УДК 517.5

А. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ $B^r_{p,\theta}$ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ L_q

We obtain exact with respect to order estimates of trigonometric widths from the Besov classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic multivariate functions in the space L_q for $1 \le p \le 2 < q < p/(p-1)$.

Одержані точні за порядком оцінки тригонометричних поперечників класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q при $1 \le p \le 2 < q < p/(p-1)$.

В работе [1] при исследовании колмогоровских поперечников классов $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_q установлено, что в двух случаях: а) $1 \le p \le 2 < q < \infty$; б) $2 \le \le p < q < \infty$ подпространство тригонометрических полиномов с „номерами" гармоник из ступенчатых гиперболических крестов не реализует порядки этих поперечников. В связи с этим обстоятельством возникает следующий вопрос: можно ли выбрать M экспонент $\{ e^{i(k^j, x)} \}_{j=1}^M$, $(k^j, x) = k_1^j x_1 + \ldots + k_m^j x_m$, так, чтобы натянутое на них подпространство реализовало бы порядки колмогоровских поперечников $d_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ в случаях а) и б)? Частично ответ на этот вопрос получен в настоящей работе при исследовании тригонометрического поперечника классов $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_q. Напомним, что понятие тригонометрического поперечника было введено в [2] и будет воспроизведено ниже.

Приведем некоторые обозначения и известные утверждения, которые используются в дальнейшем.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $\pi_m = \prod_{j=1}^m [-\pi; \pi]$ — m-мерный куб; $L_p(\pi_m)$, $1 \le \le p \le \infty$, — множество функций, 2π-периодических по каждой переменной, таких, что

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-m} \int_{\pi_m} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \qquad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(x)| < \infty, \qquad p = \infty.$$

В дальнейшем предполагаем, что для функций $f(x) \in L_p(\pi_m)$ выполнено условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \qquad j = \overline{1, m}.$$

Пусть $k = (k_1, \ldots, k_m)$, k_j — целые числа, $s = (s_1, \ldots, s_m)$, s_j — натуральные числа, $j = \overline{1, m}$. Обозначим $\rho(s) = \{ k = (k_1, \ldots, k_m)\colon 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1, m} \}$ и положим

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

где

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{\pi_m} f(t) e^{-i(k,t)}\, dt$$

— коэффициенты Фурье $f(x)$.

Для вектора $n = (n_1, \ldots, n_m)$, n_j — целые неотрицательные числа, $j = \overline{1, m}$, через $T(n)$ обозначим множество полиномов вида

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le n_j} c_k e^{i(k,x)}.$$

Тогда для $t(x) \in T(n)$, $1 \le q \le p \le \infty$, выполняется неравенство [3]

$$\| t(x) \|_p \le 2^m \prod_{j=1}^{m} n_j^{1/q - 1/p} \| t(x) \|_q, \tag{1}$$

которое называют неравенством разных метрик С. М. Никольского. Важную роль в наших последующих рассуждениях будет играть следующее утверждение (см., например, [4, с. 65]).

Теорема А. *Пусть задано* $p \in (1, \infty)$. *Существуют положительные числа* C_1 *и* C_2 *такие, что для каждой функции* $f \in L_p(\pi_m)$ *справедлива оценка*

$$C_1 \| f \|_p \le \left\| \left\{ \sum_s |\delta_s(f, x)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \le C_2 \| f \|_p.$$

Отметим, что эта теорема является обобщением на многомерный случай теоремы Литтлвуда – Пэли (см. [5], гл. 15).

Напомним определение классов $B^r_{p,\theta}$, которые будут рассматриваться в работе.

Пусть $V_l(t)$, $l \in N$, обозначает ядро Валле Пуссена порядка $2l - 1$:

$$V_l(t) = \sum_{k=1}^{l} \cos kt + \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k - l}{l} \right) \cos kt.$$

Каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_m)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1, m}$, поставим в соответствие полиномы

$$A_s(x) = 2^m \prod_{j=1}^{m} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \right),$$

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x),$$

где „$*$“ обозначает операцию свертки.

Тогда (см., например, [4, с. 69]) для $1 \le p \le \infty$ и $r = (r_1, \ldots, r_m)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, классы $B^r_{p,\theta}$ определяются следующим образом:

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(x) \;\middle|\; \| f \|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \| A_s(f, x) \|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}$$

при $1 \le \theta < \infty$ и

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(x) \;\middle|\; \| f \|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \| A_s(f, x) \|_p \le 1 \right\}.$$

Отметим, что при $\theta = \infty$ классы $B^r_{p,\theta}$ совпадают с классами H^r_p (см., например, [6, с. 31]), т. е. $B^r_{p,\infty} = H^r_p$. Кроме того, при определенных соотношениях параметров p и θ между классами $B^r_{p,\theta}$ и $W^r_{p,\alpha}$ имеют место вложения. (Определение классов $W^r_{p,\alpha}$ см., например, в [5, с. 31].)

Всюду ниже, не умаляя общности, предполагаем, что координаты вектора $r = (r_1, \ldots, r_m)$ упорядочены в виде $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_m$. Через $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ и $\gamma' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_m)$ обозначим два вектора с координатами $\gamma_j = r_j / r_1$, $j = \overline{1, m}$, $\gamma'_j = \gamma_j$ при $j = \overline{1, \nu}$ и $\gamma_{j-1} < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1, m}$.

Пусть F — некоторый функциональный класс. Тогда тригонометрический поперечник класса F в пространстве L_q (обозначается через $\mathrm{d}^T_M(F, L_q)$) определяется следующим образом

$$\mathrm{d}^T_M(F, L_q) = \inf_{\Omega_M} \sup_{f \in F} \inf_{t(\Omega_M; x)} \|f(x) - t(\Omega_M; x)\|_q, \tag{2}$$

где

$$t(\Omega_M; x) = \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j, x)},$$

$\Omega_M = \{k^1, \ldots, k^M\}$ — набор векторов $k^j = (k^j_1, \ldots, k^j_m)$, $j = \overline{1, M}$, из целочисленной решетки Z^m.

Полученные ниже результаты формулируем в виде порядковых соотношений. При этом функции $\mu_1(N)$ и $\mu_2(N)$ называем функциями одного порядка и пишем $\mu_1 \asymp \mu_2$, если существует константа N_0 такая, что при $N > N_0$ $C_1 \mu_1(N) \le \mu_2(N) \le C_2 \mu_1(N)$. Если же $\mu_1(N) \le C_1 \mu_2(N)$ или $\mu_2(N) \le C_2 \mu_1(N)$, то пишем $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_2 \ll \mu_1$ соответственно. Постоянные C_1 и C_2 могут зависеть только от параметров, которые входят в определение классов, метрики, в которой измеряется погрешность приближения, и размерности пространства R^m.

1. Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $1 \le p \le 2 < q < p/(p-1)$, $r_1 > 1$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$\mathrm{d}^T_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - 1/p + 1/2} (\log^{\nu-1} M)^{(1/2 - 1/\theta)_+}, \tag{3}$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доказательство. Оценка снизу в (3) следует из теоремы 2 [1, с. 672] согласно неравенству $\mathrm{d}^T_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \ge \mathrm{d}_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$. При установлении оценки сверху будем пользоваться следующим утверждением [7].

Лемма 1. *Пусть* $2 \le q < \infty$, $\Omega_M = \{k^j\}_{j=1}^M \subset Z^m$. *Тогда для любого тригонометрического полинома*

$$P(\Omega_M; x) = \sum_{j=1}^{M} e^{i(k^j, x)}$$

и любого $N \le M$ *найдется тригонометрический полином* $P(\Omega_N; x)$, *содержащий не более* N *гармоник и такой, что*

$$\| P(\Omega_M; x) - P(\Omega_N; x)\|_q \ll M N^{-1/2},$$

причем $\Omega_N \subset \Omega_M$, *все коэффициенты* $P(\Omega_M; x)$ *одинаковы и не превышают* $M N^{-1}$.

Итак, по заданному числу M подберем такое натуральное число l, чтобы выполнялось соотношение $2^l l^{\nu-1} \asymp M$ и $2^l l^{\nu-1} \ge 2M$. Затем каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_m)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1, m}$, удовлетворяющему условию $l \le (s, \gamma') < \alpha l$, $\alpha = (r_1 - 1/p + 1/2)/(r_1 - 1/p + 1/q)$, поставим в соответствие число

$$N_s = [2^{l r_1} 2^{(s,\gamma)(1-r_1)}]. \tag{4}$$

Легко проверить, что для чисел N_s, $l \le (s, \gamma') < \alpha l$ выполнено порядковое неравенство

$$\sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} N_s \ll M.$$

Действительно, согласно соотношению [6, с. 11]

$$\sum_{(s,\gamma') \ge l} 2^{-\delta(s,\gamma)} \asymp 2^{-\delta l} l^{(\nu-1)}, \quad \delta > 0, \tag{5}$$

имеем

$$\sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} N_s \ll 2^{l r_1} \sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} 2^{-(s,\gamma)(r_1-1)} \ll$$

$$\ll 2^{l r_1} 2^{-l(r_1-1)} l^{\nu-1} = 2^l l^{\nu-1} \asymp M.$$

Далее, пусть $t(\Omega_{N_s}; x)$ — тригонометрический полином, приближающий „блок" $t_s(x) = \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)}$ согласно лемме 1, т. е.

$$\| t_s(x) - t(\Omega_{N_s}; x) \|_q \ll 2^{(s,1)} N_s^{-1/2};$$

при этом $\Omega_{N_s} \subset \rho(s)$ и все коэффициенты полинома $t(\Omega_{N_s}; x)$ одинаковы. Покажем, что подпространство тригонометрических полиномов с „номерами" гармоник из объединения множеств $Q_l^{\gamma'} = \bigcup_{(s,\gamma') < l} \rho(s)$ и $P_l^{\gamma'} = \bigcup_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} \Omega_{N_s}$ реализует порядок поперечника $\mathrm{d}_M^T(B_{p,\theta}^r, L_q)$. (Заметим, что, как отмечено выше, размерность этого подпространства не превышает по порядку M.)

Действительно, пусть $f(x)$ — некоторая функция из класса $B_{p,\theta}^r$. Рассмотрим полином $t(x)$ вида

$$t(x) = \sum_{(s,\gamma') < l} \delta_s(f, x) + \sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} (t(\Omega_{N_s}; x) * \delta_s(f, x)) \tag{6}$$

и получим оценку сверху величины $\| f(x) - t(x) \|_q$, $2 < q < p/(p-1)$. Принимая во внимание, что $f(x) = \sum_s \delta_s(f, x)$ и приближающий полином для функции $f(x)$ выбран в виде (6), будем иметь

$$\| f(x) - t(x) \|_q \le \left\| \sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} \delta_s(f, x) - (\delta_s(f, x) * t(\Omega_{N_s}; x)) \right\|_q +$$

$$+ \left\| \sum_{(s,\gamma') \ge \alpha l} \delta_s(f, x) \right\|_q = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2. \tag{7}$$

Проведем сначала оценку сверху слагаемого $\mathcal{J}_2$. Так, воспользовавшись теоремой А, затем неравенством Минковского и, наконец, неравенством разных метрик С. М. Никольского (1), получим

$$\mathcal{J}_2 \ll \left\| \left(\sum_{(s,\gamma')\geq\alpha l} |\delta_s(f,x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q = \left(\left\| \sum_{(s,\gamma')\geq\alpha l} |\delta_s(f,x)|^2 \right\|_{q/2} \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{(s,\gamma')\geq\alpha l} \left\| |\delta_s(f,x)|^2 \right\|_{q/2} \right)^{1/2} = \left(\sum_{(s,\gamma')\geq\alpha l} \|\delta_s(f,x)\|_q^2 \right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{(s,\gamma')\geq\alpha l} \|A_s(f,x)\|_q^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,\gamma')\geq\alpha l} 2^{2(s,1)(1/p-1/q)} \|A_s(f,x)\|_p^2 \right)^{1/2}. \qquad (8)$$

Для продолжения оценки (8) рассмотрим два случая.

1. Пусть $\theta \geq 2$. Тогда, применив к последней сумме (8) неравенство Гельдера (с естественной модификацией при $\theta = \infty$) и воспользовавшись соотношением (5), получим

$$\mathcal{J}_2 \ll \left(\sum_{(s,\gamma')\geq\alpha l} 2^{2(s,r)} \|A_s(f,x)\|_p^2\, 2^{-2(s,\gamma)(r_1-1/p+1/q)} \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{(s,\gamma')\geq\alpha l} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{(s,\gamma')\geq\alpha l} 2^{-2(s,\gamma)(r_1-1/p+1/q)\frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{1/2-1/\theta} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^r_{p,\theta}}\, 2^{-\alpha l(r_1-1/p+1/q)}\, l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)} \leq$$

$$\leq 2^{-\alpha l(r_1-1/p+1/q)}\, l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}. \qquad (9)$$

2. Пусть $\theta \in [1, 2)$. Тогда в силу неравенства [8. с. 43]

$$\left(\sum_k a_k^{\nu_2} \right)^{1/\nu_2} \leq \left(\sum_k a_k^{\nu_1} \right)^{1/\nu_1}, \quad 1 \leq \nu_1 \leq \nu_2 < \infty, \quad a_k \geq 0, \qquad (10)$$

из (8) получаем оценку

$$\mathcal{J}_2 \leq \left(\sum_{(s,\gamma')\geq\alpha l} 2^{2(s,r)} \|A_s(f,x)\|_p^2\, 2^{-2(s,\gamma)(r_1-1/p+1/q)} \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2^{-\alpha l(r_1-1/p+1/q)} \left(\sum_{(s,\gamma')\geq\alpha l} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq$$

$$\leq 2^{-\alpha l(r_1-1/p+1/q)} \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \leq 2^{-\alpha l(r_1-1/p+1/q)}. \qquad (11)$$

Учитывая значение α, полученные оценки (9) и (11) запишем в общем виде

$$\mathcal{J}_2 \ll 2^{-l(r_1-1/p+1/2)}\, l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}. \qquad (12)$$

Теперь оценим слагаемое $\mathcal{J}_1$. С этой целью рассмотрим для каждого вектора $s = (s_1, \ldots, s_m)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1, m}$, $l \leq (s, \gamma') < \alpha l$ линейный оператор T_s, действующий на функцию $f(x)$ следующим образом:

$$T_s f = f(x) * \left(\sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} - t(\Omega_{N_s}; x) \right).$$

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $1 \le p \le 2 < q < p'$, $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$. *Тогда норма оператора* T_s, *действующего из* L_p *в* L_q ($\| T_s \|_{p \to q}$) *удовлетворяет соотношению*

$$\| T_s \|_{p \to q} = \sup_{\|f\|_p \le 1} \| T_s f \|_q \ll 2^{(s,1)} N_s^{-(1/2 + 1/p')}.$$

Доказательство. Согласно интерполяционной теореме Рисса – Торина (см., например, [5, с. 144])

$$\| T_s \|_{p \to q} \le \| T_s \|_{2 \to 2}^{1-\lambda} \| T_s \|_{1 \to q^*}^{\lambda}, \tag{13}$$

где λ и q^* определяются из соотношений

$$\lambda = \frac{2}{p} - 1, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda}{q^*}.$$

Получим оценки сверху величин $\| T_s \|_{2 \to 2}$ и $\| T_s \|_{1 \to q^*}$. Учитывая, что коэффициенты полинома $t(\Omega_{N_s}; x)$ одинаковы и не превышают $2^{(s,1)} N_s^{-1}$, и используя равенство Парсеваля, будем иметь

$$\| T_s \|_{2 \to 2} \ll 2^{(s,1)} N_s^{-1}. \tag{14}$$

Для оценки величины $\| T_s \|_{1 \to q^*}$ применим сначала обобщенное неравенство Минковского и затем, воспользовавшись леммой 1, получим

$$\| T_s f \|_{q^*} \le \| f \|_1 \left\| \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} - t(\Omega_{N_s}; x) \right\|_{q^*} \ll$$

$$\ll \| f \|_1 2^{(s,1)} N_s^{-1/2}.$$

Отсюда, согласно определению нормы $\| T_s \|_{1 \to q^*}$, находим

$$\| T_s \|_{1 \to q^*} \ll 2^{(s,1)} N_s^{-1/2}. \tag{15}$$

Подставив (15) и (14) в (13), получим требуемую оценку

$$\| T_s \|_{p \to q} \ll (2^{(s,1)} N_s^{-1})^{2 - 2/p} (2^{(s,1)} N_s^{-1/2})^{2/p - 1} =$$

$$= 2^{(s,1)} N_s^{-(1/2 + 1/p')}.$$

Лемма доказана.

Таким образом, применив к $\mathcal{J}_1$ последовательно теорему А, неравенство Минковского и лемму 2, будем иметь

$$\mathcal{J}_1 \ll \left\| \left(\sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} |\delta_s(f, x) - (\delta_s(f, x) * t(\Omega_{N_s}; x))|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \le$$

$$\le \left(\sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} \left\| \delta_s(f, x) * \left(\sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} - t(\Omega_{N_s}; x) \right) \right\|_q^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} \| T_s \delta_s(f,x) \|_q^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} \| T_s \|_{p\to q}^2 \| \delta_s(f,x) \|_p^2 \right)^{1/2} <<$$

$$<< \left(\sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} 2^{2(s,1)} N_s^{-(1+2/p')} \| \delta_s(f,x) \|_p^2 \right)^{1/2}. \tag{16}$$

Подставляя в (16) вместо N_s его значение из (4), получаем оценку

$$\mathcal{J}_1 << 2^{-lr_1(1+2/p')} \left(\sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} 2^{2(s,1)} 2^{(s,\gamma)(r_1-1)(1+2/p')} \| \delta_s(f,x) \|_p^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le 2^{-lr_1(1+2/p')/2} \left(\sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} 2^{(s,\gamma)((r_1-1)(1+2/p')+2-2r_1)} 2^{2(s,r)} \| \delta_s(f,x) \|_p^2 \right)^{1/2}. \tag{17}$$

Далее, как и при оценке слагаемого $\mathcal{J}_2$, рассмотрим два случая.

1. Пусть $1 \le \theta \le 2$. Тогда согласно неравенству (10) из (17) получаем оценку

$$\mathcal{J}_1 << 2^{-lr_1(1+2/p')/2} 2^{l(2(r_1-1)/p'+1-r_1)/2} \left(\sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} 2^{(s,r)\theta} \| \delta_s(f,x) \|_p^\theta \right)^{1/\theta} =$$

$$= 2^{-l(r_1-1/2+1/p')} \left(\sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} 2^{(s,r)\theta} \left\| \delta_s \left(\sum_{\|s'-s\|_\infty \le 1} A_{s'}(f,x) \right) \right\|_p^\theta \right)^{1/\theta} <<$$

$$<< 2^{-l(r_1-1/2+1/p')} \left(\sum_{\substack{l \le (s,\gamma') < \alpha l \\ \|s'-s\|_\infty \le 1}} 2^{(s',r)\theta} \| A_{s'}(f,x) \|_p^\theta \right)^{1/\theta} <<$$

$$<< 2^{-l(r_1+1/2-1/p)} \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \| A_s(f,x) \|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le$$

$$\le 2^{-l(r_1-1/p+1/2)} \| f \|_{B^r_{p,\theta}} \le 2^{-l(r_1-1/p+1/2)}. \tag{18}$$

2. Пусть $2 < \theta \le \infty$. В этом случае, применив к последней сумме (17) неравенство Гельдера с показателем $\theta/2$ (с естественной модификацией при $\theta = \infty$), найдем

$$\mathcal{J}_1 << 2^{-lr_1(1+2/p')/2} \left(\sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} 2^{(s,r)\theta} \left\| \delta_s \left(\sum_{\|s'-s\|_\infty \le 1} A_{s'}(f,x) \right) \right\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \times$$

$$\times \left(\sum_{l \le (s,\gamma') < \alpha l} 2^{(s,\gamma)(2(r_1-1)/p'+1-r_1)\frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{1/2-1/\theta}. \tag{19}$$

Принимая во внимание, что $2(r_1-1)/p' + 1 - r_1 < 0$, и используя соотношение (5), продолжим оценку (19)

$$\ll 2^{-lr_1(1+2/p')/2} \left(\sum_{\substack{l \le (s,\gamma') < \alpha l \\ \|s'-s\|_\infty \le 1}} 2^{(s',r)\theta} \|A_{s'}(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \times$$

$$\times 2^{l(r_1-1)(2/p'-1)/2} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)} \le$$

$$\le 2^{-l(r_1-1/p+1/2)} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)} \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \le$$

$$\le 2^{-l(r_1-1/p+1/2)} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{20}$$

Подставляя оценки (20), (18) и (12) в (7), находим

$$\|f(x) - t(\Omega_M; x)\|_q \ll 2^{-l(r_1-1/p+1/2)} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} \asymp$$

$$\asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1-1/p+1/2} (\log^{\nu-1} M)^{(1/2-1/\theta)_+}.$$

Теорема доказана.

Обратим внимание, что в случае $1 < p \le 2 < q < p'$, как следует из (3) и соответствующей оценки колмогоровского поперечника $\mathrm{d}_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ [1], порядки поперечников $\mathrm{d}^T_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ и $\mathrm{d}_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ совпадают и, таким образом, в этом случае получаем положительный ответ на поставленный выше вопрос.

В заключение сформулируем несколько следствий и сравним оценку (3) с соответствующей оценкой наилучших тригонометрических приближений классов $B^r_{p,\theta}$ [9]. Предварительно отметим, что порядки тригонометрических поперечников классов $W^r_{p,\alpha}$ и H^r_p в пространстве L_q для тех p и q, которые рассмотрены выше для классов $B^r_{p,\theta}$, анонсированы в [10] и могут быть получены в виде следствий из (3). Так, полагая в (3) $\theta = \infty$ и принимая во внимание, что $B^r_{p,\infty} = H^r_p$, получаем такие следствия.

***Следствие* 1.** *Пусть* $1 \le p \le 2 < q < p'$, $r_1 > 1$. *Тогда*

$$\mathrm{d}^T_M(H^r_p, L_q) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1-1/p+1/2} (\log^{\nu-1} M)^{1/2}. \tag{21}$$

***Следствие* 2.** *Пусть* $2 < q < \infty$, $r_1 > 1$. *Тогда*

$$\mathrm{d}^T_M(W^r_{1,\alpha}, L_q) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1-1/2} (\log^{\nu-1} M)^{1/2}. \tag{22}$$

Оценка сверху в (22) следует из (21). Действительно, достаточно в (21) положить $p = 1$ и воспользоваться вложением $W^r_{1,\alpha} \subset H^r_1$ (см., например, [6, с. 62]).

Оценку снизу в (22) получаем из соответствующей оценки колмогоровского поперечника $\mathrm{d}_M(W^r_{1,\alpha}, L_q)$ [6, с. 69]:

$$\mathrm{d}^T_M(W^r_{1,\alpha}, L_q) \ge \mathrm{d}_M(W^r_{1,\alpha}, L_q) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1-1/2} (\log^{\nu-1} M)^{1/2}.$$

***Следствие* 3.** *Пусть* $1 < p \le 2 < q < p'$, $r_1 > 1$. *Тогда*

$$d^T_M(W^r_{p,\alpha}, L_q) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1-1/p+1/2}. \tag{23}$$

Поскольку при $1<p<2$ $W^r_{p,\alpha}\subset B^r_{p,2}$ (см., например, [4, с. 390]), то оценка сверху в (23) является следствием оценки (3) при $\theta=2$. Оценка снизу, как и в следствии 2, получается из соответствующей оценки колмогоровского поперечника $d_M(W^r_{p,\alpha}, L_q)$, которая установлена В. Н. Темляковым [6, с. 69].

В [9] получены точные по порядку оценки наилучших тригонометрических приближений $e_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ в случае $1<p\le 2<q<\infty$. Напомним, что через $e_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ обозначается величина

$$e_M(B^r_{p,\theta}, L_q) = \sup_{f\in B^r_{p,\theta}} \inf_{k^j, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,\cdot)} \right\|_q,$$

где $k^j=(k^j_1,\dots,k^j_m)$, $j=\overline{1,M}$, — все возможные наборы из M векторов из целочисленной решетки Z^m. Более подробно с результатами исследования наилучших тригонометрических приближений классов $B^r_{p,\theta}$, а также с историей вопроса можно ознакомиться в работах [1, 9, 11]. Там же имеется соответствующая библиография. Заметим, что согласно определениям для величин $d^T_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ и $e_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ выполнено неравенство

$$d^T_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \ge e_M(B^r_{p,\theta}, L_q).$$

Таким образом, сопоставив при $1<p\le 2<q<p'$ и $r_1>1$ доказанную выше теорему с теоремой 1 из [9], видим, что

$$d^T_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp e_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \quad \text{при} \quad \theta\ge 2$$

и

$$e_M(B^r_{p,\theta}, L_q) << d^T_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \quad \text{при} \quad 1\le\theta<2 \quad \text{и} \quad \nu\ge 2.$$

1. *Романюк А. С.* О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 5. – С. 663–675.
2. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161–178.
3. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244–278.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.; Т. 2. – 537 с.
6. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 112 с.
7. *Белинский Э. С., Галеев Э. М.* О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник // Вест. Моск. ун-та. Математика и механика. – 1991. – № 2. – С. 3–7.
8. *Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
9. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$. I // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С. 1535–1547.
10. *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций многих переменных „плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники // Докл. АН СССР. – 1985. – **284**, № 6. – С. 1294–1297.
11. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$. II // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 10. – С. 1411–1423.

Получено 25.09.96