двох сингулярних розподілів у загальній постановці є складною (інтерес до неї висловлювався різними авторами [2, 3]). Якщо ж до неї додати задачу знаходження виразів ф. р. та її похідної для суми $\xi^{(1)} + \xi^{(2)}$, то проблема ще більш ускладнюється. Доцільним на цьому шляху було б розібратися в „процесі формування" носія суми $N_{\xi^{(1)}+\xi^{(2)}}$ з носіїв $N_{\xi^{(1)}}$ і $N_{\xi^{(2)}}$ (під носієм розподілу ξ розуміємо множину $N_\xi = \{x\colon F'_\xi(x) \neq 0\}$), але для цього потрібні вирази ф. р. в. в. ξ та її похідної, знаходження яких є самостійною задачею. Вивчимо детальніше один з найпростіших випадків.

Розглянемо в. в.

$$\xi = \xi^{(1)} + \xi^{(2)},$$

де $\xi^{(1)}$ і $\xi^{(2)}$ — незалежні однаково розподілені канторівські в. в., тобто

$$\xi^{(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\,\eta_k^{(i)},$$

де незалежні в. в. $\eta_k^{(i)}$, $k = 1, 2, \ldots$, однаково розподілені і набувають значень 0 і 2 з імовірностями 1/2 (можна вважати, що $\eta_k^{(i)}$ набуває значення 1 з імовірністю 0).

---

* Виконана при частковій підтримці Міжнародної соросівської програми підтримки освіти в галузі точних наук (грант № APU 061086).

Через $N_i(x, n)$ позначимо кількість цифр в трійковому розкладі x:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \alpha_k(x) = 0,\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots$$

до n-го місця включно. Якщо границя $\lim\limits_{n\to\infty} N_i(x, n)/n$ існує, то її назвемо частотою цифри i позначимо через $\nu_i(x)$. Множину точок $x \in [0; 1]$, що мають частоти цифр 0, 1 і 2 відповідно рівні ν_0, ν_1, ν_2, позначимо через $E(\nu_0, \nu_1, \nu_2)$. Якщо фіксована лише одна (або дві частоти), то на місці інших будемо робити пропуски. Наприклад, $E(-, \nu_1, -)$, $E(-, \nu_1, \nu_2)$.

Лема 1. *Для розмірності Хаусдорфа – Безиковича множини* $E(-, \nu_1, -)$ *виконується нерівність*

$$\alpha_0 [E(-, \nu_1, -)] \geq -\frac{1}{\ln 3} \ln\left[\nu_1^{\nu_1} \left(\frac{1-\nu_1}{2}\right)^{1-\nu_1}\right].$$

Доведення. Очевидно, що

$$E(-, \nu_1, -) \supset \bigcup_{0 \leq x \leq 1-\nu_1} E(x, \nu_1, 1-\nu_1-x),$$

оскільки в першу з множин входять такі x, для яких частота ν_0(і ν_2) не існує. Враховуючи властивості розмірності Хаусдорфа – Безиковича і значення розмірності множини $E(\nu_0, \nu_1, \nu_2)$, маємо

$$\alpha_0 [E(-, \nu_1, -)] \geq \alpha_0 \left[\bigcup_{0 \leq x \leq 1-\nu_1} E(x, \nu_1, 1-\nu_1-x)\right] =$$

$$= \sup_{0 \leq x \leq 1-\nu_1} \alpha_0 [E(x, \nu_1, 1-\nu_1-x)] =$$

$$= -\sup_{0 \leq x \leq 1-\nu_1} \frac{\ln\left[\nu_1^{\nu_1} x^x (1-\nu_1-x)^{1-\nu_1-x}\right]}{\ln 3} = -\frac{1}{\ln 3} \ln\left[\nu_1^{\nu_1} \left(\frac{1-\nu_1}{2}\right)^{1-\nu_1}\right].$$

Лему 1 доведено.

Зауважимо, що, як доведено в [4], множина чисел, в яких немає частоти хоча б однієї цифри, що є континуальною, має розмірність Хаусдорфа – Безиковича рівну одиниці (є суперфрактальною [5]).

Подамо ξ у вигляді

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k^{(1)} + \eta_k^{(2)}}{3^k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{3^k} = 2\xi_0,$$

де незалежні однаково розподілені в. в. η_k набувають значень 0, 1 і 2 з імовірностями $p_0 = 1/4$, $p_1 = 1/2$ і $p_2 = 1/4$ відповідно. З останньої рівності випливає, що в. в. ξ і ξ_0 мають один тип розподілу і однакові властивості (з точністю до рівномірного розтягу спектра).

Ф. р. $F(x)$ в. в. ξ_0 запишемо у вигляді

$$F(x) = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)}\right],$$

де $x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \alpha_k(x)$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1/4$, $\beta_2 = 3/4$.

Оскільки спектром розподілу $\xi^{(i)}$ є класична множина Кантора C, а спектр згортки розподілів з обмеженими спектрами рівний векторній (арифметичній) сумі спектрів, то

$$S_\xi = C \oplus C = [0; 2],$$

тобто в. в. ξ має строго зростаючу ф. р. Більше того, як відомо [1], ξ_0 має сингулярний розподіл. Отже, ξ має сингулярний розподіл салемівського типу [6].

***Зауваження* 1.** Оскільки $F(x') = 1 - F(x)$, де $x' = 1 - x$, то розподіл в. в. ξ_0, а отже, і ξ самоподібний.

Лема 2. *Якщо в точці* x *існує похідна* $F'(x)$ *ф. р. в. в.* ξ_0, *то*

$$F'(x) = f(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \left[3 p_{\alpha_j(x)} \right] = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{3}{4} \cdot 2^{\frac{N_1(x,k)}{k}} \right)^k,$$

а отже, якщо $f(x) > 0$ *або* $f(x)$ *не існує, то* x *належить носію* N_{ξ_0} *розподілу в. в.* ξ_0.

Доведення. Якщо $F'(x)$ існує, то

$$F'(x) = f(x) = \lim_{\substack{x' \le x \le x'' \\ x''-x' \to 0}} \frac{F(x'') - F(x')}{x'' - x'} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} 3^n \left[F(0,\alpha_1(x) \ldots \alpha_k(x)) - F(0,\alpha_1(x) \ldots \alpha_k(x)(2)) \right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[3^k \prod_{j=1}^{k} p_{\alpha_j(x)} \right] = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k}{2^{N_1(x,k)} \cdot 4^{k-N_1(x,k)}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^k 2^{N_1(x,k)} \right] = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{3}{4} \cdot 2^{\frac{N_1(x,k)}{k}} \right)^k.$$

Друга частина леми 2 випливає безпосередньо з означення носія. Лему 2 доведено.

Теорема 1. *Носій розподілу в. в.* ξ *не містить точок з частотою* $\nu_1 < \tau = 2 - \log_2 3$ *і містить всі точки, в яких* ν_1 *не існує або* $\nu_1 > \tau$.

Доведення. Нехай x — трійково-раціональна точка, тобто

$$x = 0,\alpha_1 \ldots \alpha_n(0) = 0,\alpha_1 \ldots (\alpha_n - 1)(2), \quad x_m \to x, \quad m \to \infty.$$

Тоді для кожного m існує $k = k(m)$ таке, що

$$\begin{aligned} &\alpha_j(x_m) = \alpha_j(x), \quad j = \overline{1, k-1}; \\ &\alpha_k(x_m) \ne \alpha_k(x), \end{aligned} \tag{2}$$

причому $x_m \to x$, $m \to \infty$, рівносильно $k \to \infty$. Тому

$$3^{-k} < x - x_m, \quad F(x) - F(x_m) < \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)}$$

і

$$\frac{F(x) - F(x_m)}{x - x_m} < 3 \prod_{j=1}^{k-1} \left[3 p_{\alpha_j(x)} \right] = \frac{1}{4} \prod_{j=1}^{n} \left[3 p_{\alpha_j(x)} \right] \left(\frac{3}{4}\right)^{k-n} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Враховуючи довільність вибору $\{x_m\}$ і зауваження 1, маємо $F'(x) = 0$ і $x \notin N_{\xi_0}$.

Нехай тепер x — трійково-ірраціональна точка, причому $\nu_1(x) = \nu_1 < \tau$, і $\{x_m\}$ — довільна послідовність така, що $x_m \to x$, $m \to \infty$, $x_m < x$. Тоді для кожного m існує $k = k(m)$ таке, що виконуються співвідношення (2). Позначимо через n ранг максимального відрізка, що міститься в $[x_m; x]$. Очевидно, що $n \ge k$. Тоді $x - x_m > 3^{-n}$.

Враховуючи, що x_m і x належать сусіднім відрізкам $(n-1)$-го рангу або одному, якщо $n=k$, маємо

$$F(x) - F(x_m) \le F(x_2) - F(x_1) = P\{\xi \in \Delta'\} + P\{\xi \in \Delta''\},$$

де x_2 — правий кінець відрізка Δ'' рангу $n-1$, що містить x, а x_1 — лівий кінець відрізка Δ', що є сусіднім з Δ''. Тому

$$\Delta' = \Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k-1}(x)(\alpha_k(x)-1)2\ldots2\alpha_{n-1}},$$

$$F(x) - F(x_n) \le \left[c_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k-1} + \prod_{j=k}^{n-1} p_{\alpha_j(x)}\right]\prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)},$$

де $c_1 = p_{\alpha_{n-1}}$. Отже,

$$\frac{F(x) - F(x_n)}{x - x_n} \le 3\left[c_1\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k-1} + \prod_{j=k}^{n-1}\left(3p_{\alpha_j(x)}\right)\right]\prod_{j=1}^{n-1}\left(3p_{\alpha_j(x)}\right) \le$$

$$\le 3\left[1 + \prod_{j=k}^{n-1}\left(3p_{\alpha_j(x)}\right)\right]\prod_{j=1}^{n-1}\left(3p_{\alpha_j(x)}\right) =$$

$$= 3\left[\frac{3}{4}\cdot 2^{\frac{N_1(x,k-1)}{k-1}}\right]^{k-1} + 3\left[\frac{3}{4}\cdot 2^{\frac{N_1(x,n-1)}{n-1}}\right]^{n-1} \to 0, \quad k \to \infty,$$

оскільки

$$\frac{3}{4}\cdot 2^{\frac{N_1(x,u)}{u}} \to \alpha < 1 \ (u \to \infty) \quad \text{при } \nu_1 < 2 - \log_2 3.$$

А це з урахуванням зауваження 1, леми 1 і довільності вибору послідовності $\{x_n\}$ означає, що $F'(x) = 0$ і $x \notin N_{\xi_0}$.

Друга частина теореми 1 випливає безпосередньо з означення носія і леми 1. Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Для розмірності Хаусдорфа – Безиковича носія розподілу в. в.* ξ *виконується нерівність*

$$\alpha_0(N_\xi) \ge -\frac{1}{\ln 3}\ln\left[\nu_1^{\nu_1}\left(\frac{1-\nu_1}{2}\right)^{1-\nu_1}\right] \tag{3}$$

де $\nu_1 = 2 - \log_2 3$.

Доведення. З леми 2 випливає, що носій N_ξ містить кожну з множин $E(-, x, -)$, де $x \ge \tau = 2 - \log_2 3$. Тому з урахуванням властивостей розмірності Хаусдорфа – Безиковича маємо

$$\alpha_0(N_\xi) \ge \alpha_0\left[\bigcup_{\tau \le x \le 1} E(-, x, -)\right] = \sup_{\tau \le x \le 1} \alpha_0(E(-, x, -)) =$$

$$= \sup \frac{\ln\left[x^x\left(\frac{1-x}{2}\right)^{1-x}\right]}{-\ln 3}.$$

А оскільки функція, що стоїть під супремумом, зростає на $(0;\ 1/3)$ і спадає на $(1/3;\ 0)$, то виконується нерівність (3). Теорему 2 доведено.

Підсумовує одержані результати наступна теорема.

Теорема 3. *Розподіл в. в.* ξ *є фрактальним самоподібним сингулярним розподілом селемівського типу.*

У випадку, коли для кожної з в. в. $\xi^{(1)}$ і $\xi^{(2)}$ трійкові цифри $\eta_k^{(i)}$, що є незалежними, набувають значень 0 і 2 з імовірностями $p_{0k}^{(i)}$ і $p_{2k}^{(i)}$ відповідно, k-та трійкова цифра η_k в. в. $\xi_0 = \xi/2$ набуває значень 0, 1 і 2 з імовірностями

$$p_{0k} = p_{0k}^{(1)} p_{0k}^{(2)}, \quad p_{1k} = p_{0k}^{(1)} p_{2k}^{(2)} + p_{2k}^{(1)} p_{0k}^{(2)}, \quad p_{2k} = p_{2k}^{(1)} p_{2k}^{(2)},$$

за якими з'ясовується питання про тип розподілу ξ_0, а отже, і ξ, за допомогою теорем 5.28 і 5.29 з роботи [1]. Легко бачити, що він не може бути абсолютно неперервним.

2. Теорема 4. *Якщо* $\xi^{(j)} = \sum_{k=1}^{\infty} s^{-k} \eta_k^{(i)}$, $2 \le s \in \mathbb{N}$, *— в. в., зображена s-адичним дробом, s-адичні цифри* $\eta_k^{(j)}$ *якого є незалежними в. в., що набувають значень* $0, 1, \ldots, s-1$ *з імовірностями* $p_0^{(j)}, \ldots, p_{s-1}^{(j)}$ *відповідно, причому*

$$\sum_{n=0}^{s-1} p_n^{(j)} \cos\frac{2\pi n}{s^k} \ne 0 \text{ або } \sum_{n=0}^{s-1} p_n^{(j)} \sin\frac{2\pi n}{s^k} \ne 0 \qquad (4)$$

для всіх j *і* k, *що задовольняють* $2(s-1) > s^k$, *то в. в.* $\xi = \sum_{i=1}^{m} \xi^{(j)}$, *де* $\xi^{(j)}$ *— незалежні, а* m *— довільне натуральне число, має сингулярний розподіл.*

Доведення. Як доведено в [7], при виконанні умов (4) характеристична функція $f_j(t)$ в. в. $\xi^{(j)}$ має властивість

$$L_{f_j} \equiv \limsup_{|t|\to\infty} |f_j(t)| \ge |f_j(2\pi)| = c_j > 0.$$

Оскільки $f_j(2\pi) = f(2\pi s^n)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, то для характеристичної функції $f(t)$ в. в. ξ виконується

$$L_f \equiv \limsup_{|t|\to\infty} |f(t)| = \prod_{j=1}^{m} L_{f_j} \ge \prod_{j=1}^{m} c_j > 0,$$

що з урахуванням чистоти розподілу ξ (це випливає з теореми Джессена – Вінтнера [2]) приводить до висновку про сингулярність розподілу ξ. Теорему 4 доведено.

3. Теореми типу Джессена – Вінтнера, які стверджують чистоту розподілу з деякого класу, є корисним інструментом при дослідженні структури розподілів. Побажання отримати подібне твердження для нескінченних згорток сингулярних розподілів неодноразово висловлювалось В. М. Золотарьовим [2, 3], який запропонував два гіпотетичних варіанти „сингулярного аналога" теореми Джессена – Вінтнера.

В коментарях перекладача [2, с. 396] наводиться такий **варіант**:

Нехай $F_1(x)$, $F_2(x)$, … *– деяка послідовність сингулярних ф. р., які мають дві властивості: а) при довільному скінченному значенні* n *згортка* $F_1 * F_2 * \ldots * F_n$ *є сингулярною ф. р.; б) нескінченна згортка всіх ф. р. послідовності збігається до деякої ф. р.* $F_\xi = F_1 * F_2 * \ldots$. *Тоді* F_ξ *є або чисто сингулярною або ж чисто абсолютно неперервною ф. р.*

Початковий варіант, який наведено в роботі [3, с. 723], містив більш жорстку умову: a_1) *для будь-яких наборів натуральних чисел* $k_1, k_2, \ldots, k_m, i_1, i_2, \ldots, i_m$, $m = 1, 2, \ldots$, *згортка*

$$\left(F_{i_1}^{k_1 *}\right) * \left(F_{i_2}^{k_2 *}\right) * \ldots * \left(F_{i_m}^{k_m *}\right)$$

є чисто сингулярною функцією розподілу.

Але справедливість цих тверджень була спростована контрприкладами [8]. Розглянемо один із них, який спростовує обидва варіанти.

Нехай розбиття множини натуральних чисел $\mathbb{N} = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ має властивості:

1) для кожного n A_n містить нескінченну кількість елементів;

2) для кожного m множина $B_m = \bigcup_{n=0}^{m} A_n$ має властивість

$$\lim_{s \to \infty} \left(b_{s+1}^{(m)} - b_s^{(m)} \right) = \infty, \tag{5}$$

де $b_s^{(m)}$ — елементи множини B_m, впорядковані за зростанням. Зауважимо, що такі розбиття існують, наприклад:

$$A_n = \{ a : a = (2n+1)\, 2^s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \}.$$

Розглянемо

$$\nu_i = \sum_{k \in A_i} 2^{-k} \eta_k, \quad i = 0, 1, \qquad \xi_j = \sum_{k \in A_j} 2^{-k} \eta_k, \quad j \geq 0, \tag{6}$$

де η_k — незалежні бернуллівські в. в., тобто такі, що

$$P\{\eta_k = 0\} = P\{\eta_k = 1\} = \frac{1}{2}.$$

Покладемо

$$\xi_1 = \eta_0 \nu_0 + (1 - \eta_0)(\nu_0 + \nu_1). \tag{7}$$

Тоді в. в. $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots$ має розподіл, що є сумішшю абсолютно неперервного і сингулярного розподілів, оскільки в. в.

$$\nu_0 + \nu_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \eta_k$$

має рівномірний розподіл на $[0; 1]$, а в. в.

$$\nu_0 + \sum_{i=2}^{\infty} \xi_i = \sum_{k \in N \setminus A_1} 2^{-k} \eta_k$$

розподілена сингулярно, тоді як ф. р. в. в. ξ задовольняє умови a_1) і б).

Зауважимо, що умови a) і a_1) повинні були наблизити сингулярні ф. р. до дискретних ф. р., але вони виявились недостатніми для цього. Посилити умову a) можна за рахунок розгляду аномально фрактальних розподілів [5], адже останні „близькі" до дискретних в тому розумінні, що сконцентровані на досить „бідних", хоча і континуальних, множинах і довільна скінченна їх згортка має аномально фрактальний сингулярний розподіл, тобто є такою ж. Ці аргументи дозволили висунути такий гіпотетичний варіант „сингулярного аналога" теореми Джессена – Вінтнера:

Якщо $F_1, F_2, \ldots$ *— послідовність функцій зовнішньо аномально фрактальних розподілів така, що нескінченна згортка всіх ф. р. збігається до деякої ф. р.* $F = F_1 * F_2 * \ldots$, *то* F *є функцією чисто сингулярною або чисто абсолютно неперервною.*

Але наведений вище приклад відкидає і це припущення. Щоб переконатися в цьому, досить довести, що розподіл кожної з в. в. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$, є аномально фрактальним.

Теорема 5. *Кожна з в. в.* ξ_j, $j \in N$, *означених рівностями* (6) *і* (7), *має зовнішньо аномально фрактальний розподіл.*

Доведення. З умови (5) випливає

$$\lim_{k \to \infty} \left[a_{k+1}^{(j)} - a_k^{(j)} \right] = \infty, \tag{8}$$

де $a_k^{(j)}$ — елементи множини A_j, впорядковані за зростанням. Спектром розподілу в. в. ξ_j є множина точок відрізка [0; 1], які в своєму двійковому розкладі на місцях, номери яких належать послідовності $\left\{a_k^{(j)}\right\}$, мають цифри 0 або 1, а на решті місць — нулі, тобто

$$S_{\xi_j} = \left\{x: \quad x = \sum_{k \in A_j} 2^{-k} \alpha_k, \quad \alpha_k \in \{0; 2\}\right\}.$$

Якщо позначити через γ_i довжину i-ї серії місць, на яких може стояти як нуль, так і одиниця, а через c_i — довжину i-ї серії нулів, то, як доведено в [5], в разі існування границі $\lim\limits_{i\to\infty} c_i \gamma_i^{-1}$ розмірність Хаусдорфа – Безиковича

$$\alpha_0\left(S_{\xi_j}\right) = \left[1 + \lim_{i\to\infty} \frac{c_i}{\gamma_i}\right]^{-1}. \tag{9}$$

Але з означення ξ_j і умови (9) випливає $\lim\limits_{i\to\infty} c_i \gamma_i^{-1} = \infty$. Тому $\alpha_0\left(S_{\xi_j}\right) = 0$, $j \geq 2$, тобто розподіл ξ_j є аномально фрактальним.

Розглянемо тепер розподіл ξ_1. Якщо в. в. η_0 набуває значення 0, то ξ_1 набуває значень з множини

$$D = \left\{x: \quad x = \sum_{k \in A_0 \cup A_1} 2^{-k} \alpha_k, \quad \alpha_k \in \{0; 2\}\right\}.$$

Якщо ж η_0 набуває значення 1, то в. в. ξ_1 набуває значень з множини

$$D_0 = \left\{x: \quad x = \sum_{k \in A_0} 2^{-k} \alpha_k, \quad \alpha_k \in \{0; 2\}\right\} \subset D.$$

Тому ξ_1 набуває значень з множини D, а точніше $S_{\xi_1} = D$. Враховуючи (5) для B_1 і наведені вище аргументи, маємо $\alpha_0\left(S_{\xi_1}\right) = 0$, тобто і ξ має аномально фрактальний розподіл. Теорему 5 доведено.

***Наслідок**. Якщо F_i — аномально фрактальні сингулярні розподіли, то збіжна нескінченна їх згортка $F = \prod_{i=1}^{\infty *} F_i$, взагалі кажучи, не має чистого розподілу.*

1. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
2. *Лукач А. Ф.* Характеристические функции.– М.: Наука, 1979. – 424 с.
3. *Золотарев В. М., Круглов В. М.* Структура безграничио делимых распределений на локально бикомпактной абелевой группе // Теория вероятностей и ее применения.– 1975. – **20**, № 4. – С. 712–724.
4. *Працьовитий М. В., Торбін Г.М.* Суперфрактальність множини чисел, які не мають частоти n-адичних знаків, та фрактальні розподіли ймовірностей // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 7. – С. 971–975.
5. *Pratsevytyi N. V.* Fractal, superfractal and anomalously fractal distributions of random variables with independent n-adic digits, an infinite set of which is fixed // Exploring stochastic laws. Festschrift in Honor of 70-th Birthday of Acad. V.S. Koroljuk. – 1995. – P. 409–416.
6. *Працевитый Н. В.* Классификация сингулярных распределений в зависимости от свойств спектра // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 77– 83.
7. *Працьовитий М. В.* Розподіли сум випадкових степеневих рядів // Допов. НАН України. – 1996. – №5. – С. 32–37.
8. *Витишин Я. Ф., Морока В. А.* О свертках сингулярных функций распределения и аналогах теоремы Джессена – Винтнера // Случайные процессы и бесконечномерный анализ: сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 9–18.

Одержано 28.07.97